О РАВНОМЕРНО-КАСАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ЛАКУНАРНЫМИ СТЕПЕННЫМИ РЯДАМИ НА КРИВЫХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Г. В. Арутюнян, В. А. Мартиросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №3, 1993

В работе получены результаты о возможности равномерно-касательных приближений на кривых из комплексной плоскости целыми или голоморфными в круге функциями, представимыми лакунарными степенными рядами.

§0. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе исследуются некоторые вопросы о возможности равномерно-касательных приближений на кривых из конечной комплексной плоскости целыми (голоморфными в круге) функциями, представимыми лакунарными степенными рядами.

Исчерпывающее решение проблемы комплексной полиномиальной аппроксимации, полученное в 1951 году С. Н. Мергеляном [1], послужило основой для развертывания исследований о возможности равномерных и касательных приближений в комплексной области целыми функциями. Такие приближения впервые рассмотрел в 1927 году Т. Карлеман [2]. Фундаментальная теория возможности равномерных и касательных приближений целыми и голоморфными функциями была детально разработана в работах М. В. Келдыша, Н. У. Аракеляна и других авторов (см. [3], [4]). Решение проблемы комплексной полиномиальной аппроксимации, с другой стороны, способствовало активизации исследований с начала 70-ых годов вопросов о возможности равномерных приближений на компактах комплексной плоскости многочленами с пропусками. В этом круге вопросов получен ряд законченных результатов как для специальных классов компактов (см. [5 – 10]), так и для общих компактов (см. [11], [12]). Мы перейдем к исследованию аппроксимативных свойств целых или голоморфных в круге функций, представимых лакунарными степенными рядами.

Работа состоит из трех частей : в §1 приведены формулировки полученных результатов, в §3 - их доказательства, а в §2 доказываются вспомогательные леммы, имеющие самостоятельный интерес.

§1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем сначала некоторые обозначения. Для множества e из комплексной конечной плоскости $\mathbf{C}$ будем обозначать через $\bar{e}$ и ∂e, соответственно, его замыкание и границу. Пусть $C(e)$ - множество всех непрерывных на e комплекснозначных функций. Для компакта $e \subset \mathbf{C}$ пусть $A(e)$ - банахово пространство всех непрерывных на e и голоморфных на его внутренности комплекснозначных функций с нормой $||f|| = \sup |f|(e)$.

Положим

$$D_r = \{z \in \mathbf{C}: \quad |z| < r\} \quad \text{при} \quad 0 \leq r \leq +\infty;$$

при этом считаем $D_0 = \emptyset$ и $D_\infty = \mathbf{C}$. Пусть $H(D_r)$ - множество всех голоморфных в круге D_r, $0 < r \leq +\infty$ функций.

Для подпоследовательности Q натуральных чисел $\mathbb{N}$ через $\Delta_{\min}(Q)$, $\Delta_{\max}(Q)$ будем обозначать, соответственно, ее минимальную и максимальную плотности в смысле Г. Полиа ([13], стр. 26).

Пусть Γ_0 - жорданова дуга из круга $D_R, 0 < R \leq +\infty$, соединяющая начало координат с ∂D_R и состоящая из конечного или счетного числа гладких дуг $\gamma_k (k = 1, 2, ...)$, удовлетворяющих следующим условиям :

a) дуга Γ_0 пересекается с любой окружностью $\partial D_r, 0 < r < R$, один раз ;

b) в любом круге $D_r, 0 < r < R$, содержится лишь конечное число дуг γ_k ;

c) каждая дуга γ_k в любой точке $z \in \gamma_k$ с пересекающей ее окружностью $\partial D_{|z|}$ образует угол, который больше некоторого числа $\alpha \in (0, \pi/2]$, где α не зависит от $z \in \gamma_k$ и от k.

Для дуги Γ_0 и числа $m \in \mathbb{N}$ положим

$$E_m = \bigcup_{k=0}^{m-1} \Gamma_k, \tag{1}$$

где

$$\Gamma_k = \{z \in D_R: \quad z = w\exp(2\pi ki/m), \quad w \in \Gamma_0\}.$$

Для подпоследовательности $Q = \{q_n\}_1^\infty \subset \mathbb{N}$ обозначим

$$Q_k = \{q_n \in Q: \quad q_n \equiv k(\mathrm{mod}\ m)\}, \quad k = 0, 1, ..., m-1.$$

Теорема 1. *Пусть f и $\varepsilon > 0$ - произвольные функции из $C(E_m)$, Q - подпоследовательность из $\mathbb{N}$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{q_n \in Q_k} q_n^{-1} = \infty \quad при \quad k = 0, 1, ..., m-1. \tag{2}$$

Тогда существует функция $g \in H(D_R)$, представимая степенным рядом вида

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n, \quad где \quad g_n = 0 \quad при \quad n \notin Q \cup \{0\} \tag{3}$$

и такая, что

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon(z) \quad при \quad z \in E_m. \tag{4}$$

Замечание 1. Множество вида (1) с $\Gamma_0 = [0, R)$ удовлетворяет условиям Теоремы 1. В этом случае для справедливости Теоремы 1 выполнение условий (2) необходимо. Это легко следует из теоремы Мюнца. Более общие кривые подобного типа получаются использованием комплексных аналогов теоремы Мюнца (см. [6], [7]).

Замечание 2. Частный случай Теоремы 1, когда $R = +\infty, m = 2$ и $E_2 = (-\infty, +\infty)$, обобщает и усиливает известную теорему Т. Карлемана [2].

В следующей теореме рассматривается более широкий класс кривых аппроксимации.

Рассмотрим множество E_m вида (1), где Γ_k $(k = 0, 1, ..., m-1)$ - жорданова дуга из круга D_R, соединяющая начало координат с ∂D_R, $\Gamma_k \cap \Gamma_j = \{0\}$ при $k \neq j$ и удовлетворяющая следующему условию : существует последовательность окружностей $\{\partial D_{r_n}\}_1^\infty$ такая, что $r_n \uparrow R$ при $n \to \infty$ и любая ∂D_{r_n} пересекает Γ_k только один раз. Пусть $\theta(t)$ - максимальный раствор тех открытых дуг, из которых состоит множество $(D_R \setminus E_m) \cap \partial D_t$, $0 < t < R$.

Теорема 2. *Пусть f и $\varepsilon > 0$ - произвольные функции из $C(E_m)$, Q - подпоследовательность из $\mathbb{N}$, удовлетворяющая условию*

$$\Delta_{\min}(Q) > 1 - \frac{\theta}{2\pi}, \quad \theta = \inf_{t \in (0,R)} \theta(t).$$

Тогда существует функция $g \in H(D_R)$, представимая степенным рядом вида (3) и удовлетворяющая (4).

В заключение параграфа отметим, что Теоремы 1,2, выявляющие аппроксимативные свойства целых или голоморфных в круге функций с лакунарными степенными рядами, можно использовать для построения таких функций, имеющих наперед заданное асимптотическое поведение вдоль определенных кривых.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Для множеств E_m, фигурирующих в Теоремах 1 и 2, и для чисел r, a, где $0 < r < a < R$, положим

$$e_m(r,a) = \overline{D}_r \cup \left(E_m \cap \overline{D}_a\right).$$

Лемма 1. *Пусть E_m - множество из Теоремы 1, Q - подпоследовательность из $\mathbb{N}$, удовлетворяющая условиям (2), и f - произвольная функция из $A(e_m(r,a))$, представимая в окрестности нуля степенным рядом вида*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad \text{где} \quad f_n = 0 \quad \text{при} \quad n \notin Q \cup \{0\}. \tag{5}$$

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует многочлен

$$p(z) = \sum_{n=0}^{s} c_n z^n, \quad c_n = 0 \quad \text{при} \quad n \notin Q \cup \{0\}, \tag{6}$$

такой, что

$$|f(z) - p(z)| < \varepsilon \quad \text{для} \quad z \in e_m(r,a). \tag{7}$$

Доказательство. Докажем сперва лемму в том частном случае, когда $m = 1$. Пусть $\pi(Q)$ - подпространство пространства $A(e)$, где $e = e_1(r,a)$, порожденное всеми многочленами вида (6). Требуется доказать, что $f \in \pi(Q)$. Согласно теоремам Хана–Банаха и Ф. Рисса достаточно доказать, что для произвольной комплексной меры Бореля μ на ∂e, удовлетворяющей соотношениям

$$\int_{\partial e} z^n \, d\mu(z) = 0 \quad \text{при} \quad n \in Q \cup \{0\}, \tag{8}$$

будет выполняться также условие

$$\int_{\partial e} f(z) \, d\mu(z) = 0. \tag{9}$$

Рассмотрим преобразование Коши

$$G(t) = \int_{\partial e} \frac{d\mu(z)}{t - z}, \ t \in \overline{\mathbf{C}} \setminus \partial e.$$

Функция $G(t)$ голоморфна по $t \in \overline{\mathbf{C}} \setminus \partial e$ ($\overline{\mathbf{C}}$ - расширенная комплексная плоскость). В силу соотношений (8) в окрестности бесконечности она разлагается в ряд Лорана

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{-p_n - 1} \int_{\partial e} z^{p_n} \, d\mu(z), \ |t| > a, \tag{10}$$

где $P = \{p_n\}_1^\infty$ - подпоследовательность, дополнительная к Q относительно $\mathbb{N}$. Докажем, что ряд (10) сходится для всех t, $|t| > r$.

С этой целью введем функцию

$$F(t) = \int_{\partial e \setminus \overline{D}_r} \exp\left(t \log z\right) d\mu(z), \quad t \in \mathbf{C},$$

где $\log z = \log|z| + i \arg z$ - однозначная ветвь логарифма, для которой $|\arg z| < \pi$. Очевидно, что F- целая функция экспоненциального типа. Для нее соотношения (8) означают, что

$$F(n) = -\int_{\partial D_r} z^n \, d\mu(z) \quad \text{при} \quad n \in Q \cup \{0\},$$

откуда непосредственно следует оценка

$$\limsup_{n \to \infty, \, n \in Q} \frac{1}{n} \log|F(n)| \leq \log r. \tag{11}$$

Далее, из теоремы Корееваара-Цеинстры [10] в применении к функции F и последовательности Q следует, что

$$\limsup_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \log|F(x)| = \limsup_{n \to \infty, \, n \in Q} \frac{1}{n} \log|F(n)|. \tag{12}$$

Заметим, что коэффициенты ряда (10) удовлетворяют неравенствам

$$\left|\int_{\partial e} z^{p_n}\, d\mu(z)\right| \leq \left|\int_{\partial D_r} z^{p_n}\, d\mu(z)\right| + |F(p_n)|, \ n = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно, с учетом (11), (12) получим

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{p_n} \log \left|\int_{\partial e} z^{p_n}\, d\mu(z)\right| \leq \log r,$$

откуда, согласно формуле Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда, вытекает, что ряд (10) сходится для $|t| > r$.

Обозначим через $G_1(t), |t| > r$, сумму ряда (10). Поскольку функции $G(t), G_1(t)$ совпадают для $|t| > a$, то по теореме единственности аналитических функций оно совпадают для всех $t \in \overline{\mathbf{C}} \setminus e$. Отсюда, применив теорему единственности для преобразования Коши, получим, что мера μ сосредоточена на ∂D_r. Теперь уже вывод условия (9) из соотношений (8) не представляет трудности : достаточно отметить, что средние арифметические для частичных сумм степенного ряда произвольной функции f из $A(\overline{D}_r)$ равномерно сходятся к ней на $\overline{D}_r$. Лемма 1 для случая $m = 1$ доказана.

Докажем теперь общий случай. Отметим сперва, что произвольная функция $f \in A(e_m(r, a))$ представима в виде суммы

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} f_k(z) \quad \text{при} \quad z \in e_m(r, a) \tag{13}$$

функций $f_k \in A(e_m(r, a))$, $k = 0, 1, \ldots, m - 1$, таких, что

$$f_k\left(z \exp\left(i\frac{2\pi}{m}\right)\right) = \exp\left(i\frac{2\pi}{m}k\right) f_k(z) \quad \text{при} \quad z \in e_m(r, a). \tag{14}$$

В самом деле, чтобы убедиться в этом, достаточно положить

$$f_k(z) = \frac{1}{m}\sum_{s=0}^{m-1} f\left(z \exp\left(i\frac{2\pi}{m}s\right)\right) \exp\left(-i\frac{2\pi}{m}ks\right), \ k = 0, 1, \ldots, m - 1.$$

Из (14) следует, в частности, что $f_k(0) = 0$ при $k = 1, \ldots, m - 1$.

Применяя теперь к каждой функции f_k и последовательности Q_k доказанный выше частный случай леммы, найдем многочлены $p_k(z), k = 0, 1, \ldots, m - 1$ вида

$$p_k(z) = \sum_{n=0}^{s_k} c_{k,n} z^n, \quad c_{k,n} = 0 \quad \text{при} \quad n \notin Q_k \cup \{0\},$$

удовлетворяющие неравенствам

$$|f_k(z) - p_k(z)| < \frac{\varepsilon}{m} \quad \text{при} \quad z \in e_1(r,a),\ k = 0, 1, ..., m-1. \tag{15}$$

Каждый p_k, очевидно, удовлетворяет равенству (14) с заменой в нем f_k на p_k. Следовательно, положив

$$p(z) = \sum_{n=0}^{m-1} p_k(z),\ z \in \mathbf{C}$$

и учитывая (13)–(15) получим, что $p(z)$ - многочлен вида (6), удовлетворяющий (7). Лемма 1 полностью доказана.

Лемма 2. *Пусть E_m - множество из Теоремы 2, Q - подпоследовательность из $\mathbb{N}$, удовлетворяющая условию*

$$\Delta_{\min}(Q) > 1 - \frac{\theta(r,a)}{2\pi}, \quad \theta(r,a) = \inf_{t \in (r,a]} \theta(t), \tag{16}$$

а f - произвольная функция из $A(e_m(r,a))$, представимая в окрестности нуля степенным рядом вида (5). Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует многочлен p вида (6), удовлетворяющий (7).

Доказательство. Пусть $\pi(Q)$ - подпространство для $A(e)$, где $e = e_m(r,a)$, порожденное всеми многочленами вида (6). Требуется доказать, что $f \in \pi(Q)$. Согласно теоремам Хана-Банаха и Ф. Рисса достаточно доказать, что для произвольной комплексной меры Бореля μ на ∂e из соотношений (8) следует (9). Возьмем произвольную меру μ указанного вида и рассмотрим ее преобразование Коши G. В силу соотношений (8) функция $G(t)$ в окрестности бесконечности $|t| > a$ представляется рядом Лорана (10). Докажем, что ряд (10) сходится для всех t, $|t| > r$. В самом деле, поскольку функция G голоморфна в области $\overline{\mathbf{C}} \setminus e$, то в силу (10) этот ряд аналитически продолжается на $\overline{\mathbf{C}} \setminus e$. Из (16) вытекает, что на каждой окружности ∂D_s, $r < s \le a$ существует открытая дуга $\theta(s)$, содержащаяся в $\overline{\mathbf{C}} \setminus e$ и удовлетворяющая соотношению

$$\Delta_{\max}(P) = 1 - \Delta_{\min}(Q) < \frac{\theta(s)}{2\pi}, \quad r < s \le a.$$

Пусть s - радиус сходимости ряда (10). Если бы $s > r$, то согласно теореме Фабри-Полиа [13] на любой открытой дуге окружности ∂D_s раствора $\theta(s)$ этот ряд обязательно имел бы хоть одну особую точку. Полученное противоречие показывает, что $s \le r$, т.е. ряд (10) сходится при $|t| > r$. Теперь уже (9) легко следует из (8). Лемма 2 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательства теорем основаны на Леммах 1 и 2 и аналогичны рассуждениям, использовавшимися Т. Карлеманом (см. [15]).

Доказательства Теорем 1, 2. Пусть $\{\partial D_{r_n}\}_1^\infty$ - последовательность окружностей из Теоремы 2. Возьмем последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}_0^\infty$ так, чтобы $\delta_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$, $\delta_n < \inf\left\{\varepsilon(z):\ z \in E_m \cap \left(\overline{D}_{r_{n+1}} \setminus D_{r_n}\right)\right\}$ при $n = 0, 1, ...(r_0 = 0)$ и положим

$$\alpha_n = \delta_{n+1} - \delta_{n+2} \quad (\alpha_{-1} = 0).$$

Положим также $a_{k,n} = \Gamma_k \cap \partial D_{r_n}$, $k = 0, 1, ..., m-1$; $n = 1, 2, ...$

Согласно комплексным аналогам известной теоремы Мюнца (см. [10] и [14], стр. 201) найдется многочлен p_0 вида (6) такой, что

$$|f(z) - p_0(z)| < \alpha_0 \quad \text{при} \quad z \in E_m \cap \overline{D}_{r_1}.$$

На первом шаге положим

$$h_1(z) = \begin{cases} p_0(z) & \text{при } z \subset \overline{D}_{r_1}, \\ f(z) - \dfrac{a_{k,2} - z}{a_{k,2} - a_{k,1}}\left[f(a_{k,1}) - p_0(a_{k,1})\right] & \text{при } \quad z \in \Gamma_k \cap \left(\overline{D}_{r_2} \setminus D_{r_1}\right), \end{cases}$$

где $k = 0, 1, ..., m-1$. Так как $h_1 \in A(e_m(r_1, r_2))$, то по Лемме 1(2) найдется многочлен p_1 вида (6), для которого

$$|h_1(z) - p_1(z)| < \alpha_1 \quad \text{при} \quad z \in e_m(r_1, r_2).$$

В частности, имеем

$$|p_0(z) - p_1(z)| < \alpha_1 \quad \text{при} \quad z \in \overline{D}_{r_1}$$

и

$$|f(z) - p_1(z)| \le \begin{cases} \alpha_1 & \text{при} \quad z = a_{k,2},\ k = 0, 1, ..., m-1, \\ \alpha_1 + \alpha_0 & \text{при} \quad z \in E_m \cap \left(\overline{D}_{r_2} \setminus D_{r_1}\right). \end{cases}$$

На n-том шаге положим

$$h_n(z) = \begin{cases} p_{n-1}(z) & z \in \overline{D}_{r_n}, \\ f(z) - \dfrac{a_{k,n+1} - z}{a_{k,n+1} - a_{k,n}} [f(a_{k,n}) - p_{n-1}(a_{k,n})] & z \in \Gamma_k \cap (\overline{D}_{r_{n+1}} \setminus D_{r_n}), \end{cases}$$

где $k = 0, 1, ..., m-1$, и по Лемме 1(2) найдем многочлен p_n вида (6), для которого

$$|h_n(z) - p_n(z)| < \alpha_n \quad \text{при} \quad z \in e_m(r_n; r_{n+1});$$

в частности, имеем

$$|p_{n-1}(z) - p_n(z)| < \alpha_n \quad \text{при} \quad z \in \overline{D}_{r_n}$$

и

$$|f(z) - p_n(z)| \le \begin{cases} \alpha_n & \text{при} \quad z = a_{k,n+1}, \ k = 0, 1, ..., m-1, \\ \alpha_n + \alpha_{n-1} & \text{при} \quad z \in E_m \cap (\overline{D}_{r_{n+1}} \setminus D_{r_n}). \end{cases}$$

Полученные неравенства справедливы и при $n = 0$ (так как $\alpha_{-1} = 0$).

Если положить

$$g(z) = \lim_{n\to\infty} p_n(z) = p_0(z) + \sum_{k=0}^{\infty} (p_{k+1}(z) - p_k(z)),$$

то g будет функцией из $H(D_R)$, поскольку определяющий ее полиномиальный ряд сходится локально-равномерно в D_R и очевидно она имеет вид (3). Пусть теперь $z \in E_m$, например, $z \in E_m \cap (\overline{D}_{r_{n+1}} \setminus D_{r_n})$.

Тогда

$$f(z) - g(z) = [f(z) - p_n(z)] + [p_n(z) - g(z)],$$

где

$$|f(z) - p_n(z)| < \alpha_n + \alpha_{n-1},$$

$$|g(z) - p_n(z)| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} (p_{k+1}(z) - p_k(z)) \right| \le \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k+1}.$$

Следовательно, имеем

$$|f(z) - g(z)| < \sum_{k=n-1}^{\infty} \alpha_k = \begin{cases} \delta_n & \text{при} \quad n > 0, \\ \delta_1 < \delta_0 & \text{при} \quad n = 0. \end{cases}$$

Учитывая выбор чисел δ_n, получим

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon(z) \quad \text{при} \quad z \in E_m.$$

Этим завершается доказательство Теорем 1,2.

ABSTRACT. Results on the possibility of uniform tangential approximations on curves from complex plane by entire or holomorphic in a disk functions possessing lacunary power series are established.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Мергелян, "О представлении функций комплексного переменного рядами полиномов на замкнутых множествах," ДАН СССР, том 78, №3, стр. 405 - - 408, 1951.
2. T. Carleman, "Sur un theoreme de Weierstrass," Ark. Mat. Astron. Fys., vol. 20, no. 4, pp. 1 – 5, 1927.
3. С. Н. Мергелян, "Равномерные приближения функций комплексного переменного," Успехи мат. наук, том 7, №2 (48), стр. 31 – 122, 1952.
4. N. U. Arakelian, "Approximation complexe et proprietes des functions analytiques," Actes Congres Internat. Math., t. 2, pp. 595 – 600, Nice, 1970; Gauthier - Villars, Paris, 1971.
5. A. Beurling, P. Malliavin, "On the closure of characters and the zeros of entire functions," Acta Math., vol. 118, pp. 79 – 93, 1967.
6. J. A. Siddiqi, "Approximation polynomiale sur un arc dans le plan complexe," Comp. rend. Acad. sci., vol. 277, no. 15, pp. 731 – 733, 1973.
7. J. Korevaar, "Lacunary forms of Walsh' approximation theorems," Труды Межд. Конф. по Теории Приближения Функций, стр. 229 – 237, Калуга, 1975; Наука, Москва, 1977.
8. P. Malliavin, J. A. Siddiqi, "Classes de fonctions monogenes et approximation par des sommes d'exponentielles sur un arc rectifiable de **C**," Compt. rend. Acad. sci., vol. 282, no. 18, pp. 1091 – 1094, 1976.
9. J. Korevaar, "Müntz approximation on arcs and Macintyre exponents," Lect. Notes Math., vol. 747, pp. 205 – 218, 1979.
10. J. Korevaar, R. Zeinstra, "Transformees de Laplase pour les courbles a pent bornee et un resultat correspondand du type Müntz–Szasz," Compt. rend Acad. sci., vol. 301, no. 14, pp. 695 – 698, 1985.
11. Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, "Равномерные приближения на комплексной плоскости многочленами с пропусками," ДАН СССР, том 235, №2, стр. 249 – 252, 1977.
12. В. А. Мартиросян, "О равномерном комплексном приближении многочленами с пропусками," Мат. сборник, том 120 (162), №4, стр. 451 – 472, 1983.
13. Л. Бибербах, Аналитическое Продолжение, М., Наука, 1967.
14. А. Ф. Леонтьев, Последовательности Полиномов из Экспонент, М.,Наука, 1980.
15. Д. Гайер, Лекции по Теории Аппроксимации в Комплексной Области, М., Мир, 1986.

10 Июня 1993

Институт математики
НАН Армении
Ереванский госуниверситет