ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА $L_{\omega}^{\Phi}(S^{n-1})$ И $L_{\omega}^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$

С. С. Казарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, №3, 1993

Для функций $(w(x), \omega(x))$, определенных на единичной сфере S^{n-1} n -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, найдены необходимые и достаточные условия, при которых выполняется следующее неравенство

$$\int_{S^{n-1}} \Phi(w(x) \tilde{M}(f, x)) \omega(x) dx \leq C \int_{S^{n-1}} \Phi(w(x) f(x)) \omega(x) dx,$$

где $\tilde{M}(f, x)$ - максимальная функция Харди-Литтлвуда, определенная на S^{n-1} .

Аналогичный результат доказан для максимальной функции Харди-Литтлвуда, определенной в $\mathbb{R}^n$.

Эти неравенства дают возможность обобщить некоторые результаты теории гармонических функций и доказать весовые интегральные неравенства для класса Кальдерона-Зигмунда.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В 1930 Г. Харди и Дж. Литтлвуд [1] определили максимальную функцию

$$M_1(f, x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)| dt, \quad (1.1)$$

где $I \subset \mathbb{R}^1$ - произвольный интервал, и доказали что для $p > 1$

$$\int_{\mathbb{R}^1} [M_1(f, x)]^p dx \leq C_p \int_{\mathbb{R}^1} |f(x)|^p dx, \quad (1.2)$$

где $C_p > 0$ зависит только от p .

Максимальная функция Харди-Литтлвуда и ее модификации имеют важные приложения в гармоническом анализе, эргодической теории и в теории кратных интегралов (см. [2] - [4]).

В работах Г. Рауха [5], К. Смита [6] был доказан аналог теоремы Харди-Литтлвуда для единичной сферы S^{n-1} n -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

В 1972 Б. Макенхаупт [7] нашел необходимое и достаточное условие на весовую функцию в $\mathbb{R}^n$, при котором выполняется интегральное неравенство типа (1.2). При этом в определении (1.1) $\sup_{\text{сегмент}}$ берется по всем кубам из пространства $\mathbb{R}^n$, содержащим точку x . Этот результат послужил толчком для получения многочисленных результатов в различных областях современной математики.

На сфере S^{n-1} максимальная функция Харди-Литтлвуда определяется следующим образом:

$$\tilde{M}(f, x) = \sup_{x \in \tilde{Q}} \frac{1}{\sigma(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q}} |f(t)| d\sigma_t, \quad (1.3)$$

где $\sup_{\text{сегмент}}$ берется по всем сферическим сегментам $\tilde{Q}$, содержащим точку x , а $\sigma(\tilde{Q})$ - мера множества $\tilde{Q}$. Отметим, что сферический сегмент с центром в t и радиусом r есть множество: $\tilde{Q}(t, r) = \{y \in S^{n-1} : |y - t| < r\}$.

Используя результаты работ [8], [9] и [10], в [11] была доказана следующая

Теорема А. Пусть $\omega(x) \geq 0$ - весовая функция, определенная на S^{n-1} . Для того, чтобы при всех $f \in L^p_\omega(S^{n-1})$, $1 < p < \infty$ выполнялось неравенство

$$\int_{S^{n-1}} [\tilde{M}(f, t)]^p \omega(t) d\sigma_t \leq C_p \int_{S^{n-1}} |f(t)|^p \omega(t) d\sigma_t,$$

где $C_p > 0$ - постоянная, не зависящая от f , необходимо и достаточно, чтобы для $\omega(t)$ выполнялось бы условие A_p^ω , т. е. для любого сферического сегмента $\tilde{Q} \subset S^{n-1}$

$$\frac{1}{\sigma(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q}} \omega(t) d\sigma_t \left[\frac{1}{\sigma(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q}} \omega(t)^{-\frac{1}{p-1}} d\sigma_t \right]^{p-1} \leq C,$$

где $C > 0$ не зависит от $\tilde{Q}$.

Р. Керман и А. Торчинский [12] распространили результат Б. Макенхаупта на классы Орлича. Ими была доказана следующая теорема (см. §2 после необходимых определений).

Теорема В. Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и ее дополнительная функция $\Psi(t)$ удовлетворяют условию Δ_2 . Тогда следующие условия (I), (II) и (III) эквивалентны:

(I)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(M_n(f, x)) \omega(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(f(x)) \omega(x) dx,$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от f ;

(II) неотрицательная, локально-интегрируемая функция $\omega(x)$ принадлежит классу A_Φ : для всех кубов $Q \subset \mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \varepsilon \omega(x) dx \right) \varphi \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon \omega(x)} \right) dx \right) \leq K,$$

где $K > 0$ не зависит от Q и произвольных чисел ε ;

(III) $\omega(x) \in A_{p_0^*}$, где p_0^* - нижний индекс функции Юнга $\Phi(t)$:

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{-\frac{1}{p_0^*-1}} dx \right)^{p_0^*-1} \leq D$$

для всех кубов $Q \subset \mathbb{R}^n$.

В работе [13] был доказан подобный результат в случае, когда весовая функция находится внутри метрики функции Юнга Φ .

Следующая теорема была доказана в [13].

Для любой локально-интегрируемой функции $\omega(x)$ определим соответствующую максимальную функцию:

$$H_\omega(f, x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} |\omega(x)| \int_Q \left| \frac{f(t)}{\omega(t)} \right| dt.$$

Теорема С. Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и дополнительная к ней функция $\Psi(t)$ удовлетворяют условию Δ_2 . Пусть p_0^*, p_1^* - нижний и верхний индексы функции $\Phi(t)$, а q_0^*, q_1^* - нижний и верхний индексы функции $\Psi(t)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(a') локально-интегрируемая функция $\omega(x)$ принадлежит классу B_Φ , т.е. для любых кубов $Q \subset \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{|Q|} \| \chi_Q \omega \|_{L_{\Phi}^*} \| \frac{\chi_Q}{\varepsilon \omega} \|_{L_{\Psi}^*} \leq D_\Phi,$$

где $D_\Phi > 0$ не зависит от Q и ε .

(b') $\omega(x) \in B_{p_i}$, $i = 0, 1$, т.е. для любого куба $Q \subset \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{|Q|} \|\chi_Q \omega\|_{L^{p_0}} \|\frac{\chi_Q}{\omega}\|_{L^{q_0}} \leq D_{p_0},$$

$$\frac{1}{|Q|} \|\chi_Q \omega\|_{L^{p_1}} \|\frac{\chi_Q}{\omega}\|_{L^{q_1}} \leq D_{p_1}.$$

(c') Существует некоторая константа $C_\Phi > 0$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ и произвольной функции $f \in L^\Phi$

$$\|H_\omega(f)\|_{L^\Phi} \leq C_\Phi \|f\|_{L^\Phi}.$$

(d') Существует постоянная $C'_\Phi > 0$ такая, что для произвольной функции $f \in L^\Phi$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(H_\omega(f, x)) dx \leq C'_\Phi \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(f(x)) dx.$$

(e') Существует постоянная $D'_\Phi > 0$ такая, что для всех кубов $Q \subset \mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q S_\Phi(\varepsilon|\omega(x)|) dx \varphi \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \Psi\left(\frac{1}{\varepsilon|\omega(x)|}\right) dx \right) \leq D'_\Phi,$$

где

$$S_\Phi(\lambda) = \inf_{t>0} \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)}.$$

(f') Справедливы неравенства

$$\|H_\omega(f)\|_{L^{p_0}} \leq C_{p_0} \|f\|_{L^{p_0}},$$

$$\|H_\omega(f)\|_{L^{p_1}} \leq C_{p_1} \|f\|_{L^{p_1}},$$

где $C_{p_i} > 0$, $i = 0, 1$ не зависит от f .

Нам необходимы следующие определения.

Определение 1. Скажем, что пара функций $(\omega(x), \omega(x))$, $x \in S^{n-1}$, $\omega(x) \geq 0$, принадлежит классу $AB_\Phi(S^{n-1})$, если для любого сферического сегмента $\tilde{Q} \subset S^{n-1}$ и $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{\sigma(\tilde{Q})} \|\chi_{\tilde{Q}} \omega\|_{L^{p_0}(S^{n-1})} \|\frac{\chi_{\tilde{Q}}}{\varepsilon \omega}\|_{L^{q_0}(S^{n-1})} \leq D_\Phi, \quad (1.4)$$

где $D_\Phi > 0$ не зависит от $\tilde{Q}$.

Определение 2. Скажем, что пара локально-интегрируемых функций $(w(x), \omega(x))$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega(x) \geq 0$ принадлежит классу $AB_\Phi(\mathbb{R}^n)$, если для любого куба $Q \subset \mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{|Q|} \|\chi_Q w\|_{L^{\Phi, \omega}(\mathbb{R}^n)} \|\frac{\chi_Q}{\varepsilon \omega w}\|_{L^{\Psi, \omega}(\mathbb{R}^n)} \leq D'_\Phi, \quad (1.5)$$

где $D'_\Phi > 0$ не зависит от Q .

Для любой локально-интегрируемой функции $w(x)$ определим соответствующую максимальную функцию на S^{n-1} следующим образом :

$$\tilde{H}_w(f, x) = \sup_{t \in \tilde{Q}} \frac{1}{\sigma(\tilde{Q})} |w(x)| \int_{\tilde{Q}} \left| \frac{f(t)}{w(t)} \right| d\sigma_t,$$

где $\tilde{Q} \subset S^{n-1}$ - сферический сегмент.

В §3 доказывается следующая

Теорема 1. Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и дополнительная к ней функция $\Psi(t)$ удовлетворяют условию Δ_2 . Тогда следующие утверждения эквивалентны :

- (a) $(w(x), \omega(x)) \in AB_\Phi(S^{n-1})$.
- (b) $(w(x), \omega(x)) \in AB_{p_i}(S^{n-1})$, $i = 1, 2$, т.е. для любого сферического сегмента $\tilde{Q} \subset S^{n-1}$ справедливо следующее неравенство :

$$\frac{1}{\sigma(\tilde{Q})} \|\chi_{\tilde{Q}} w\|_{L^{\Psi, \omega}(S^{n-1})} \|\frac{\chi_{\tilde{Q}}}{\omega w}\|_{L^{\Phi, \omega}(S^{n-1})} \leq D_0, \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{\sigma(\tilde{Q})} \|\chi_{\tilde{Q}} w\|_{L^{\Phi, \omega}(S^{n-1})} \|\frac{\chi_{\tilde{Q}}}{\omega w}\|_{L^{\Psi, \omega}(S^{n-1})} \leq D_1, \quad (1.7)$$

где $D_0 > 0$ и $D_1 > 0$ не зависят от $\tilde{Q}$.

- (c) Пусть $w(x)$ и $\omega(x) \geq 0$ интегрируемы на S^{n-1} . Тогда существует постоянная $C'_\Phi > 0$ такая, что

$$\int_{S^{n-1}} \Phi(\tilde{H}_w(f, x)) \omega(x) d\sigma_x \leq C'_\Phi \int_{S^{n-1}} \Phi(f(x)) \omega(x) d\sigma_x. \quad (1.8)$$

- (d) Пусть $w(x)$ и $\omega(x) \geq 0$ интегрируемы на S^{n-1} . Тогда существует постоянная $C''_\Phi > 0$ такая, что

$$\|\tilde{H}_w(f)\|_{L^{\Phi, \omega}(S^{n-1})} \leq C''_\Phi \|f\|_{L^{\Psi, \omega}(S^{n-1})}. \quad (1.9)$$

Эта теорема позволяет получить ряд результатов теории гармонических функций на сфере S^{n-1} .

Аналогично Теореме 1 доказывается следующая

Теорема 2. Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и дополнительная к ней функция $\Psi(t)$ удовлетворяют условию Δ_2 . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(a₁) $(w(x), \omega(x)) \in AV_\Phi(\mathbb{R}^n)$.

(b₁) $(w(x), \omega(x)) \in AV_{p_i}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2$, т.е. для любого куба $Q \subset \mathbb{R}^n$:

$$\frac{1}{|Q|} \|\chi_Q w\|_{L_{\omega}^{p_0}(\mathbb{R}^n)} \|\frac{\chi_Q}{\omega}\|_{L_{\omega}^{q_1}(\mathbb{R}^n)} \leq B_0, \quad (1.10)$$

$$\frac{1}{|Q|} \|\chi_Q w\|_{L_{\omega}^{q_1}(\mathbb{R}^n)} \|\frac{\chi_Q}{\omega}\|_{L_{\omega}^{p_0}(\mathbb{R}^n)} \leq B_1, \quad (1.11)$$

где $B_0 > 0$ и $B_1 > 0$ не зависят от Q .

(c₁) Пусть $w(x)$ и $\omega(x) \geq 0$ локально-интегрируемы на $\mathbb{R}^n$. Тогда существует постоянная $B'_\Phi > 0$ такая, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(H_w(f, x)) \omega(x) dx \leq B'_\Phi \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(f(x)) \omega(x) dx. \quad (1.12)$$

(d) Пусть $w(x)$ и $\omega(x) \geq 0$ локально-интегрируемы на $\mathbb{R}^n$. Тогда существует постоянная $B''_\Phi > 0$ такая, что

$$\|H_w(f)\|_{L_{\omega}^{p_\Phi}(\mathbb{R}^n)} \leq B''_\Phi \|f\|_{L_{\omega}^{q_\Phi}(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.13)$$

Теорема 2 обобщает Теоремы В и С.

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть φ - функция на $(0, \infty)$, удовлетворяющая условиям: $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\tau) > 0$, при $\tau > 0$, φ не убывает и непрерывна справа $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(\tau) = +\infty$.

Обозначим через

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \varphi(\tau) d\tau$$

соответствующую функцию Юнга.

Скажем, что функция Φ удовлетворяет условию Δ_2 , если $\Phi(2t) \leq B\Phi(t)$ для некоторого $B > 0$.

Функция

$$\Psi(t) = \int_0^{|t|} \varphi^{-1}(\tau) d\tau,$$

где $\varphi^{-1}(\tau) = \sup\{s : \varphi(s) \leq \tau\}$, называется дополнительной к Φ . Пусть $x \in S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = 1\}$. Весовое пространство Орлича

$L_\omega^\Phi(S^{n-1})$, где $\omega(x) \geq 0$ - интегрируемая функция на S^{n-1} , состоит из функций на S^{n-1} таких, что

$$\left| \int_{S^{n-1}} u(x)v(x)\omega(x)dx \right| < \infty$$

для любой $v(x)$, удовлетворяющей условию

$$\int_{S^{n-1}} \Psi(v(x))\omega(x)dx < \infty.$$

Пространство $L_\omega^\Phi(S^{n-1})$ - банахово пространство относительно нормы Люксембурга, которое определяется следующим образом :

$$\|f\|_{L_\omega^\Phi(S^{n-1})} = \inf_{\int_{S^{n-1}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{k}\right)\omega(x)dx \leq 1} k, \quad k > 0. \quad (2.1)$$

В дальнейшем сферу S^{n-1} будем обозначать через S .

Мы будем использовать следующее свойство функции Юнга (см. [14], стр.37) :

$$C^{-1}t\varphi(t) \leq \Phi(t) \leq Ct\varphi(t). \quad (2.2)$$

В. Матусевска и В. Орлич в [15] рассмотрели функцию

$$\bar{S}_\Phi(\lambda) = \sup_{t>0} \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)}. \quad (2.3)$$

Справедлива следующая лемма (см. [16], стр. 35).

Лемма А. Функция $\bar{S}_\Phi(\lambda)$ ограничена на любом компакте и существуют числа p_0 и p_1 ($p_0 \leq p_1$) такие, что

$$\bar{S}_\Phi(\lambda) = O(\max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1})) \quad (2.4)$$

при $\lambda \rightarrow 0$ или $\lambda \rightarrow \infty$.

Положим $p_0^* = \sup p_0$, $p_1^* = \inf p_1$, тогда

$$p_1^* = \inf_{1 < \lambda < \infty} \frac{\ln \bar{S}_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\ln \bar{S}_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda}, \quad (2.5)$$

$$p_0^* = \sup_{0 < \lambda < 1} \frac{\ln \bar{S}_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\ln \bar{S}_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda}. \quad (2.6)$$

Из определения функции $\bar{S}_\Phi(\lambda)$ следует, что существует постоянная $C > 0$ такая, что при $p_0 < p_0^*$ и $p_1 > p_1^*$

$$\Phi(\lambda t) \leq C \max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1})\Phi(t), \quad p_0 \leq p_1. \quad (2.7)$$

Пусть

$$\underline{S}_\Phi(\lambda) = \inf_{t>0} \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)}. \quad (2.8)$$

Справедливы следующие соотношения (см. [17]):

$$p_0^* = \sup_{1 < \lambda < \infty} \frac{\ln \underline{S}_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\ln \underline{S}_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda}, \quad (2.9)$$

$$p_1^* = \inf_{0 < \lambda < 1} \frac{\ln \underline{S}_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\ln \underline{S}_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda}. \quad (2.10)$$

Числа p_0^* и p_1^* называются *нижним* и *верхним* индексами функции $\Phi(t)$. Из работы [18] следует, что верхний и нижний индексы q_0^* и q_1^* дополнительной функции $\Psi(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{p_0^*} + \frac{1}{q_1^*} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{q_0^*} + \frac{1}{p_1^*} = 1. \quad (2.11)$$

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательство Теоремы 1. Используя неравенства (2.2) условие (1.8) можно переписать в следующем виде:

$$\int_S \Phi(\tilde{H}_w(f, x)) \omega(x) d\sigma_x \leq \int_S \Phi(Cf(x)) \omega(x) d\sigma_x, \quad (3.1)$$

где $C > 0$ не зависит от f .

Из определения нормы Люксембурга следует, что

$$\int_S \Phi\left(\frac{Cf(x)}{C\|f\|_{L_{\omega}^{\Phi}}}\right) \varepsilon \omega(x) d\sigma_x \leq 1,$$

поэтому в условии (3.1), заменяя f на $f_1 = \frac{f}{C\|f\|_{L_{\omega}^{\Phi}}}$, получаем

$$\|H_w(f)\|_{L_{\omega}^{\Phi}(S)} \leq D_{\Phi}'' \|f\|_{L_{\omega}^{\Phi}(S)}. \quad (3.2)$$

Таким образом, импликация (c) $\implies$ (d) доказана.

Согласно определению максимальной функции $\tilde{H}_w(f, x)$

$$\frac{1}{\sigma(\tilde{Q})} \chi_{\tilde{Q}}(x) w(x) \int_{\tilde{Q}} \left| \frac{f(y)}{w(y)} \right| d\sigma_y \leq \tilde{H}_w(\chi_{\tilde{Q}} f, x).$$

Поэтому, используя (3.2), получаем

$$\frac{1}{\sigma(\tilde{Q})} \|\chi_{\tilde{Q}} w\|_{L_{\omega}^{\Phi}(S)} \int_{\tilde{Q}} \left| \frac{f(y)}{\varepsilon w(y) w(y)} \right| \varepsilon \omega(y) d\sigma_y \leq C \|\chi_{\tilde{Q}} f\|_{L_{\omega}^{\Phi}(S)},$$

откуда следует импликация $(d) \implies (a)$.

Докажем теперь импликацию $(a) \implies (b)$. Пусть $\bar{Q}$ - сферический сегмент и $\bar{Q}_N = \{x : |w(x)| \geq N\} \cap \bar{Q}$. Согласно условиям (2.8) и (2.10) для произвольного $\epsilon_1 > 0$ можем выбрать такое $\xi_N > 0$, что

$$\xi_N^{p_1^* + \epsilon_1} |w(x)|^{p_1^* + \epsilon_1} < \underline{S}_\Phi(\xi_N |w(x)|), \quad x \in \bar{Q}'_N = \bar{Q} \setminus \bar{Q}_N,$$

где p_1^* - верхний индекс функции Юнга $\Phi(t)$. Для сферического сегмента $\bar{Q}$ и любого числа N имеем

$$\begin{aligned} \int_{\bar{Q}'_N} \Phi\left(\frac{\xi_N w(x)}{k}\right) \omega(x) d\sigma_x &\geq \Phi(1) \int_{\bar{Q}'_N} \underline{S}_\Phi\left(\frac{\xi_N w(x)}{k}\right) \omega(x) d\sigma_x \geq \\ &\geq \Phi(1) \int_{\bar{Q}'_N} \left(\frac{\xi_N w(x)}{k}\right)^{p_1^* + \epsilon_1} \omega(x) d\sigma_x. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из определения нормы Люксембурга и неравенств (3.3) получаем

$$\|\chi_{\bar{Q}'_N} w\|_{L_{\omega}^{p_1^* + \epsilon_1}(S)} \leq C \|\chi_{\bar{Q}'_N} w\|_{L_{\omega}^{\Phi}(S)}, \quad (3.4)$$

где $C > 0$ не зависит от Q и N .

Отсюда при $N \rightarrow \infty$ следует, что

$$\|\chi_{\bar{Q}} w\|_{L_{\omega}^{p_1^* + \epsilon_1}(S)} \leq C \|\chi_{\bar{Q}} w\|_{L_{\omega}^{\Phi}(S)}. \quad (3.5)$$

Аналогично находим, что

$$\left\| \frac{\chi_{\bar{Q}}}{\epsilon \omega w} \right\|_{L_{\omega}^{q_1^* + \epsilon_2}(S)} \leq C \left\| \frac{\chi_{\bar{Q}}}{\epsilon \omega w} \right\|_{L_{\omega}^{\Psi}(S)}, \quad (3.6)$$

где q_1^* - верхний индекс функции Юнга $\Psi(t)$.

Используя неравенства (3.5), (3.6) и условие (a) устанавливаем справедливость условий (1.6) и (1.7). Импликация $(a) \implies (b)$ доказана.

Теперь докажем импликацию $(b) \implies (c)$.

Положим

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} f(x), & \text{при } |f(x)| > \lambda \\ 0, & \text{при } |f(x)| \leq \lambda, \end{cases} \\ f_2(x) &= \begin{cases} f(x), & \text{при } |f(x)| \leq \lambda \\ 0, & \text{при } |f(x)| > \lambda. \end{cases} \end{aligned}$$

Согласно условиям (1.6), (1.7) и неравенствам (3.5) (3.6), существуют числа $r_1 < p_0^*$ и $r_2 < p_1^*$ такие, что $\omega_i(x) = (\omega(x)|w(x)|^{r_i})$ удовлетворяют условию $A_{r_i}^\sigma$, $i = 1, 2$. Поэтому, так как $H_w(f, x) = w(x)\tilde{M}(f, x)$, то из Теоремы А получаем

$$\int_S |\tilde{H}_w(f_i, x)|^{r_i} \omega(x) d\sigma_x \leq C_{r_i} \int_S |f_i(x)|^{r_i} \omega(x) d\sigma_x, \quad i = 1, 2. \quad (3.7)$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_{\tilde{Q}}(\{\tilde{H}_w(\chi_{\tilde{Q}} f_1, x) > \lambda\}) \leq C_{r_1} \frac{1}{\lambda^{r_1}} \int_{\tilde{Q}} |f_1(x)|^{r_1} \omega(x) d\sigma_x; \quad (3.8)$$

$$\sigma_{\tilde{Q}}(\{\tilde{H}_w(\chi_{\tilde{Q}} f_2, x) > \lambda\}) \leq C_{r_2} \frac{1}{\lambda^{r_2}} \int_{\tilde{Q}} |f_2(x)|^{r_2} \omega(x) d\sigma_x. \quad (3.9)$$

Используя свойство (2.2), находим

$$\int_{\tilde{Q}} \Phi(\tilde{H}_w(f, x)) \omega(x) d\sigma_x \leq C \int_0^\infty \sigma_{\tilde{Q}}(\{\tilde{H}_w(f, x) > \lambda\}) \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} d\lambda. \quad (3.10)$$

Так как

$$\{\tilde{H}_w(f, x) > \lambda\} \subset \{\tilde{H}_w(f_1, x) > \frac{\lambda}{2}\} \cup \{\tilde{H}_w(f_2, x) > \frac{\lambda}{2}\},$$

то из (3.8)-(3.10) следует, что

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \sigma_{\tilde{Q}}(\{\tilde{H}_w(\chi_{\tilde{Q}} f, x) > \lambda\}) \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} d\lambda \leq \\ & \leq 2^{r_1} C_{r_1} \int_{\tilde{Q}} |f(x)|^{r_1} \left(\int_0^{|f(x)|} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^{r_1+1}} d\lambda \right) \omega(x) d\sigma_x + \\ & + 2^{r_2} C_{r_2} \int_{\tilde{Q}} |f(x)|^{r_2} \left(\int_{|f(x)|}^\infty \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^{r_2+1}} d\lambda \right) \omega(x) d\sigma_x. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Положим $r = \frac{r_1 + p_0^*}{2}$ и $r' = \frac{r_2 + p_1^*}{2}$, тогда из (3.11) и (2.7) вытекает

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{Q}} |f(x)|^{r_1} \left(\int_0^{|f(x)|} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^{r_1+1}} d\lambda \right) \omega(x) d\sigma_x \leq \\ & \leq C \int_{\tilde{Q}} |f(x)|^{r_1 - r} \left(\int_0^{|f(x)|} \lambda^{r - r_1 - 1} d\lambda \right) \Phi(|f(x)|) \omega(x) d\sigma_x \leq C_r \int_{\tilde{Q}} \Phi(f(x)) \omega(x) d\sigma_x. \end{aligned}$$

Подобным образом получаем, что

$$\int_{\tilde{Q}} |f(x)|^{r_2} \left(\int_{|f(x)|}^\infty \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^{r_2+1}} d\lambda \right) \omega(x) d\sigma_x \leq C_{r'} \int_{\tilde{Q}} \Phi(f(x)) \omega(x) d\sigma_x.$$

Импликация (b) $\Rightarrow$ (c) доказана и доказательство Теоремы 1 завершено.

Эта теорема позволяет доказать ряд теорем, обобщающих результаты братьев Рисс [19], Г. Рауха [5] и других.

Теорема 3. Пусть функция K и $\Phi(t)$ и дополнительная к ней $\Psi(t)$ удовлетворяют условию Δ_2 . Пусть $u(r, x)$, $|x| = 1$ - гармоническая функция в n -мерном шаре B_n с граничным значением $f(x)$ на единичной сфере S . Если $w(x)$ и $\omega(x) \geq 0$ интегрируемы на S и $w(x)f(x) \in L_{\omega}^{\Phi}(S)$, то интегральное неравенство

$$\int_S \Phi(w(x)U(x))\omega(x)d\sigma_x \leq C_{\Phi} \int_S \Phi(w(x)f(x))\omega(x)d\sigma_x, \quad (3.12)$$

где $C_{\Phi} > 0$ не зависит от f , а $U(x) = \sup_{0 \leq r < 1} |u(r, x)|$, имеет место тогда и только тогда, когда $(w(x), \omega(x)) \in A B_{\Phi}(S)$.

Доказательство. Достаточность следует из Теоремы 1 и того факта, что $U(x) \leq A_n M(f, x)$, $A_n > 0$ (см. [5]).

Необходимость. Допустим, что неравенство (3.12) имеет место. Тогда, так же как при выводе (3.2) из (3.1), для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$\|wU\|_{L_{\omega}^{\Phi}(S)} \leq C \|wf\|_{L_{\omega}^{\Phi}(S)}.$$

Отсюда следует

$$\|wu\|_{L_{\omega}^{\Phi}(S)} \leq C \|wf\|_{L_{\omega}^{\Phi}(S)}.$$

Возьмем произвольный сферический сегмент $\bar{Q}_1 \subset S$. Пусть неотрицательная функция $f(x) \geq 0$ равна нулю вне $\bar{Q}_1$. Используя представление гармонической функции $u(r, x)$ через ядро Пуассона, получаем

$$u(r, x) \geq C \left(\frac{1}{\sigma(\bar{Q}_1)} \int_{\bar{Q}_1} f(t) d\sigma_t \right) \chi_{\bar{Q}_1}(x),$$

где $\chi_{\bar{Q}_1}(x)$ - характеристическая функция сегмента $\bar{Q}_1$. Следовательно

$$\|\chi_{\bar{Q}_1} w\|_{L_{\omega}^{\Phi}(S)} \left(\frac{1}{\sigma(\bar{Q}_1)} \int_{\bar{Q}_1} f(t) d\sigma_t \right) \leq C \|wf\|_{L_{\omega}^{\Phi}(S)}.$$

Положим $f_1(x) = w(x)f(x)$. Тогда

$$\frac{1}{\sigma(\bar{Q}_1)} \|\chi_{\bar{Q}_1} w\|_{L_{\omega}^{\Phi}(S)} \sup_{\|f_1\|_{L_{\omega}^{\Phi}(S)}=1} \int_{\bar{Q}_1} \frac{f_1(t)}{\varepsilon w(t)} \varepsilon \omega(t) d\sigma_t \leq C,$$

откуда сразу следует условие (1.4). Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и дополнительная к ней $\Psi(t)$ удовлетворяют условию Δ_2 . Пусть $u(r, x)$ - гармоническая функция в шаре B_n такая, что

$$\int_S \Phi(w(x)u(r, x))\omega(x)d\sigma_x \leq C'_\Phi, \quad 0 \leq r < 1. \quad (3.13)$$

Если $(w(x), \omega(x)) \in \Lambda B_\Phi(S)$, то

$$\int_S \Phi(w(x)U(x))\omega(x)d\sigma_x \leq C''_\Phi. \quad (3.14)$$

Доказательство. Пусть

$$U_R(x) = \sup_{0 \leq r < R < 1} |u(r, x)|.$$

Тогда согласно Теореме 3 имеем

$$\int_S \Phi(w(x)U_R(x))\omega(x)d\sigma_x \leq C \int_S \Phi(w(x)u(R, x))\omega(x)d\sigma_x \leq C C'_\Phi.$$

Используя теорему Леви о предельном переходе под знаком интеграла получим неравенство (3.14).

Теорема 5. Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и дополнительная к ней $\Psi(t)$ удовлетворяют условию Δ_2 . Предположим, что гармоническая функция $u(r, x)$ удовлетворяет условию (3.13), где $(w(x), \omega(x)) \in \Lambda B_\Phi(S)$. Тогда на сфере S существует функция $f(x)$ такая, что

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_S \Phi(w(x)(u(r, x) - f(x)))\omega(x)d\sigma_x = 0. \quad (3.15)$$

Доказательство. Канторовским диагональным процессом из последовательности функций $u(r_m, x)$, удовлетворяющих (3.13), где $r_m \rightarrow 1$ при $m \rightarrow \infty$, мы можем выделить такую подпоследовательность $u(r_{m_j}, x)$, что для всех функций $G_y(x)$

$$F_y(G) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_S G_y(x)w(x)u(r_{m_j}, x)\omega(x)d\sigma_x. \quad (3.16)$$

Согласно условию (3.13) $\|\omega(\cdot)u(r_{m_j}, \cdot)\|_{L_\omega^\Phi(S)} \leq C'_\Phi$, поэтому предел (3.16) существует для всех $G \in L_\omega^\Psi(S)$. Следовательно, существует функция $f(x)$ такая, что $\omega(x)f(x) \in L_\omega^\Phi(S)$ и

$$F(G_y) = \int_S G_y(x) \omega(x) f(x) \omega(x) d\sigma_x \quad (3.17)$$

для всех $G \in L_\omega^\Psi(S)$. Положим

$$u_k(|x|, \frac{x}{|x|}) = u((1 - \frac{1}{k})|x|, \frac{x}{|x|}).$$

Тогда $u_k(|x|, \frac{x}{|x|})$ - гармоническая функция в открытом шаре $B_n = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < \frac{1}{1-k}\}$, следовательно

$$u_{k,j}(|y|, \frac{y}{|y|}) = \int_S P(x, y) u_{k,j}(1, x) d\sigma_x, \quad |y| = r,$$

где

$$P(x, y) = \frac{1}{m(S)} \cdot \frac{1 - |y|^2}{|x - y|^n}$$

- ядро Пуассона для единичного шара $\mathbb{R}^n$. Зафиксируем произвольное $y \in B_n$ и возьмем

$$G_y(x) = \frac{P(x, y)}{\omega(x)\omega(x)}.$$

Тогда

$$F(G_y) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_S P(x, y) u_{k,j}(1, x) d\sigma_x = \int_S P(x, y) f(x) d\sigma_x. \quad (3.18)$$

По определению

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u_{k,j}(|y|, \frac{y}{|y|}) = u(|y|, \frac{y}{|y|}),$$

поэтому из (3.18) следует, что

$$u(|y|, \frac{y}{|y|}) = \int_S P(x, y) f(x) d\sigma_x.$$

Так как $(\omega(x), \omega(x)) \in A B_\Phi(S)$, то $\omega(x)$ почти всюду конечна и отлична от нуля. Отсюда легко получаем, что функции вида $\omega(x)g(x)$, где $g(x)$ непрерывна на S , всюду плотны в пространстве $L_\omega^\Phi(S)$, откуда, не нарушая общности, можно предположить, что граничная функция $f(x)$ непрерывна на S .

Обозначим через $S_\delta(x)$ множество точек $x' \in S$, для которых $\rho(x, x') < \delta$. Тогда для $r = |y|$ и $x = \frac{y}{|y|}$ имеем

$$\int_S \Phi(w(x)(u(r, x) - f(x)))\omega(x)d\sigma_x \leq \int_S \Phi(w(x)) \left(\int_{S_\delta(x)} p(x, x')|f(x') - f(x)|d\sigma_{x'} + \int_{S_\delta^c(x)} p(x, x')|f(x') - f(x)|d\sigma_{x'} \right) \omega(x)d\sigma_x,$$

где $S_\delta^c(x) = S \setminus S_\delta(x)$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\int_{S_\delta(x)} p(x, x')|f(x') - f(x)|d\sigma_{x'} \leq \varepsilon.$$

Обозначим через M верхнюю грань функции $|f(y)|$. Тогда

$$2M \int_{S_\delta^c(x)} p(x, x')d\sigma_{x'} < \varepsilon,$$

если $|x|$ достаточно близко к единице. Таким образом, справедливость соотношения (3.15) доказана.

Далее в работе будем рассматривать общий сингулярный интегральный оператор $T : f \rightarrow K * f$ в $\mathbb{R}^n$ с ядром, удовлетворяющим стандартным условиям:

$$(a'') \quad \|K\|_{L^\infty} \leq C,$$

$$(b'') \quad |K(x)| < \frac{C}{|x|^n},$$

$$(c'') \quad |K(x) - K(x - y)| \leq C \frac{|y|}{|x|^{n+1}} \quad \text{при} \quad |y| < \frac{|x|}{2}.$$

Для таких интегральных операторов справедлива следующая теорема, обобщающая теорему Р. Коффмана и Ч. Феффермана [20].

Теорема 6. Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и дополнительная к ней $\Psi(t)$ удовлетворяют условию Δ_2 . Если $(w(x), \omega(x)) \in A B_\Phi(\mathbb{R}^n)$, где $w(x)$ и $\omega(x) \geq 0$ локально интегрируемы, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(w(x)T(f, x))\omega(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(w(x)f(x))\omega(x)dx. \quad (3.19)$$

Доказательство повторяет доказательство импликации (a) $\implies$ (c) Теоремы

1. При этом сферический сегмент заменяется кубом в $\mathbb{R}^n$.

Для преобразования Гильберта

$$T_1(f, x) = \text{v.p.} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y} dy$$

справедлива следующая

Теорема 7. Пусть функция $\Phi(t)$ и дополнительная к ней $\Psi(t)$ удовлетворяют условию Δ_2 . Тогда для локально-интегрируемой на $\mathbb{R}^1$ функций $w(x)$ и $\omega(x) \geq 0$ интегральное неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^1} \Phi(w(x)T_1(f, x))\omega(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^1} \Phi(w(x)f(x))\omega(x)dx \quad (3.20)$$

имеет место тогда и только тогда, когда $(w(x), \omega(x)) \in A B_\Phi(\mathbb{R}^1)$.

Доказательство. Необходимость. Возьмем произвольный интервал $I_0 \subset$

$\mathbb{R}^1$. Обозначим через I_1 и I_2 половины интервала I_0 . Пусть функция $f(x) \geq 0$ равна нулю вне I_1 . Тогда

$$|w(x)T_1(f, x)| \geq C \left(\frac{1}{|I_1|} |w(x)| \int_{I_1} f(t)dt \right) \chi_{I_2}(x). \quad (3.21)$$

Следуя рассуждениям, проведенным при доказательстве импликации (c) $\implies$ (d) Теоремы 1 или импликации (c₁) $\implies$ (d₁) Теоремы 2, из условия (3.20) получаем, что для любого $\epsilon > 0$

$$\|wT_1(f)\|_{L_{\Phi, \omega}(\mathbb{R}^1)} \leq C \|wf\|_{L_{\Phi, \omega}(\mathbb{R}^1)}. \quad (3.22)$$

Отсюда, учитывая (3.21), имеем

$$\left(\frac{1}{|I_1|} \int_{I_1} f(t)dt \right) \|\chi_{I_2} w\|_{L_{\Phi, \omega}(\mathbb{R}^1)} \leq C \|wf\|_{L_{\Phi, \omega}(\mathbb{R}^1)}$$

или

$$\left(\frac{1}{|I_1|} \int_{I_1} \frac{f(t)}{w(t)} dt \right) \|\chi_{I_2} w\|_{L_{\Phi, \omega}(\mathbb{R}^1)} \leq C \|f\|_{L_{\Phi, \omega}(\mathbb{R}^1)}. \quad (3.23)$$

Подставляя $f(t) = \chi_{I_1}(t)w(t)$ в (3.23), получаем

$$\|\chi_{I_2} w\|_{L_{\Phi, \omega}(\mathbb{R}^1)} \leq C \|\chi_{I_1} w\|_{L_{\Phi, \omega}(\mathbb{R}^1)}. \quad (3.24)$$

Аналогично

$$\|\chi_{I_1} w\|_{L_{\varepsilon\omega}^{\Phi}(\mathbb{R}^1)} \leq C \|\chi_{I_2} w\|_{L_{\varepsilon\omega}^{\Phi}(\mathbb{R}^1)}. \quad (3.25)$$

Теперь из (3.23)–(3.25) следует

$$\frac{1}{|I_1|} \|\chi_{I_1} w\|_{L_{\varepsilon\omega}^{\Phi}(\mathbb{R}^1)} \int_{I_1} \frac{f(t)}{\varepsilon\omega(t)w(t)} \varepsilon\omega(t) dt \leq C \|f\|_{L_{\varepsilon\omega}^{\Phi}(\mathbb{R}^1)}.$$

Следовательно

$$\frac{1}{|I_1|} \|\chi_{I_1} w\|_{L_{\varepsilon\omega}^{\Phi}(\mathbb{R}^1)} \|\frac{\chi_{I_1}}{\varepsilon\omega w}\|_{L_{\varepsilon\omega}^{\Phi}(\mathbb{R}^1)} \leq C.$$

Необходимость доказана. Достаточность следует из Теоремы 6.

Подобным образом доказывается

Теорема 8. Пусть функция Кунга $\Phi(t)$ и дополнительная к ней $\Psi(t)$ удовлетворяют условию Δ_2 . Если $w(x)$ и $\omega(x) \geq 0$ — 2π -периодические измеримые функции, то интегральное неравенство

$$\int_T \Phi(w(x)\tilde{f}(x))\omega(x)dx \leq C \int_T \Phi(w(x)f(x))\omega(x)dx$$

с $\tilde{f}(x) = -v.p. \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cot \frac{(t-x)}{2} dt$ и $T = [-\pi, \pi)$ имеет место тогда и только тогда, когда $(w(x), \omega(x)) \in A B_{\Phi}(T)$.

Отметим, что весовые неравенства для потенциалов Рисса в классах Орлича были получены в работах [21], [22].

ABSTRACT. For the pair of functions $(w(x), \omega(x))$ defined on the unite sphere S^{n-1} of the n -dimension Euclidean space $\mathbb{R}^n$ necessary and sufficient conditions are found for which the following inequality

$$\int_{S^{n-1}} \Phi(w(x)\tilde{M}(f, x))\omega(x)dx \leq C \int_{S^{n-1}} \Phi(w(x)f(x))\omega(x)dx$$

is satisfied, where $\tilde{M}(f, x)$ is the maximal Hardy-Littlewood function defined on the S^{n-1} . Analogous result is proved for the Hardy-Littlewood maximal function defined in $\mathbb{R}^n$.

With the help of these inequalities some results of the harmonic function theory are generalized and weighted integral inequalities for the class of Calderon-Zygmund operators are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, "A maximal theorem with function-theoretic applications", Acta Math., vol. 54, pp. 81-116, 1930.

2. N. Wiener, "The ergodic theorem", *Duke Math. J.*, vol. 5, pp. 1-18, 1939.
3. A. P. Calderon, "A general ergodic theorem", *Ann. Math.*, vol. 8, pp. 182-191, 1953.
4. A. P. Calderon, A. Zygmund, "On the existence of certain singular integrals", *Acta Math.*, vol. 88, pp. 85-139, 1952.
5. H. E. Rauch, "Harmonic and analytic functions of several variables and the maximal theorem of Hardy and Littlewood", *Canad. J. Math.*, vol. 8, pp. 171-188, 1956.
6. K. Smith, "A generalization of an inequality of Hardy and Littlewood", *Canad. J. Math.*, vol. 8, pp. 157-170, 1956.
7. B. Muckenhoupt, "Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function", *TAMS*, vol. 165, pp. 207-226, 1972.
8. A. P. Calderon, "Inequalities for the maximal function relative to a metric", *Studia Math.*, vol. 57, pp. 297-306, 1976.
9. R. Macias, C. Segovia, "A well-behaved quasi-distance for spaces of homogeneous type", *Trab. Mat. Inst. Argentino*, vol. 32, pp. 1-18, 1981.
10. H. Aimar, R. Macias, "Weighted norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal operator on spaces of homogeneous type", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 91, pp. 213-216, 1984.
11. К. С. Казарян, "Задача Дирихле в весовой метрике для шара в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ ", *ДАН СССР*, том 301, №5, стр. 1044-1048, 1988.
12. R. Kerman, A. Torchinsky, "Integral inequalities with weights for the Hardy maximal functions", *Studia Math.*, vol. 71, pp. 277-284, 1982.
13. С. С. Казарян, "Неравенства в пространствах Орлича для одной максимальной функции", *Изв. АН Арм. ССР, Математика*, том 22, №4, стр. 358-377, 1987.
14. М. А. Красносельский, Я. Б. Рутцкий, *Выпуклые Функции и Пространства Орлича*, Москва, 1958.
15. W. Matuszewska, W. Orlicz, "On certain properties of functions", *Bull. Acad. Polon. Sci.*, vol. 8, no. 7, pp. 439-443, 1960.
16. J. Gustavsson, J. Peetre, "Interpolation of Orlicz spaces", *Studia Math.*, vol. 60, pp. 33-59, 1977.
17. Е. Хиллс, Р. Филипс, *Функциональный Анализ и Полугруппы*, М., ИЛ, 1962.
18. D. Boyd, "Indices of functions spaces and their relationship to interpolation", *Canad. J. Math.*, vol. 21, pp. 1245-1254, 1969.
19. А. Зигмунд, *Тригонометрические Ряды*, том 1, Москва, 1965.
20. R. Coifman, C. Fefferman, "Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals", *Studia Math.*, vol. 54, pp. 221-237, 1974.
21. В. М. Кокилашвили, "Весовые оценки для классических интегральных операторов", *Нелинейный анализ, Функциональные пространства и приложения*, том 4, №119, стр. 86-103, 1990.
22. В. М. Кокилашвили, "Сингулярные интегралы в весовых классах Орлича", *Труды Тбилис. Мат. Инст. Размадзе АН Груз. ССР*, том 89, стр. 42-50, 1988.