СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ТИПА СОБОЛЕВА

Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №3, 1993

В работе исследована разрешимость смешанной задачи для некоторого класса вырождающихся квазилинейных систем уравнений с частными производными третьего порядка. Не исключается зависимость коэффициентов от пространственных переменных. Доказано существование и единственность решения смешанной задачи в подходящих функциональных пространствах доказана при некоторых условиях, налагаемых на главный символ оператора и младшие члены (условия типа Леви), связанных с вырождением на границе.

1. Пусть Ω - ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, принадлежащая полупространству $\mathbb{R}^n_+ = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+,\ x_n > 0\right\}$. Предположим, что $\Gamma \cap \{x_n = 0\} \neq \emptyset$.

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial t} L\mathbf{u}(t,x) + M\mathbf{u}(t,x) = 0 \tag{1}$$

в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$, а операторы L и M задаются следующим образом :

$$L\mathbf{u} \equiv -\sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(B_{ij}(x)\,\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_n}\left(B_{nn}(x)\,\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}\right) + c(x)\,\mathbf{u},$$

$$M\mathbf{u} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{1j}(x,\nabla u_1), a_{2j}(x,\nabla u_2), \ldots, a_{Nj}(x,\nabla u_N)\right)^{tr},$$

где $\mathbf{u}(t,x) = (u_1(t,x), \ldots, u_N(t,x))$, а оператор $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

Выделение в представлении для оператора L слагаемого, содержащего дифференцирование в направлении $\frac{\partial}{\partial x_n}$, обусловлено тем обстоятельством, что допускается вырождение на гиперплоскости $x_n = 0$. Как будет установлено ниже постановка начально-красвой задачи для уравнения (1) будет тесно связана с характером вырождения.

2. Предполагается выполнение следующих условий :

a) Матрицы $B_{ij}(x)(i,j=1,2,\dots n-1)$ и B_{nn} (порядка $N\times N$) симметричны, их элементы непрерывны в $\overline{\Omega}$ и $B_{ij}=B_{ji}$ для любых $i,j=1,2,\dots,n-1$. Матрица $C(x)$ неотрицательна при любом $x\in\overline{\Omega}$.

b) Для любых вещественных векторов $\xi^1,\xi^2,\dots,\xi^n$ ($\xi^k=(\xi_1^k,\dots,\xi_N^k)$, $k==1,2,\dots,n$) таких, что $\sum_{i=1}^n|\xi^i|^2\neq 0$ и любого $x\in\overline{\Omega}$ справедливо неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n-1}(B_{ij}(x)\xi^i,\xi^j)+(B_{nn}(x)\xi^n,\xi^n)\geq\sum_{i=1}^{n}(\alpha^i(x)\xi^i,\xi^i)\,, \tag{2}$$

где $(.,.)$ - скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$; $\alpha^i(x)$ - некоторая матрица вида

$$\alpha^i(x)=\begin{pmatrix}\alpha_{11}^i(x) & 0 & \dots & 0\\ 0 & \alpha_{22}^i(x) & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{NN}^i(x)\end{pmatrix} \tag{3}$$

с непрерывными в $\overline{\Omega}$ элементами $\alpha_{kk}^i(x)$ ($i=1,2,\dots,n$; $k=1,2,\dots,N$) и существует постоянная $c_0>0$ такая, что $\alpha_{kk}^i(x)\geq c_0>0$, при $i=1,\dots,n-1$; $k=1,2,\dots,N$. Предполагается, что существуют показатели $m_r\geq 0$ ($r=1,2,\dots,N$) такие, что справедливы неравенства

$$\gamma_1\leq x_n^{-m_r}\,\alpha_{rr}^n(x)\leq\gamma_2,\quad r=1,2,\dots,N \tag{4}$$

с некоторыми константами $\gamma_1>0,\gamma_2>0$.

c) Функции $a_{kj}(x,\xi)$, $k=1,2,\dots,N$, $j=1,2,\dots,n$, определяющие оператор M, предполагаются вещественными и принадлежащими пространству $C^2(\overline{\Omega}\times\times\mathbb{R}^n)$. Обозначим далее

$$A_j=\begin{pmatrix}a_{1j} & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_{2j} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_{Nj}\end{pmatrix},\quad j=1,2,\dots,n,$$

$$J(x;\xi^1,\dots,\xi^n)\stackrel{def}{=\!=}\sum_{i,j=1}^{n-1}(B_{ij}(x)\xi^i,\xi^j)+(B_{nn}(x)\xi^n,\xi^n)$$

и предположим, что для любых векторов $\xi^1,\dots,\xi^n;\eta^1,\dots,\eta^n$, принадлежащих $\mathbb{R}^n$ и любого $x\in\overline{\Omega}$ справедливы следующие неравенства :

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n}(A_j(x,\xi^1,\dots,\xi^n)\xi^j,1)\geq c_1\,J(x,\xi^1,\dots,\xi^n),\\ \sum_{j=1}^{n}(A_j(x,\xi^1,\dots,\xi^n)\eta^j,1)\leq c_2\,J^{1/2}(x,\xi^1,\dots,\xi^n)\,J^{1/2}(x,\eta^1,\dots,\eta^n),\end{gathered} \tag{5}$$

$$c_1' J(x,\xi^1,...,\xi^n) \le \sum_{j=1}^{n} \left(A_j^i(x,\xi^1,...,\xi^n)\xi^i,\xi^j\right) \le c_2' J(x,\xi^1,...,\xi^n), \tag{6}$$

где c_1, c_2, c_1', c_2' - положительные постоянные, а A_j^i матрицы вида

$$A_j^i = \begin{pmatrix} a_{1j}^i & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{2j}^i & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{Nj}^i \end{pmatrix},$$

элементы которых

$$a_{kj}^i(x,\tau^k) = \frac{\partial a_{kj}(x,\tau^k)}{\partial \tau_i^k}, \quad \tau^k = (\tau_1^k, ..., \tau_n^k).$$

Условие b) характеризует степень вырождения оператора L. Точнее, неравенство (2) - это условие сильной эллиптичности оператора L в области $\Omega_\delta = \Omega \times \{x_n > \delta\}$ ($\delta > 0$ - любое), а оценка (4) свидетельствует о том, что L допускает вырождение на части $\Gamma_0 = \Gamma \cap \{x_n = 0\}$ границы Γ. Условие c) естественно для задач с вырождением.

3. Постановка краевой задачи.

Представим границу Γ области Ω в виде

$$\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma_0, \quad \Gamma' \subset \mathbb{R}^n_+.$$

Обозначим, далее

$$\Gamma_l \overset{def}{=\!=} \begin{cases} \Gamma', & \text{при} \quad 1 \le m_l < 2 \\ \Gamma, & \text{при} \quad 0 \le m_l < 1, \end{cases} \qquad l = 1, 2, ..., N. \tag{7}$$

Для системы дифференциальных уравнений (1) рассмотрим следующую начально-краевую задачу :

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^0(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{8}$$

$$u_l|_{\Gamma_l} = 0, \quad t \ge 0, \ l = 1, 2, ..., N. \tag{9}$$

Функциональные пространства, в которых изучается поставленная задача, будут введены ниже. Основной результат, полученный в статье, - теорема существования и единственности.

Впервые задача (1), (8), (9) в том частном случае, когда оператор $L = -\Delta$ (Δ - трехмерный оператор Лапласа), $M = \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, была рассмотрена С. Л. Соболевым (см. [1]), в связи с исследованиями, посвященными изучению малых колебаний вращающейся идеальной жидкости. Дальнейшие обобщения содержатся в работах [2]-[6], подробную библиографию по этому вопросу можно найти в [7].

4. Введем необходимые обозначения и функциональные пространства. Пусть $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ - пространство векторнозначных бесконечно дифференцируемых финитных функций $\varphi = (\varphi_1(x), ..., \varphi_N(x))$, определенных на Ω.

Обозначим через $\mathbf{L}_2(\Omega)$ гильбертово пространство N-мерных вещественнозначных вектор-функций $\mathbf{u}(x) = (u_1(x), ..., u_N(x))$ с компонентами $u_i \in L_2(\Omega)$, $i = 1, 2, ..., N$, со скалярным произведением

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_0 = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_i(x)\, v_i(x)\, dx$$

и нормой

$$||\mathbf{u}||_0 = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_0}.$$

Опишем функциональное пространство, в котором будет действовать оператор, порожденный задачей (1), (8),(9). Заметим вначале, что оператор L определен на всюду плотном в пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega)$ множестве $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$.

Лемма 1. *Оператор L симметричен и положительно определен.*

Доказательство. Симметричность оператора L на $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ очевидна, поскольку для произвольных $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$, пользуясь формулой интегрирования по частям, имеем

$$(L\mathbf{u}, \mathbf{v})_0 = (\mathbf{u}, L\mathbf{v})_0. \tag{10}$$

Докажем положительную определенность оператора L. Рассмотрим скалярное произведение $(L\mathbf{u}, \mathbf{u})_0$, $\mathbf{u} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$. В силу (2), (3) и условия неотрицательной определенности матрицы $C(x)$, имеем

$$\begin{gathered}(L\mathbf{u},\mathbf{u})_0=\int_\Omega\left(-\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(B_{ij}(x)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_j}\right)-\frac{\partial}{\partial x_n}\left(B_{nn}(x)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_n}\right)+\right.\\ \left.+(C(x)\mathbf{u},\mathbf{u})\right)dx=\int_\Omega\left[-\sum_{i,j=1}^{n-1}\left(B_{ij}(x)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_j},\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i}\right)+\left(B_{nn}(x)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_n},\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_n}\right)+\right.\\ \left.+(C(x)\mathbf{u},\mathbf{u})\right]dx\ge\ge\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha^i(x)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i},\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i}\right)dx\ge\\ \ge\int_\Omega\left(\alpha^1(x)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1},\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1}\right)dx\ge\int_\Omega\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial u_N}{\partial x_1}\right)^2\right]dx.\end{gathered}\tag{11}$$

Неравенство Фридрихса, примененное к правой части (11), немедленно приводит к нужной оценке

$$(L\mathbf{u},\mathbf{u})_0\ge c\|\mathbf{u}\|_0^2\tag{12}$$

с некоторой константой $c>0$ (здесь и далее буквой c будут обозначаться различные постоянные).

Лемма доказана.

Далее, обозначим через H_L гильбертово пространство, определяемое как замыкание линейного многообразия $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$, в норме

$$\|\mathbf{u}\|_{H_L}=\sqrt{[\mathbf{u},\mathbf{u}]},$$

порожденной скалярным произведением

$$\begin{gathered}[\mathbf{u},\mathbf{v}]=(L\mathbf{u},\mathbf{v})_0=\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^{n-1}\left(B_{ij}(x)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i},\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_j}\right)+\right.\\ \left.+\left(B_{nn}(x)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_n},\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_n}\right)+(C(x)\mathbf{u},\mathbf{v})\right]dx.\end{gathered}\tag{13}$$

Из оценки (12) следует вложение $H_L\subset\mathbf{L}_2(\Omega)$.

Замечание. В силу сильной эллиптичности оператора E в подобластях Ω_δ, $\delta>0$, норма $\|\cdot\|_{H_L}$ эквивалентна интегралу Дирихле, и, стало быть, в соответствии с теоремой вложения Соболева, вектор-функции пространства H_L исчезают на части $\Gamma_\delta=\Gamma'\cap\{x_n>\delta\}$ границы Г. Это обстоятельство диктует соответствующую постановку начально-краевой задачи.

Приводимая ниже лемма уточняет структуру пространства H_L.

Лемма 2. *Пусть* $0 \le m_r < 1$, *тогда r-тая компонента* u_r *вектора* $\mathbf{u} \in H_L$ *обращается в нуль на всей границе* Γ.

Доказательство. Пусть $\mathbf{u}(x) \in H_L$ - предел последовательности $\{\mathbf{u}^{(m)}(x)\}_{m=1}^{\infty}$, $\mathbf{u}^{(m)} \in \mathbf{C}_0^{\infty}(\Omega)$ в том смысле, что

$$||\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}||_{H_L} \to 0, \quad m \to \infty.$$

Оценим

$$||\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(k)}||_{H_L}^2 \ge \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} \left(B_{ij}(x) \frac{\partial(\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(k)})}{\partial x_i}, \frac{\partial(\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(k)})}{\partial x_j} \right) + \left(B_{nn}(x) \frac{\partial(\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(k)})}{\partial x_n}, \frac{\partial(\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(k)})}{\partial x_n} \right) \right] dx.$$

В силу неравенства (2) имеем

$$||\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(k)}||_{H_L}^2 \ge \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha^i(x) \frac{\partial(\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(k)})}{\partial x_i}, \frac{\partial(\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(k)})}{\partial x_i} \right) dx \ge$$
$$\ge \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{rr}^i(x) \left| \frac{\partial(u_r^{(m)} - u_r^{(k)})}{\partial x_i} \right|^2 \right) dx.$$

Последовательность $\{u^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ фундаментальна в H_L. Поэтому, из последней оценки следует, что

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{rr}^i \left| \frac{\partial u_r^{(m)}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial x_i} \right|^2 dx \to 0, \quad m, k \to \infty. \tag{14}$$

Введем в рассмотрение оператор L_r, заданный на всюду плотном подмножестве $C_0^{\infty}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$, по формуле

$$L_r u = - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_{rr}^i(x)(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

Проведя рассуждения, используемые при доказательстве Леммы 1, легко установить симметричность и положительную определенность оператора L_r.

Введем энергетическое скалярное произведение по формуле

$$[u, v] = (L_r u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{rr}^i(x)(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

для любых $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Замкнув множество $C_0^\infty(\Omega)$ в энергетической норме, порожденной скалярным произведением $[\cdot,\cdot]$, придем к гильбертову пространству H_{L_r}.

Из (14) следует, что последовательность $\{u_r^{(m)}\}$ фундаментальна в пространстве H_{L_r}, и поскольку $m_r < 1$, то предельная функция u_r исчезает на Γ (см. [6]). Лемма 2 доказана.

Как известно, симметрический и положительно определенный оператор L, заданный на $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$, допускает фридрихсовское расширение до самосопряженного оператора, определенного на H_L.

Расширенный таким образом оператор вновь обозначим через L. Он гомеоморфно отображает пространство H_L на $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Следовательно, существует ограниченный обратный к L оператор L^{-1}, отображающий $\mathbf{L}_2(\Omega)$ на пространство H_L.

Применяя к обеим частям уравнения (1) оператор L^{-1}, получим эквивалентное ему уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{A}\mathbf{u} = 0 \tag{*}$$

с оператором $\mathcal{A} = L^{-1}M$, определенным на линейном многообразии $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$.

Опишем область определения замыкания оператора $\mathcal{A}$.

Лемма 3. *Область определения замыкания оператора $\mathcal{A}$ совпадает с пространством H_L.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{u} \in H_L$ и последовательность $\{\mathbf{u}^{(m)}\}_{m=1}^\infty$, $\mathbf{u}^{(m)} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$, $\|\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}\|_{H_L} \to 0$, при $m \to \infty$. Для любого $\mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned}\left[\mathcal{A}\mathbf{u}^{(m)}, \mathbf{v}\right] &= \int_\Omega \left(LL^{-1}M\mathbf{u}^{(m)}, \mathbf{v}\right) dx = \int_\Omega \left(M\mathbf{u}^{(m)}, \mathbf{v}\right) dx = \\ &= \int_\Omega \sum_{j=1}^n \left(\begin{pmatrix} a_{1j}(x, \nabla u_1^{(m)}) \\ \dots\dots\dots \\ a_{Nj}(x, \nabla u_N^{(m)}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \\ \dots \\ \frac{\partial v_N}{\partial x_j} \end{pmatrix} \right) dx = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N \int_\Omega a_{kj}(x, \nabla u_k^{(m)}) \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\, dx.\end{aligned} \tag{15}$$

Оценим разность

$$\left| \left[\mathcal{A}\mathbf{u}^{(m)}, \mathbf{v}\right] - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N \int_\Omega a_{kj}(x, \nabla u_k) \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\, dx \right| =$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega \left\{ a_{kj}(x, \nabla u_k^{(m)}) - a_{kj}(x, \nabla u_k) \right\} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\, dx \right| =$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{kj}(x, \nabla u_k + t(\nabla u_k^{(m)} - \nabla u_k))}{\partial \xi_i^k} \left(\frac{\partial u_k^{(m)}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\, dt\, dx \right| = \left| \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega \int_0^1 a_{kj}^i \cdot \left(\frac{\partial u_k^{(m)}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\, dt\, dx \right| =$$

$$= \left| \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \int_0^1 \left(A_j^i \frac{\partial(\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u})}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) dt\, dx \right| \le \tag{16}$$

$$\le \int_\Omega \int_0^1 \left| \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_j^i \frac{\partial \mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \right| dt\, dx.$$

Из условия (5) и последнего неравенства имеем оценку

$$\left| \left[A\mathbf{u}^{(m)}, \mathbf{v} \right] - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega a_{kj}(x, \nabla u_k) \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\, dx \right| \le$$

$$\le c \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} \left(B_{ij}(x) \frac{\partial(\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u})}{\partial x_i}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} \right) + \left(B_{nn}(x) \frac{\partial(\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u})}{\partial x_n}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_n} \right) dx \right] =$$

$$= c \left\{ [\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}, \mathbf{v}] - \int_\Omega \left(C(x) (\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) dx \right\} \tag{17}$$

для любого $\mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ с некоторой константой $c > 0$.

Докажем, что правая часть неравенства (17) сходится к нулю при $m \to \infty$. Действительно

$$\lim_{m \to \infty} [\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}, \mathbf{v}] = 0, \tag{18}$$

поскольку последовательность $\{\mathbf{u}^{(m)}\}_1^\infty$ сильно сходится к $\mathbf{u}$ в пространстве H_L. Имеем

$$\left| \int_\Omega \left(C(x) (\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}), \mathbf{v} \right) dx \right| \le c' ||\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}||_0\ ||\mathbf{v}||_0 \le c'' ||\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}||_{H_L} \cdot ||\mathbf{v}||_0$$

где $c' > 0$, $c'' > 0$ - некоторые постоянные. Следовательно

$$\lim_{m \to \infty} \int_\Omega \left(C(x) (\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}), \mathbf{v} \right) dx = 0. \tag{19}$$

Возвращаясь к неравенству (17), с учетом (18) и (19), заключаем, что последовательность $\{A\mathbf{u}^{(m)}\}_1^\infty$ имеет слабый предел в пространстве H_L. В силу его единственности, мы можем продолжить оператор A с $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ на пространство H_L, положив для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_L$

$$[A\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega a_{kj}(x, \nabla u_k) \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \, dx. \tag{20}$$

Лемма 3 доказана.

5. В этом пункте будет установлен основной результат статьи - однозначная разрешимость задачи (*) – (8), к которой редуцируется задача (1), (8), (9) (см. пункт 4).

Доказательство опирается на известный "метод монотонности"(см. [8], [9]).

Перед формулировкой нашего основного результата приведем необходимые определения и одну общую теорему, доказанную в [10].

Пусть оператор A (вообще говоря, линейный) действует из сепарабельного рефлексивного пространства X в пространство X^* линейных непрерывных функционалов над X.

Определение 1. Оператор A называется ***монотонным***, если для любых $u, v \in X$ имеет место неравенство

$$< Au - Av, u - v > \geq 0. \tag{21}$$

Определение 2. Оператор A называется ***полунепрерывным***, если он всякую сильно сходящуюся последовательность в X переводит в слабо сходящуюся последовательность в X^*.

Определение 3. Оператор A называется ***ограниченным***, если образ всякого ограниченного множества из X является ограниченным множеством в пространстве X^*.

Обозначим через $L_p(0, T; X)$, $(p > 1)$ пространство функций $\mathbf{u}(t)$: $[0, T] \to X$, с нормой

$$||u|| = \left(\int_0^T ||u(t)||_X^p \, dx \right)^{1/p},$$

где $||\cdot||_X$ - норма банахова пространства X.

Пусть, далее, $A(t,u)$ - монотонный оператор, зависящий от параметра $t \in [0,T]$, действующий из $L_p(0,T;X)$ в сопряженное пространство $L_{p'}(0,T;X^*)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=$ $=1$.

Рассмотрим следующую задачу :

$$Lu = u' + A(t,u) = h, \tag{22}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \tag{23}$$

где $h(t)$ - произвольно заданный элемент пространства $L_{p'}(0,T;X^*)$.

Обозначим, наконец, через $H(u_0)$ пространство функций $u(t) \in L_p(0,T;X)$ таких, что $u' \in L_{p'}(0,T;X)$, $u(0)=u_0$, $u_0 \in X$.

Теорема А. *([10], Теорема 13). Пусть выполнены следующие условия :*

1. Для почти всех $t \in [0,T]$ и любого $u \in L_p(0,T;X)$ справедливо неравенство

$$< A(t,u), u > \geq c_0 ||u||^p_X - k(t)$$

с некоторой постоянной $c_0 > 0$, $k(t)$ - ограниченная функция.

2. Оператор $A(t,u)$: $L_p(0,T;X) \to L_{p'}(0,T;X^*)$ ограничен и полунепрерывен.

Тогда отображение L: $H(u_0) \to L_{p'}(0,T;X)$ есть эпиморфизм, иными словами, для любого $h \in L_{p'}(0,T;X^*)$ задача (22), (23) разрешима.

Теорема 1. *Оператор $\mathcal{A}$, действующий в пространстве H_L, является монотонным, ограниченным и полунепрерывным, при этом справедлива оценка*

$$[\mathcal{A}\mathbf{u},\mathbf{u}] \geq c\,||\mathbf{u}||^2_{H_L}, \tag{24}$$

где $c > 0$ - некоторая постоянная.

Доказательство. Для произвольных $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ оценим

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{A}\mathbf{u}-\mathcal{A}\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}] = \int_\Omega (M\mathbf{u}-M\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v})\,dx = \\
&= \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^N \int_\Omega [a_{kj}(x,\nabla u_k) - a_{kj}(x,\nabla v_k)]\,\frac{\partial}{\partial x_j}(u_k-v_k)\,dx = \\
&= \int_0^1\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \left(A^i_j(x,\nabla v_k + t(\nabla u_k - \nabla v_k))\right)\left(\frac{\partial(\mathbf{u}-\mathbf{v})}{\partial x_i}\,\frac{\partial(\mathbf{u}-\mathbf{v})}{\partial x_j}\right)dx\,dt \geq \\
&c_1'\int_\Omega J\left(x,\frac{\partial(\mathbf{u}-\mathbf{v})}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial(\mathbf{u}-\mathbf{v})}{\partial x_n}\right)dx,
\end{aligned} \tag{25}$$

где мы воспользовались гладкостью функций $a_{kj}(x,\tau^k)$ и условием (6).

Заметим, далее, что

$$\|\mathbf{u}\|_0^2 \le c\int_\Omega J(x,\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_n})\,dx, \tag{26}$$

где $c>0$ - некоторая постоянная. Действительно, имеем в силу (2)

$$\|\mathbf{u}\|_0^2 \le \kappa\int_\Omega\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right|^2 dx \le \kappa_1\int_\Omega\sum_{i=1}^n(\alpha^i(x)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i},\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i})\,dx \le$$
$$\le \kappa_2\int_\Omega J(x,\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_n})\,dx,$$

где κ, κ_1, κ_2 - некоторые положительные постоянные.

Из (26) следует, что

$$\|\mathbf{u}\|_{H_L}^2 \le c\int_\Omega J(x,\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_n})\,dx. \tag{27}$$

Возвращаясь к неравенству (25), с учетом (27) получаем оценку

$$[\mathcal{A}\mathbf{u}-\mathcal{A}\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}] \ge c\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{H_L}^2. \tag{28}$$

Пусть теперь $\mathbf{u},\mathbf{v}\in H_L$ и $\{\mathbf{u}^{(k)}\}_{k=1}^\infty, \{\mathbf{v}^{(k)}\}_{k=1}^\infty$, где $\mathbf{u}^{(k)}$, $\mathbf{v}^{(k)}\in\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ - последовательности такие, что

$$\|\mathbf{u}^{(k)}-\mathbf{u}\|_{H_L}\underset{k\to\infty}{\rightarrow}0,\quad \|\mathbf{v}^{(k)}-\mathbf{v}\|_{H_L}\underset{k\to\infty}{\rightarrow}0. \tag{29}$$

Имеем, в силу (28)

$$\left[\mathcal{A}\mathbf{u}^{(k)}-\mathcal{A}\mathbf{v}^{(k)},\mathbf{u}-\mathbf{v}\right] = \left[\mathcal{A}\mathbf{u}^{(k)}-\mathcal{A}\mathbf{v}^{(k)},\mathbf{u}-\mathbf{u}^{(k)}\right] +$$
$$+\left[\mathcal{A}\mathbf{u}^{(k)}-\mathcal{A}\mathbf{v}^{(k)},\mathbf{u}^{(k)}-\mathbf{v}^{(k)}\right] + \left[\mathcal{A}\mathbf{u}^{(k)}-\mathcal{A}\mathbf{v}^{(k)},\mathbf{v}^{(k)}-\mathbf{v}\right] \ge$$
$$\ge\left[\mathcal{A}\mathbf{u}^{(k)}-\mathcal{A}\mathbf{v}^{(k)},\mathbf{u}-\mathbf{u}^{(k)}\right] + \left[\mathcal{A}\mathbf{u}^{(k)}-\mathcal{A}\mathbf{v}^{(k)},\mathbf{v}^{(k)}-\mathbf{v}\right] + c\|\mathbf{u}^{(k)}-\mathbf{v}^{(k)}\|_{H_L}^2. \tag{30}$$

Заметим, что в силу Леммы 3, последовательности $\{\mathcal{A}\mathbf{u}^{(k)}\}$, $\{\mathcal{A}\mathbf{v}^{(k)}\}$ ограничены (они сходятся в пространстве H_L). Отсюда, учитывая (29), получаем

$$\left|\left[\mathcal{A}\mathbf{u}^{(k)}-\mathcal{A}\mathbf{v}^{(k)},\mathbf{u}-\mathbf{u}^{(k)}\right]\right| \le c\|\mathbf{u}-\mathbf{u}^{(k)}\|_{H_L}\underset{k\to\infty}{\rightarrow}0. \tag{31}$$

Аналогично

$$\lim_{k\to\infty}\left[\mathcal{A}\mathbf{u}^{(k)}-\mathcal{A}\mathbf{v}^{(k)},\mathbf{v}^{(k)}-\mathbf{v}\right]=0. \tag{32}$$

Возвращаясь к неравенству (30), в силу (31), (32) получаем, что (для достаточно больших k)

$$\left[\mathcal{A}\mathbf{u}^{(k)} - \mathcal{A}\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\right] \geq 0,$$

откуда в пределе имеем

$$[\mathcal{A}\mathbf{u} - \mathcal{A}v, \mathbf{u}-\mathbf{v}] \geq 0, \tag{33}$$

и монотонность оператора $\mathcal{A}$ установлена.

Пусть B - произвольное ограниченное множество в H_L :

$$B = \{\mathbf{u}: \quad \mathbf{u} \in H_L, \ ||\mathbf{u}||_{H_L} \leq R < \infty\}.$$

Рассмотрим функционал

$$[\mathcal{A}\mathbf{u}^0, \mathbf{v}] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N} \int_\Omega a_{kj}(x, \nabla u_k^0)\, \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\,, dx$$

$\mathbf{u}^0 \in B$ и $\mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$.

В силу (20) и условия (5) имеем

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}\mathbf{u}^0, \mathbf{v}] &= \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \left(A_j\left(x, \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_n}\right) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j}, 1\right) dx \leq \\
&\leq c_2 \left(\int_\Omega J\left(x, \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_n}\right) dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega J\left(x, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_n}\right) dx\right)^{1/2} \leq \\
&\leq c||\mathbf{u}^0||_{H_L} \cdot ||\mathbf{v}||_{H_L} \leq cR||\mathbf{v}||_{H_L}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Следовательно

$$||\mathcal{A}\mathbf{u}^0||_{H_L} \leq cR, \quad \forall \mathbf{u}^0 \in B,$$

т.е. оператор $\mathcal{A}$ ограничен.

В силу Леммы 3 для любого $\mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ и произвольной последовательности $\{\mathbf{u}^{(m)}\}_{m=1}^\infty$, $\mathbf{u}^{(m)} \in H_L$ такой, что

$$||\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}||_{H_L} \to 0 \quad \text{при} \ . \ m \to \infty,$$

имеем

$$\left[\mathcal{A}\mathbf{u}^{(m)}, \mathbf{v}\right] \to [\mathcal{A}, \mathbf{v}] \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

а это означает, что оператор $\mathcal{A}$ полунепрерывен.

Наконец, докажем оценку (24).

В силу условия (5) и оценки (27), для $\mathbf{u} \in H_L$ имеем

$$[\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \sum_{j=1}^{n} \left(A_j \left(x, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n} \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}, 1 \right) dx \geq$$

$$\geq c_1 \int_\Omega J \left(x, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n} \right) dx \geq c \|\mathbf{u}\|^2_{H_L}$$

с постоянной $c > 0$. Теорема доказана.

Пусть банахово пространство $X = H_L$. Рассмотрим гильбертово пространство $L_2(0, T; H_L)$ вектор-функций $\mathbf{u}(t, x)$, заданных в цилиндре Q_T со скалярным произведением

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \int_0^T [\mathbf{u}, \mathbf{v}]\, dt. \tag{35}$$

$|\cdot|$ обозначает норму, порожденную скалярным произведением (35).

Теорема 2. *Для любого $\mathbf{u}^0 \in H_L$ задача (*), (8) разрешима в пространстве $L_2(0, T; H_L)$.*

Доказательство. Из неравенства (33) имеем для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L_2(0, T; H_L)$

$$\{\mathcal{A}\mathbf{u} - \mathcal{A}\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\} \geq 0,$$

следовательно, оператор $\mathcal{A}$ монотонный. Далее, пусть B - ограниченное подмножество в $L_2(0, T; H_L)$. Тогда для любого $\mathbf{u} \in B$ и любого $t \in [0, T]$, в силу (34), имеем

$$\|\mathcal{A}\mathbf{u}\|_{H_L} \leq c$$

с некоторой постоянной $c > 0$. Из последней оценки следует, что

$$|\mathcal{A}\mathbf{u}| \leq cT < \infty,$$

т.е. оператор $\mathcal{A}$ ограничен в $L_2(0, T; H_L)$. Полунепрерывность оператора $\mathcal{A}$ очевидным образом следует из Теоремы 1.

Таким образом, оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет всем условиям Теоремы А, откуда вытекает, что для любого $\mathbf{u}^0 \in H_L$ в $L_2(0, T; H_L)$ существует по крайней мере одно решение задачи (*), (8). Теорема доказана.

Теорема 3. *Для любых начальных данных* $\mathbf{u}^0 \in H_L$ *решение задачи (*), (8) единственно в пространстве* $L_2(0, T; H_L)$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2 \in L_2(0, T; H_L)$ - два решения одной и той же задачи (*), (8). Тогда их разность $\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2) + \mathcal{A}\mathbf{u}^1 - \mathcal{A}\mathbf{u}^2 = 0.$$

Умножая обе части последнего тождества скалярно в H_L на $\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2$ и интегрируя по $t \in [0, \tau]$, $0 < \tau \leq T$, получим

$$\int_0^\tau \left[\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2), \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\right] dt + \int_0^\tau \left[\mathcal{A}\mathbf{u}^1 - \mathcal{A}\mathbf{u}^2, \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\right] dt = 0.$$

В силу монотонности оператора $\mathcal{A}$ отсюда следует оценка

$$\int_0^\tau \left[\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2), \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\right] dt \leq 0.$$

Следовательно

$$\frac{1}{2}\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t}||\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2||^2_{H_L}\, dt \leq 0.$$

Учитывая теперь, что $(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2)\big|_{t=0} = 0$, получаем

$$||\mathbf{u}^1(\tau, x) - \mathbf{u}^2(\tau, x)||_{H_L} = 0.$$

В силу произвольности τ заключаем, что $\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^2$ в цилиндре Q_T.

Теорема доказана.

ABSTRACT. The solvability of the mixed problem for a class of Sobolev type degenerate quasilinear systems of partial differential equations of third order is studied. Dependence of on space variables is not excluded. The exictence and uniqueness of solutions of mixed problems in suitable functional spaces is proved under certain conditions concerning the principal symbols of the operators and the lower terms (Levi type conditions) connected with the degeneration on the boundary.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Л. Соболев, "Об одной новой задаче математической физики," Изв. АН СССР, Математика, том 18, стр. 3 – 50, 1954.
2. Р. А. Александрян, "Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа Соболева," Труды ММО, том 9, стр. 455 – 505, 1960.

3. С. А. Гальперн, "Задача Коши для общих систем линейных уравнений," Труды ММО, том 9, стр. 401 – 423, 1960.

4. М. И. Вишик, "Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения," Мат. сборник, том 39, №1, стр. 51 – 148, 1956.

5. R. E. Showalter, "Existence and representation theorems for a semilinear Sobolev equation in Banach space," SIAM J. Math. Anal., vol. 3, no. 3, pp. 527 – 543, August 1972.

6. Г. С. Акопян, "О начально-краевых задачах для вырождающихся уравнений типа Соболева," Ученые зап. ЕГУ, №1 (161), стр. 20 – 26, 1986.

7. R. A. Aleksandrian, Ju. M. Berezanskii, V. A. Il'in, A. G. Kostjučenko, "Some questions in spectral theory for partial differential equations," Amer. Math. Soc. Transl., vol. 105 (2), 1976.

8. Ж.- Л. Лионс, Некоторые Методы Решения Нелинейных Краевых Задач, М., Мир, 1972.

9. А. В. Бабин, М. И. Вишик, Аттракторы Эволюционных Уравнений, М., Наука, 1989.

10. Ю. А. Дубинский, "Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка," Усп. мат. наук, том 23, №1(123), стр. 45 – 90, 1968.

23 Июня 1993

Республика Армения
Межвузовский научный центр
по прикладным проблемам математики
Ереванский государственный университет