О СХОДИМОСТИ И ЯВЛЕНИИ ГИББСА КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИИ

О. Г. Саргсян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №3, 1993

В работе доказываются теоремы о сходимости кратных рядов Фурье непрерывных функций нескольких переменных ограниченной гармонической вариации. Рассматривается также явление Гиббса для кратных рядов Фурье.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $g(t)$ - 2π-периодическая, интегрируемая на $[-\pi,\pi]$ функция и

$$a_0(g)+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(g)\cos nt+b_n(g)\sin nt \tag{1}$$

- ряд Фурье функции $g(t)$. Хорошо известна следующая теорема (см. [1], стр. 121).

Теорема А. *Если $g(t)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-\pi,\pi]$, то*

а) в каждой точке $t\in[-\pi,\pi]$ ряд (1) сходится к $\frac{1}{2}[g(t-0)+g(t+0)]$;

b) если, кроме того, $g(t)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[a,b]\subset\subset[-\pi,\pi]$, то ряд (1) сходится к $g(t)$ равномерно на $[a,b]$.

Эта теорема обобщалась в различных направлениях (см. [2 – 7]).

Д. Ватерман (см. [8]) распространил этот результат на класс функций ограниченной гармонической вариации HBV :

$$\mathrm{HBV}\equiv \mathrm{HBV}([-\pi,\pi])=\{g(t): V_H(g)\equiv V_H(g,[-\pi,\pi])=\sup\sum_n\frac{|g(I_n)|}{n}<\infty\},$$

где $g(I)=g(b)-g(a)$, если $I=(a,b)$, а supremum берется по всем системам $\{I_n\}_{n=1}^{n_0}$ попарно непересекающихся интервалов из $[-\pi,\pi]$. В [8] Д. Ватерман доказал следующую теорему :

Теорема B. *Для произвольной функции $g \in HBV$ справедливы утверждения a) и b) Теоремы A .*

В [9] Г. Харди определил класс H : функций двух переменных ограниченной вариации. Им был доказан аналог Теоремы A для функций из этого класса. Этот результат Г. Харди был обобщен Голубевым (см. [10]).

В [11] А. А. Саакян определил класс HBV функций двух переменных гармонической вариации и доказал аналог Теоремы B, обобщающий результат В. И. Голубова. Результаты Саакяна и настоящей работы будут сформулированы в следующем параграфе.

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $N = (N_1, ..., N_n)$, где N_k, $k = \overline{1, n}$ - неотрицательные целые числа и пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_k = \pm 1$, $k = \overline{1, n}$. Скажем, что последовательность $N = (N_1, ..., N_n)$ стремится к $+\infty$, если каждое $N_k \to +\infty$, и скажем, что последовательность $\{S_N\}$ сходится к пределу S, если для любого $\eta > 0$ имеем $|S_N - S| < \eta$, при условии, что все N_j достаточно велики. Пусть $\omega(x) = \max\{|x_i|, |x_i - x_j|, i, j = 1, 2, ..., n\}$ и $||A||_\omega = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\omega(Ax)}{\omega(x)}$ обозначают нормы вектора x и матрицы A.

Положим

$$\Delta_{\varepsilon_i}(x_i; h) = \left[x_i + \frac{\varepsilon_i h - |\varepsilon_i| h}{2}; x_i + \frac{\varepsilon_i h + |\varepsilon_i| h}{2}\right], \quad \varepsilon_i = \pm 1,$$

$$\Pi_\varepsilon(x; h) = \Delta_{\varepsilon_1}(x_1, h) \times \Delta_{\varepsilon_2}(x_2, h) \times ... \times \Delta_{\varepsilon_n}(x_n, h),$$

$$\Pi(x; h) = \bigcup_\varepsilon \Pi_\varepsilon(x; h).$$

Пусть E^0 - внутренность множества E, а $\partial I = \{a\} \cup \{b\}$, где I - либо (a, b), либо $[a, b]$.

Ниже всюду функцию $f(x)$ будем считать измеримой и 2π-периодической по каждой переменной x_i, $i = \overline{1, n}$.

Обозначим через $S_N(f, x)$ прямоугольную частичную сумму ряда Фурье функции $f(x) \in L^1([-\pi, \pi]^n)$:

$$S_N(f, x) = \sum_{m_1 = -N_1}^{N_1} ... \sum_{m_n = -N_n}^{N_n} c_{m_1, m_2, ..., m_n} \exp\left(i(m_1 x_1 + ... + m_n x_n)\right),$$

где

$$c_{m_1,\dots,m_n} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\dots\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\exp\left(-i(m_1x_1+\dots+m_nx_n)\right)dx_1\dots dx_n$$

- коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ называется точкой разрыва первого рода для функции $f(x)$, если существуют пределы

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in\Pi_\varepsilon^0(x^0,h)}} f(x) = d_\varepsilon(x^0).$$

Положим

$$d(x^0) = \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon} d_\varepsilon(x^0).$$

Точка x^0 называется точкой устранимого разрыва, если $d_\varepsilon(x^0) = d(x^0)$ для всех ε.

Скажем, что последовательность функций $\{f_N(x)\}$, определенных в окрестности точки x^0, равномерно сходится к пределу s в точке x^0, если для каждого $\eta > 0$ существуют $\delta = \delta(\eta)$ и $p = p(\eta)$ такие, что $|f_N(x)-s| < \eta$ при $\max\limits_{i=1,2,\dots,n}|x_i^0 - x_i| < \delta$ и $N_i > p$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $I^1 \subset (-\infty, +\infty)$ - интервал или отрезок с концами a^1 и b^1. Через $\Omega(I^1)$ обозначим множество всех конечных систем попарно непересекающихся интервалов $I_m^1 = (a_m^1, b_m^1)$, удовлетворяющих условию $[a_m^1, b_m^1] \subset I^1$.

Определим гармоническую вариацию для функции двух переменных $f(x_1, x_2)$. При фиксированном x_2^0 положим

$$f(I^1, x_2^0) = f(b^1, x_2^0) - f(a^1, x_2^0).$$

Обозначим

$$V_{x_1}(f(x_1, x_2^0), I^1) = \sup\sum_m \frac{|f(I_m^1, x_2^0)|}{m}.$$

Аналогично, при фиксированном x_1^0 определяются $f(x_1^0, I^1)$ и $V_{x_2}(f(x_1^0, x_2), I^1)$.

Положим также (I^2 - интервал или отрезок с концами a^2 и b^2)

$$f(I^1, I^2) = f(a^1, a^2) - f(a^1, b^2) - f(b^1, a^2) + f(b^1, b^2),$$

$$V_{x_1,x_2}(f, I^1 \times I^2) = \sup_{\substack{\{I^1_m\}\in\Omega(I^1) \\ \{I^2_k\}\in\Omega(I^2)}} \sum_{m,k} \frac{|f(I^1_m, I^2_k)|}{mk},$$

$$V_H(f, D_2) = V_{x_1,x_2}(f, I^1 \times I^2) + V_{x_1}(f(x_1, a^2), I^1) + V_{x_2}(f(a^1, x_2), I^2).$$

Скажем, что функция $f(x_1, x_2)$ имеет ограниченную гармоническую вариацию на прямоугольнике $D_2 = I^1 \times I^2 (f \in \mathrm{HBV}(D_2))$, если $V_H(f, D_2) < +\infty$.

Нам понадобятся следующие обозначения :

$$\hat{x}^0_n = x_1, x_2, ..., x_n; \ \hat{x}^i_n = x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n;$$

$$\hat{x}^i_n(a) = x_1, x_2, ..., x_{i-1}, a, x_{i+1}, ..., x_n;$$

$$D_n = I^1 \times I^2 \times ... \times I^n; D^i_n = I^1 \times ... \times I^{i-1} \times I^{i+1} \times ... \times I^n,$$

где I^j - интервал или отрезок в $(-\infty, +\infty)$ с концами a^j и b^j.

По индукции определим гармоническую вариацию и класс $\mathrm{HBV}(D_n)$ для функций n $(n \geq 3)$ переменных. Предположим, что для $k = n - 1$ определены гармоническая вариация и класс $\mathrm{HBV}(D_{n-1})$. Определим для $k = n$

$$V_{\hat{x}^0_n}(f(x), D_n) = \sup_{\substack{\{I^i_{k_i}\}\in\Omega(I^i) \\ i=1,2,...,n}} \sum_{k_1,k_2,...,k_n} \frac{|f(I^1_{k_1}, ..., I^n_{k_n})|}{k_1 \cdot k_2 \cdot ... \cdot k_n},$$

$$f(I^1_{k_1}, ..., I^n_{k_n}) = f(a^1_{k_1}, I^2_{k_2}, ..., I^n_{k_n}) - f(b^1_{k_1}, I^2_{k_2}, ..., I^n_{k_n}),$$

$$I^i_{k_i} = (a^i_{k_i}, b^i_{k_i}), [a^i_{k_i}, b^i_{k_i}] \subset I^i,$$

$$V_H(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} V_{\hat{x}^i_n}(f(\hat{x}^i_n(a^i)), D^i_n) + V_{\hat{x}^0_n}(f(x), D_n).$$

Скажем, что $f \in \mathrm{HBV}(D_n)$, если $V_H(f(x), D_n) < +\infty$.

Через HBV и $V_H(f)$ обозначим $\mathrm{HBV}([-\pi, \pi]^n)$ и $V_H(f; [-\pi, \pi]^n)$, соответственно.

Теорема С. *Если $f \in HBV$, то*

a) в каждой точке разрыва первого рода

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f, x) = d(x), \tag{2}$$

b) если, кроме того, $f(x)$ непрерывна на некотором открытом множестве E, то имеет место равенство (2) равномерно на каждом компакте $K \subset E$.

При $n = 2$ эта теорема доказана А. А. Саакяном [11], при $n \geq 3$ доказательство можно провести аналогично.

В настоящей работе будет усилена Теорема С и будут доказаны следующие теоремы :

Теорема 1. *Если $f \in HBV$ имеет устранимый разрыв в точке x^0, то последовательность прямоугольных частных сумм $S_N(f, x)$ равномерно сходится к $d(x^0)$ в точке x^0.*

Теорема 2. *Если $f \in HBV$, то*

a) в каждой точке разрыва первого рода имеет место равенство (2);

b) если, кроме того, $f(x)$ непрерывна в точках компакта K, то равенство (2) имеет место равномерно на K.

Опишем явление Гиббса. Сначала рассмотрим поведение частичных сумм $S_n(t)$ рядов (см. [12], стр. 105)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu t}{\nu} = \frac{1}{2}(\pi - t) = \varphi(t), \quad t \in (0, 2\pi)$$

в окрестности точки $t = 0$. Пусть $G(t) = \int_0^t \frac{\sin s}{s}\, ds$, $t > 0$, $G(0) = 0$. Напомним, что $G(t)$ непрерывна, $l = G(\pi) \geq G(t) > 0$ при $t > 0$, а $\frac{\pi}{2} = G(+\infty) = \lim_{t\to\infty} G(t) < G(\pi) < \pi$.

Хотя $S_n(t)$ стремится к $\varphi(t)$ в каждой фиксированной точке $t \in (0, 2\pi)$, но кривые $y = S_n(t)$, проходящие через начало координат накапливаются к интервалу $0 \leq y \leq l$ и

$$\frac{l}{\varphi(+0)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt = 1.179....$$

Так как $S_n(t)$ - нечетные функции от t, аналогичная ситуация имеет место в левой части окрестности точки $t = 0$, где кривые $y = S_n(t)$ накапливаются к интервалу $-l \leq y \leq 0$. Такое поведение частичных сумм называется явлением Гиббса. Его общая форма может быть описана следующим образом.

Пусть последовательность $\{f_N(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ при $x \in \Pi_\varepsilon(x^0, h)$ и существует $d_\varepsilon(x^0)$. Скажем, что для $\{f_N(x)\}$ имеет место явление Гиббса в

$\Pi_\varepsilon(x^0, h)$, если

$$\limsup_{\substack{N\to\infty\\ x\to x^0\\ x\in\Pi_\varepsilon(x^0,h)}} f_N(x) > d_\varepsilon(x^0) \quad \text{или} \quad \liminf_{\substack{N\to\infty\\ x\to x^0\\ x\in\Pi_\varepsilon(x^0,h)}} f_N(x) < d_\varepsilon(x^0).$$

Положим

$$\overline{P}_\varepsilon(x^0) = \limsup_{\substack{N\to\infty\\ x\to x^0\\ x\in\Pi_\varepsilon(x^0,h)}} S_N(f,x); \quad \underline{P}_\varepsilon(x^0) = \liminf_{\substack{N\to\infty\\ x\to x^0\\ x\in\Pi_\varepsilon(x^0,h)}} S_N(f,x),$$

$$\overline{P}(x^0) = \max_\varepsilon \overline{P}_\varepsilon(x^0); \ \underline{P}(x^0) = \min_\varepsilon \underline{P}_\varepsilon(x^0),$$

$$\overline{d}(x^0) = \max_\varepsilon d_\varepsilon(x^0); \ \underline{d}(x^0) = \min_\varepsilon d_\varepsilon(x^0).$$

Теорема 3. *Если $f \in HBV$ и в точке x^0 функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода, то*

a) $\underline{P}_\varepsilon(x^0) \le d(x^0) \le \overline{P}_\varepsilon(x^0)$;

b) если x^0 - точка неустранимого разрыва, то

$$\underline{P}_\varepsilon(x^0) < d_\varepsilon(x^0) < \overline{P}_\varepsilon(x^0);$$

в противном случае $\overline{P}_\varepsilon(x^0) = \underline{P}_\varepsilon(x^0) = d_\varepsilon(x^0) = d(x^0)$ *для всех* ε ;

c) $|d(x^0) - d_\varepsilon(x^0)| \le Q_n \left(\overline{P}_\varepsilon(x^0) - \underline{P}_\varepsilon(x^0)\right)$;

d) $\underline{Q}_n \cdot \left(\overline{P}(x^0) - \underline{P}(x^0)\right) \le \overline{d}(x^0) - \underline{d}(x^0) \le \overline{Q}_n \left(\overline{P}(x^0) - \underline{P}(x^0)\right)$,

где $Q_n, \underline{Q}_n, \overline{Q}_n \in (0,1)$ *- константы, зависящие только от* n.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Построим вспомогательные функции, используемые в доказательстве Теорем 2 и 3.

Через $i(k)$, $1 \le k \le n$, обозначим множество k мерных векторов с монотонно растущими натуральными координатами, не превосходящими n, т.е. если $(i_1, ..., i_k) \in i(k)$, то $1 \le i_1 < i_2 < ... \le n$. Положим $i(0) = \{(0)\}$.

Скажем, что $(i_1, ..., i_k) < (j_1, ..., j_m)$, если либо $k < m$, либо $k = m$ и существует $s_0 \ge 1$ такое, что $i_s = j_s$, при $s = 1, ..., s_0 - 1$ и $i_{s_0} < j_{s_0}$. Для $(i_1, ..., i_k) \in i(k)$ положим $(0) < (i_1, ..., i_k)$.

Через σ обозначим биективное отображение $\{0, 1, ..., 2^n - 1\}$ на $\bigcup_{k=0}^{n} i(k)$, удовлетворяющее условию $\sigma(i) < \sigma(j)$ при $i < j$. Для $\sigma(i) = (i_1, ..., i_k)$ положим $|\sigma(i)| = k$

Пусть $\varepsilon(i_1, ..., i_k) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_m = 1$, если $m \neq i_j$, при всех $j = 1, ..., k$, а для остальных m возьмем $\varepsilon_m = -1$. Положим

$$\varepsilon(0) = (1, 1, ..., 1) = \varepsilon_0; \quad (i_1, ..., i_k)(x) = x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k}; \ (0)(x) = 1.$$

Построим функцию $\Psi(x)$ на $[0, 2\pi]^n$ следующим образом :

$$\Psi(x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \lambda_{\sigma(i)}\, \sigma(i)(x), \quad \text{если} \quad x \in [0, 2\pi]^n,$$

где $\lambda_{\sigma(i)}$, $i = 0, 1, ..., 2^n - 1$, определяются из системы

$$\left\{ d_\varepsilon(0) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \lambda_{\sigma(j)}\, \sigma(j)(\pi(\varepsilon_0 - \varepsilon)) \right\}. \tag{3}$$

Положим

$$\Delta_{ij} = \sigma(j)(\pi(\varepsilon_0 - \varepsilon(\sigma(i)))), \quad \Delta = \{\Delta_{ij}\}_{i,j=0}^{2^n-1}, \quad \lambda = \{\lambda_{\sigma(j)}\}_{j=0}^{2^n-1}.$$

Так как $\Delta_{ij} = 0$, если $i < j$ и $\Delta_{ii} = (2\pi)^{|\sigma(i)|}$, то $\operatorname{rang}\Delta = 2^n$. Следовательно, система (3) имеет единственное решение.

Построим теперь 2π-периодическую функцию $\Psi_1(x)$ следующим образом :

$$\Psi_1(x) = \begin{cases} \Psi(x), & \text{если} \quad x \in (0, 2\pi)^n \\ 0, & \text{на границе} \ [0, 2\pi]^n. \end{cases}$$

Лемма 1. *Если $g(t) \in HBV([a, b])$, то*

a) $g(t)$ имеет только разрывы первого рода;

b) $\lim\limits_{h \to 0} V_H(g, [t_0, t_o + h]) = 0$ тогда и только тогда, когда $g(t)$ непрерывна в точке t_0.

Лемма 2. *Если $f \in HBV(D_2)$, то для произвольных $x, x^1 \in D_2$*

a) $V_{x_i}(f(x), I^i) \le V_H(f, D_2)$, $i = 1, 2$;

b). $|f(x) - f(x^1)| \le 2V_H(f, D_2)$.

Лемма 3. *Пусть $f \in HBV(D_2)$ и в точке $x \in D_2$ существует предел $d_\varepsilon(x)$. Тогда*

$$\lim_{h \to 0} V_H(f; \Pi_\varepsilon^0(x, h)) = 0.$$

Доказательства этих Лемм можно найти в работах [8] и [11].

Повторяя рассуждения и выкладки работы [11, стр. 526 – 528], получим следующим результат :

Лемма 4. *Если $f \in HBV$, то*

$$|f(x) - S_N(f,x)| \le C \sum_{\epsilon} V_H(f, \Pi_\epsilon(x,h)) + o(1),$$

где при фиксированном h $o(1)$ стремится к нулю при $N \to \infty$, равномерно по x, а C - абсолютная постоянная.

Лемма 5. *Для любых $f_1(x), f_2(x) \in HBV(D_2)$*

$$V_H(f_1 + f_2, D_2) \le V_H(f_1, D_2) + V_H(f_2, D_2).$$

Доказательство очевидно.

Лемма 6. *Пусть $f \in HBV(\Pi_\epsilon(x^0,h))$ и в точке x^0 существует предел : $\lim\limits_{\substack{x \to x^0 \\ x \in \Pi_\epsilon(x^0,h)}} f(x) = f(x^0)$. Тогда*

$$\lim_{h \to 0} V_H(f; \Pi_\epsilon(x^0,h)) = 0.$$

Доказательство. Для простоты докажем ее в случае $n = 2$. В общем случае $n \ge 3$ можно поступить аналогично. Определим функцию $f^*(x_1,x_2)$ на $\Pi_\epsilon(x^0,h)$. Сначала на множестве

$$\Pi_\epsilon(x^0,h) \setminus ((\Delta_{\epsilon_1}(x_1^0,h) \times \{x_2^0\}) \cup (\{x_1^0\} \times \Delta_{\epsilon_2}(x_2^0,h))$$

положим $f^* = f$. А на множестве

$$\{x_1^0\} \times (\Delta_{\epsilon_2}(x_2^0,h) \setminus \{x_2^0\})$$

положим

$$f^*(x_1^0, x_2) = \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_1 \in \Delta^0_{\epsilon_1}(x_1^0,h)}} f^*(x_1,x_2). \tag{4}$$

На множестве $\Delta_{\epsilon_1}(x_1^0,h) \times \{x_2^0\}$ определим $f^*(x_1,x_2)$ следующим образом :

$$f^*(x_1, x_2^0) = \lim_{\substack{x_2 \to x_2^0 \\ x_2 \in \Delta^0_{\epsilon_2}(x_2^0,h)}} f^*(x_1,x_2). \tag{5}$$

Из Леммы 2 следует, что $f(x_1, x_2) \in HBV(\Delta_{\epsilon_i}(x_i, h)), i = 1, 2$, а из Леммы 1 вытекает, что существуют пределы (4) и (5). Следовательно функция $f^*(x_1, x_2)$ определена корректно.

Из определения функции $f^*(x_1, x_2)$ и Леммы 2, часть а) следует, что

$$\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in \Pi_\epsilon(x^0, h)}} f^*(x) = f^*(x^0) = f(x^0) \tag{6}$$

и

$$V_{x_1}(f^*(x_1, x_2^0); \Delta_{\epsilon_1}(x_1^0, h)) \le V_H(f; \Pi_\epsilon(x^0, h)), \tag{7}$$

$$V_{x_2}(f^*(x_1^0, x_2); \Delta_{\epsilon_2}(x_2^0, h)) \le V_H(f; \Pi_\epsilon(x^0, h)). \tag{8}$$

Учитывая Лемму 5, неравенства (7) и (8), получаем

$$V_H(f^*; \Pi_\epsilon(x^0, h)) \le V_H(f^* - f; \Pi_\epsilon(x^0, h)) + V_H(f; \Pi_\epsilon(x^0, h)) \le$$
$$\le 5V_H(f; \Pi_\epsilon(x^0, h)) < \infty.$$

Следовательно

$$f^* \in HBV(\Pi_\epsilon(x^0, h)). \tag{9}$$

Согласно (6) и (9) функция $f^*(x)$, удовлетворяет условиям Леммы 6.

Теперь проверим, что утверждение Леммы 6 справедливо для функции $f^*(x)$. Так как функции $f^*(x_1, x_2^0)$ и $f^*(x_1^0, x_2)$ непрерывны в точках x_1^0 и x_2^0, соответственно, из Леммы 1 имеем

$$\lim_{h \to 0} V_{x_1}(f^*(x_1, x_2^0); \Delta_{\epsilon_1}(x_1^0, \frac{h}{2})) = 0 \tag{10}$$

и

$$\lim_{h \to 0} V_{x_2}(f^*(x_1^0, x_2); \Delta_{\epsilon_2}(x_2^0, \frac{h}{2})) = 0. \tag{11}$$

Убедимся, что имеет место неравенство

$$V_{x_1, x_2}(f^*(x_1, x_2); \Pi_\epsilon(x^0, \frac{h}{2})) \le V_{x_1, x_2}(f^*(x_1, x_2); \Pi_\epsilon^0(x^0, h)). \tag{12}$$

Принимая во внимание определение $V_{x_1, x_2}(f^*(x_1, x_2); \Pi_\epsilon(x^0, \frac{h}{2}))$, достаточно рассмотреть те системы интервалов $\{I_m^1\}_{m=1}^{m_0}$ и $\{I_k^2\}_{k=1}^{k_0}$, для которых точки x_1^0 и

x_2^0 являются вершинами интервалов $I^1_{m_1} = (a^1_{m_1}, b^1_{m_1})$ и $I^2_{k_1} = (a^2_{k_1}, b^2_{k_1})$, соответственно. Пусть $x_1^0 = a^1_{m_1}$, $x_2^0 = a^2_{k_1}$.

Из определения функции $f^*(x)$ имеем

$$|f^*(I^1_m, I^2_{k_1})| = \lim_{\substack{x_2 \to x_2^0 \\ x_2 \in I^2_{k_1}}} |f^*(I^1_m, (x_2, b^2_{k_1}))|, \quad m = 1, \dots, m_0,$$

$$|f^*(I^1_{m_1}, I^2_k)| = \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_1 \in I^1_{m_1}}} |f^*((x_1, b^1_{m_1}), I^2_k)|, \quad k \neq k_1, \ k = 1, \dots, k_0,$$

$$|f^*(I^1_{m_1}, (x_2, b^2_{k_1}))| = \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_1 \in I^1_{m_1}}} |f^*((x_1, b^1_{m_1}), (x_2, b^2_{k_1}))|.$$

Положим

$$\widetilde{I}^1_{m_1} = (x_1, b^1_{m_1}), \ \widetilde{I}^1_m = I^1_m, \ m \neq m_1, \ m = 1, \dots, m_0,$$

$$\widetilde{I}^2_{k_1} = (x_2, b^2_{k_1}), \ \ \widetilde{I}^2_k = I^2_k, \ k \neq k_1, \ k = 1, \dots, k_0.$$

Из определения гармонической вариации функции $f^*(x)$ на $\Pi^0_\varepsilon(x^0, h)$ имеем

$$\sum_{m=1}^{m_0} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{|f^*(\widetilde{I}^1_m, \widetilde{I}^2_k)|}{mk} \leq V_{x_1, x_2}(f^*; \Pi^0_\varepsilon(x^0, h)).$$

Следовательно

$$V_{x_1, x_2}(f^*; \Pi^0_\varepsilon(x^0, h)) \geq \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_1 \in I^1_{m_1}}} \lim_{\substack{x_2 \to x_2^0 \\ x_2 \in I^2_{k_1}}} \left(\sum_{m=1}^{m_0} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{|f^*(\widetilde{I}^1_m, \widetilde{I}^2_k)|}{mk} \right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{|f^*(I^1_m, I^2_k)|}{mk}.$$

Неравенство (12) доказано.

Согласно неравенствам (10) - (12), из Леммы 3 следует, что

$$\lim_{h \to 0} V_H(f^*, \Pi_\varepsilon(x^0, \frac{h}{2})) = 0. \tag{13}$$

Докажем Лемму 6 для функции $f(x)$. Из непрерывности функций $f(x_1^0, x_2)$ и $f(x_1, x_2^0)$ в точках x_2^0 и x_1^0, соответственно, имеем

$$\lim_{h \to 0} V_{x_1}(f(x_1, x_2^0); \Delta_{\varepsilon_1}(x_1^0, \frac{h}{2})) = 0, \tag{14}$$

и

$$\lim_{h \to 0} V_{x_2}(f(x_1^0, x_2); \Delta_{\varepsilon_2}(x_2^0, \frac{h}{2})) = 0. \tag{15}$$

Легко видеть, что

$$V_{x_1,x_2}(f;\Pi_\epsilon(x^0,\frac{h}{2})) \le V_{x_1,x_2}(f^*-f;\Pi_\epsilon(x^0,\frac{h}{2})) + V_{x_1,x_2}(f^*;\Pi_\epsilon(x^0,\frac{h}{2})) \le$$
$$\le V_H(f^*;\Pi_\epsilon(x^0,\frac{h}{2})) + V_{x_1}(f(x_1,x_2^0);\Delta_{\epsilon_1}(x_1^0,\frac{h}{2})) + V_{x_2}(f(x_1^0,x_2);\Delta_{\epsilon_2}(x_2^0,\frac{h}{2})). \quad (16)$$

Согласно (13) - (16), получаем

$$\lim_{h\to 0} V_H(f,\Pi_\epsilon(x^0,\frac{h}{2})) = 0.$$

Следствие. Пусть $f \in HBV(\Pi(x^0,h))$ и $f(x)$ непрерывна в точке x^0. Тогда

$$\lim_{h\to 0} V_H(f;\Pi(x^0,h)) = 0.$$

Доказательство следует из неравенства

$$V_H(f;\Pi(x^0,h)) \le C\sum_\epsilon V_H(f;\Pi_\epsilon(x^0,h)),$$

где C - абсолютная постоянная.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство Теоремы 1. Для простоты проведем доказательство для $n=2$. В общем случае теорема доказывается аналогично. Пусть $\tilde{f}(x_1,x_2)$ - 2π-периодическая функция по каждой переменной, удовлетворяющая условиям

$$\tilde{f}(x_1,x_2^0) = d(x^0); \quad \tilde{f}(x_1^0,x_2) = d(x^0); \quad \tilde{f}(x) = f(x)$$
$$\text{при} \quad x \in (x_1^0;x_1^0+2\pi)\times(x_2^0,x_2^0+2\pi).$$

Легко видеть, что при $x \in \Pi(x^0,\frac{h}{2})$ имеем

$$V_H(\tilde{f};\Pi_\epsilon(x,\frac{h}{2})) \le C V_H(\tilde{f};\Pi(x^0,h)).$$

Из Леммы 4 следует, что

$$|\tilde{f}(x) - S_N(\tilde{f},x)| \le C\sum_\epsilon V_H(\tilde{f};\Pi(x,\frac{h}{2})) + o(1) \le C V_H(\tilde{f};\Pi(x^0,h)) + o(1).$$

Следовательно

$$|d(x^0) - S_N(f,x)| \le C\, V_H(\tilde{f};\Pi(x^0,h)) + o(1) + |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x^0)|.$$

Из непрерывности $\widetilde{f}(x)$ в точке x^0 и из следствия получаем, что для любого $\delta > 0$ существует $h_0 = h(\delta) > 0$ такое, что при $x \in \Pi(x^0, h_0)$

$$C\ V_H(\widetilde{f}; \Pi(x^0, 2h_0)) + |\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(x^0)| < \frac{\delta}{2}.$$

Следовательно, для достаточно больших N_1, N_2 и при фиксированном h_0 имеем

$$|d(x^0) - S_N(f, x)| < \delta \quad \text{при} \quad N_1 > N_1^0,\ N_2 > N_2^0,\ x \in \Pi(x^0, h).$$

Теорема доказана.

Доказательство Теоремы 2 a) Без ограничения общности можем считать, что $x = 0$. Так как в точке $x = 0$ функция $f(x) - \Psi_1(x)$ имеет устранимый разрыв, то из Теоремы 1 следует, что $S_N(f - \Psi_1, 0)$ сходится к 0.

Легко видеть, что

$$\lim_{N\to\infty} S_N(\Psi_1, 0) = d(0). \tag{17}$$

Следовательно, учитывая, что

$$\lim_{N\to\infty} (S_N(f, 0) - S_N(\Psi_1, 0)) = 0,$$

получаем

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f, 0) = d(0).$$

b) Поскольку по предположению функция $f(x)$ непрерывна в точках компакта K, в силу Теоремы 1 для любого $\delta > 0$ и каждой точки $x \in K$ существуют окрестность U_x точки x и число $N_x = N(\delta, x)$ такие, что

$$|f(z) - S_N(f, z)| < \delta \quad \text{при} \quad z \in U_x \quad \text{и} \quad N > N_x.$$

Так как множество $\bigcup\limits_{x\in K} U_x$ является открытым покрытием компакта K, то существуют $U_{\tilde{x}_1}, \ldots, U_{\tilde{x}_n}$ такие, что $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\tilde{x}_i} \supset K$ и $|f(x) - S_N(f, x)| < \delta$ при $x \in K$, $N > \max\limits_{i=1,\ldots,m} N_{\tilde{x}_i}$. Теорема 2 доказана.

Доказательство Теоремы 3. Без ограничения общности можем предположить, что $x^0 = 0$. Так как функция $f - \Psi_1$ имеет устранимый разрыв, то из Теоремы 1 следует, что в точке 0 функция $S_N(f - \Psi_1, x)$ равномерно сходится к

0. Таким образом, поведение $S_N(f,x)$ в окрестности точки 0 полностью определяется поведением $S_N(\Psi_1,x)$, т.е.

$$\underline{P}_\varepsilon(f,0)=\underline{P}_\varepsilon(\Psi_1,0),\quad \overline{P}_\varepsilon(f,0)=\overline{P}_\varepsilon(\Psi_1,0)\quad \text{для всех}\quad \varepsilon.$$

Из определения Ψ_1 имеем

$$d_\varepsilon(f,0)=d_\varepsilon(\Psi_1,0)\quad \text{для всех}\quad \varepsilon$$

и

$$S_N(\Psi_1,x)=\sum_{i=0}^{2^n-1}\lambda_{\sigma(i)}\,S_N(\sigma(i)(\cdot),x),$$

$$S_N(\Psi,x)=\sum_{i=0}^{2^n-1}\lambda_{\sigma(i)}\prod_{j=1}^{|\sigma(i)|}\left(\pi-2\sum_{m=1}^{N_{i_j}}\frac{\sin mx_{i_j}}{m}\right),$$

$$|\sigma(i)|=k,\ \ \sigma(i)=(i_1,i_2,\dots,i_j,\dots,i_k).$$

Определим функцию $\Psi^*(x)$ на $[-l,l]^n$ следующим образом :

$$\Psi^*(x)=\sum_{i=0}^{2^n-1}\lambda_{\sigma(i)}\prod_{j=1}^{|\sigma(i)|}\left(\pi-2x_{i_j}\right),\tag{18}$$

где $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in[-l,l]^n$, $\sigma(i)=(i_1,\dots,i_k)$. Представим функцию $\Psi^*(x)$ в виде

$$\Psi^*(x)=\sum_{i=0}^{2^n-1}\lambda^*_{\sigma(i)}\,\sigma(i)(x).\tag{19}$$

Из (18) и (19) получим систему уравнений

$$\lambda^*_{\sigma(i)}=(-2)^{|\sigma(i)|}\lambda_{\sigma(i)}+\dots,\ i=0,1,\dots,2^n-1$$

или эквивалентное уравнение $\lambda^*=\Delta^*\lambda$, где $\lambda^*=\{\lambda^*_{\sigma(i)}\}_{i=0}^{2^n-1}$, а $\Delta^*=\{\Delta^*_{ij}\}_{i,j=0}^{2^n-1}$. Имеем $\Delta^*_{ij}=0$, если $i>j$ и $\Delta^*_{ii}=(-2)^{|\sigma(i)|}$. Следовательно, $\operatorname{rang}\Delta^*=2^n$.

Известно (см. [12], стр. 105), что

$$S_m(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin kt}{k}=\int_0^{mt}\frac{\sin s}{s}\,ds+R_m(t),\quad t\in[0,\pi],\tag{20}$$

где $|R_m(t)|<\delta$, если $t<\delta$ и $m>m_0(\delta)$. Из (20) получим

$$\limsup_{\substack{t\to0+\\ m\to+\infty}}S_m(t)=l,\qquad \liminf_{\substack{t\to0+\\ m\to+\infty}}S_m(t)=0,$$

а также, что для любого $t_0 \in [0,l]$ существуют последовательности $\{t_k\}$ и $\{m_k\}$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty} S_{m_k}(t_k) = t_0.$$

Следовательно

$$\overline{P}_\varepsilon(0) = \max_{x\in\Pi_\varepsilon(0,l)} \Psi^*(x); \qquad \underline{P}_\varepsilon(0) = \min_{x\in\Pi_\varepsilon(0,l)} \Psi^*(x).$$

Имеем

$$\Psi^*(0) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \lambda_{\sigma(i)}\, \pi^{|\sigma(i)|};$$

$$d(0) = \frac{1}{2^n}\sum_\varepsilon d_\varepsilon(0) = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{2^n-1} \lambda_{\sigma(i)} \left(\sum_\varepsilon \sigma(i)(\pi(\varepsilon_0-\varepsilon))\right);$$

$$\sum_\varepsilon \sigma(i)(\pi(\varepsilon_0+\varepsilon)) = 2^n\pi^{|\sigma(i)|}.$$

Следовательно, получаем $\Psi^*(0) = d(0)$.

Очевидно, что

$$\underline{P}_\varepsilon(0) = \min_{x\in\Pi_\varepsilon(0,l)} \Psi^*(x) \le \Psi^*(0) \le \max_{x\in\Pi_\varepsilon(0,l)} \Psi^*(x) = \overline{P}_\varepsilon(0),$$

тем самым утверждение a) доказано.

Для доказательства утверждения b) заметим, что

$$\Psi^*(\frac{\pi}{2}\varepsilon) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \lambda_{\sigma(i)} \prod_{j=1}^{|\sigma(i)|} (\pi - \pi\varepsilon_{i_j}) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \lambda_{\sigma(i)}(\sigma(i)(\pi(\varepsilon_0-\varepsilon))) = d_\varepsilon(0).$$

Поскольку $\operatorname{rang}\Delta = \operatorname{rang}\Delta^* = 2^n$, то 0 является точкой устранимого разрыва функций $f(x)$ и $\Psi_1(x)$ тогда и только тогда, когда $\Psi^*(x) \equiv \text{const}$. В этом случае имеем

$$\overline{P}_\varepsilon(0) = \underline{P}_\varepsilon(0) = d_\varepsilon(0) = d(0) \quad \text{для всех} \quad \varepsilon.$$

В случае, когда 0 является точкой неустранимого разрыва, имеем $\Psi^*(x) \not\equiv \text{const}$. Следовательно, $\Psi^*(x)$ не может принять максимальное или минимальное значение внутри $\Pi_\varepsilon(0,l)$, так как при фиксировании $n-1$ переменных $\Psi^*(x)$ становится линейной функцией. Следовательно

$$\underline{P}_\varepsilon(0) = \min_{x\in\Pi_\varepsilon(0,l)} \Psi^*(x) < \Psi^*(\frac{\pi}{2}\varepsilon) < \max_{x\in\Pi_\varepsilon(0,l)} \Psi^*(x) = \overline{P}_\varepsilon(0).$$

Утверждение b) доказано.

Для доказательства утверждения c) предположим, без ограничения общности, что $\varepsilon = \varepsilon_0$. Так как фиксация $n-1$ переменных превращает $\Psi^*(x)$ в линейную функцию, то

$$\underline{P}_{\varepsilon_0}(0) = \min_{x\in\Pi_{\varepsilon_0}(0,l)} \Psi^*(x) = \min_{x\in\partial\Delta_{\varepsilon_1}(0,l)\times\ldots\times\partial\Delta_{\varepsilon_n}(0,l)} \Psi^*(x) = \min_{\varepsilon}\Psi^*(\frac{l}{2}(\varepsilon_0-\varepsilon)),$$

$$\overline{P}_{\varepsilon_0}(0) = \max_{x\in\Pi_{\varepsilon_0}(0,l)} \Psi^*(x) = \max_{x\in\partial\Delta_{\varepsilon_1}(0,l)\times\ldots\times\partial\Delta_{\varepsilon_n}(0,l)} \Psi^*(x) = \max_{\varepsilon}\Psi^*(\frac{l}{2}(\varepsilon_0-\varepsilon)).$$

Следовательно, получаем систему уравнений

$$\left\{\Psi^*(\frac{l}{2}(\varepsilon_0-\varepsilon)) = \sum_{j=0}^{2^n-1}\lambda^*_{\sigma(j)}\left(\sigma(j)(\frac{l}{2}(\varepsilon_0-\varepsilon))\right)\right\},$$

т.е. $\mu = A\lambda^*$, где $\mu = \{\mu_i\}_{i=0}^{2^n-1}$, $\mu_i = \Psi^*(\frac{l}{2}(\varepsilon_0-\varepsilon(\sigma(i))))$, $A = \{A_{ij}\}_{i,j=0}^{2^n-1}$, $A_{ij} = \sigma(j)(\frac{l}{2}(\varepsilon_0-\varepsilon(\sigma(i))))$.

Имеем $A_{ij}=0$, если $i<j$, а $A_{ii} = l^{|\sigma(i)|}$. Следовательно, $\mathrm{rang}A = 2^n$.

Легко видеть, что

$$\overline{P}_{\varepsilon_0}(0) - \underline{P}_{\varepsilon_0}(0) = \omega(\widetilde{A}\widetilde{\lambda}^*), \quad \text{где} \quad \widetilde{\lambda}^* = \{\lambda^*_{\sigma(i)}\}_{i=1}^{2^n-1},$$

$$\widetilde{A} = \{A_{ij}\}_{i,j=1}^{2^n-1}; \quad d_{\varepsilon_0}(0) = \sum_{j=0}^{2^n-1}\lambda^*_{\sigma(j)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{|\sigma(j)|}\sigma(j)(\varepsilon_0);$$

$$d_{\varepsilon_0}(0) - d(0) = \sum_{j=1}^{2^n-1}\lambda^*_{\sigma(j)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{|\sigma(j)|}\sigma(j)(\varepsilon_0);$$

$$|d_{\varepsilon_0}(0) - d(0)| = \omega(B\widetilde{\lambda}^*),$$

где $B = \{B_{ij}\}_{i,j=1}^{2^n-1}$, а $B_{1j} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{|\sigma(j)|}\sigma(j)(\varepsilon_0)$; $B_{ij}=0$, если $i>1$.

В случае $\omega(\widetilde{\lambda}^*)=0$ неравенство

$$|d(0) - d_{\varepsilon_0}(0)| \le Q_n\left(\overline{P}_{\varepsilon_0}(0) - \underline{P}_{\varepsilon_0}(0)\right)$$

очевидно.

При $\omega(\widetilde{\lambda}^*)\ne 0$ имеем

$$\frac{\omega(B\widetilde{\lambda}^*)}{\omega(\widetilde{A}\widetilde{\lambda}^*)} = \frac{\omega(B\widetilde{A}^{-1}L)}{\omega(L)} < \|B\widetilde{A}^{-1}\|_\omega,$$

где $L = \widetilde{A}\widetilde{\lambda}^*$, $\widetilde{\lambda}^* = \widetilde{A}^{-1}L$.

Из a) и b) вытекает, что

$$\frac{\omega(B\widetilde{\lambda}^*)}{\omega(\widetilde{A}\widetilde{\lambda}^*)} = \frac{\omega(B\widetilde{A}^{-1}L)}{\omega(L)} < 1.$$

Следовательно, $||B\widetilde{A}^{-1}||_\omega < 1$, обозначая через $Q_n = ||B\widetilde{A}^{-1}||_\omega$, мы завершим доказательство утверждения c). Докажем теперь утверждение d). Рассуждая как и выше, легко видеть, что

$$\overline{P}(0) = \max_\varepsilon \overline{P}_\varepsilon(0) = \max_{x\in[-l,l]^n} \Psi^*(x) = \max_{x\in\partial[-l,l]\times\ldots\times\partial[-l,l]} \Psi^*(x), \tag{21}$$

$$\underline{P}(0) = \min_\varepsilon \underline{P}_\varepsilon(0) = \min_{x\in[-l,l]^n} \Psi^*(x) = \min_{x\in\partial[-l,l]\times\ldots\times\partial[-l,l]} \Psi^*(x), \tag{22}$$

$$\underline{d}(0) = \min_\varepsilon d_\varepsilon(0) = \min_{x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]^n} \Psi^*(x) = \min_{x\in\partial[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times\ldots\times\partial[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \Psi^*(x), \tag{23}$$

$$\overline{d}(0) = \max_\varepsilon d_\varepsilon(0) = \max_{x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]^n} \Psi^*(x) = \max_{x\in\partial[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times\ldots\times\partial[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \Psi^*(x). \tag{24}$$

Если $\omega(\widetilde{\lambda}^*) = 0$, то $\widetilde{\lambda}^* = 0$ и $\Psi^*(x) = \mathrm{const}$. Следовательно, $\overline{P}(0) = \underline{P}(0) = \overline{d}(0) = \underline{d}(0)$ и неравенство d) очевидно.

В случае,когда $\omega(\widetilde{\lambda}^*) \neq 0$, имеем $\widetilde{\lambda}^* \neq 0$ и $\Psi^*(x) \not\equiv \mathrm{const}$. Поэтому в силу (21)-(24) получаем

$$\underline{P}(0) < \underline{d}(0) < \overline{d}(0) < \overline{P}(0). \tag{25}$$

Легко видеть, что

$$\overline{P}(0) - \underline{P}(0) = \omega((\Psi^*(l\varepsilon(\sigma(i))) - \Psi^*(l\varepsilon_0))_{i=1}^{2^n-1}),$$

$$\overline{d}(0) - \underline{d}(0) = \omega((\Psi^*(\frac{\pi}{2}\varepsilon(\sigma(i))) - \Psi^*(\frac{\pi}{2}\varepsilon_0))_{i=1}^{2^n-1}).$$

Имеем

$$\Psi^*(l\varepsilon(\sigma(i))) - \Psi^*(l\varepsilon_0) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \lambda^*_{\sigma(j)} l^{|\sigma(j)|} (\sigma(j)(\varepsilon(\sigma(i)) - 1),$$

$$\overline{P}(0) - \underline{P}(0) = \omega(\widetilde{Q}\widetilde{\lambda}^*), \quad \text{где} \quad \widetilde{Q} = \{\widetilde{Q}_{ij}\}_{i,j=1}^{2^n-1}, \ \widetilde{Q}_{ij} = l^{|\sigma(j)|}(\sigma(j)(\varepsilon(\sigma(i)) - 1),$$

$$\overline{d}(0) - \underline{d}(0) = \omega(\widetilde{R}\widetilde{\lambda}^*), \quad \widetilde{R} = \{\widetilde{R}_{ij}\}_{i,j=1}^{2^n-1}, \quad \widetilde{R}_{ij} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{|\sigma(j)|} (\sigma(j)(\varepsilon(\sigma(i))) - 1).$$

Для выполнения условия $\mathrm{rang}\widetilde{Q} = \mathrm{rang}\widetilde{R} = 2^n - 1$ достаточно, чтобы $\mathrm{rang}\widetilde{\sigma} = 2^n - 1$, где $\widetilde{\sigma} = \{\widetilde{\sigma}_{ij}\}_{i,j=1}^{2^n-1}$, $\widetilde{\sigma}_{ij} = \sigma(j)(\varepsilon(\sigma(i))) - 1$.

Докажем, что матрица $\sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=0}^{2^n-1}$, $\sigma_{ij} = \sigma(j)(\varepsilon(\sigma(i)))$ ортогональна.

Если $k_1 \neq k_2$, то существует $k_3 \geq 1$ такое, что $\sigma_{k_1 j} \cdot \sigma_{k_2 j} = \sigma_{k_3 j}$ для всех $j = 0, 1, ..., 2^n - 1$.

Следовательно

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} \sigma_{k_1 j} \cdot \sigma_{k_2 j} = \sum_{j=0}^{2^n-1} \sigma_{k_3 j} = 0.$$

Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{2^n-1} \widetilde{\sigma}_{k_1 j}\, \widetilde{\sigma}_{k_2 j} = \sum_{j=0}^{2^n-1} (\sigma_{k_1 j} - 1)(\sigma_{k_2 j} - 1) = 2^n, \tag{26}$$

$$\sum_{j=1}^{2^n-1} \widetilde{\sigma}_{k j}\, \widetilde{\sigma}_{k j} = 2^n - 1. \tag{27}$$

Из соотношений (26) и (27) следует, что $\operatorname{rang}\widetilde{\sigma} = 2^n - 1$. Имеем

$$\|\widetilde{Q}\widetilde{R}^{-1}\|_\omega^{-1} \leq \frac{\omega(z)}{\omega(\widetilde{Q}\widetilde{R}^{-1}z)} = \frac{\omega(\widetilde{R}\widetilde{\lambda}^*)}{\omega(\widetilde{Q}\widetilde{\lambda}^*)} = \frac{\omega(\widetilde{R}\widetilde{Q}^{-1}L)}{\omega(L)} \leq \|\widetilde{R}\widetilde{Q}^{-1}\|_\omega,$$

где $\omega(\widetilde{\lambda}^*) \neq 0$, $L = \widetilde{Q}\widetilde{\lambda}^*$, $\widetilde{\lambda}^* = \widetilde{Q}^{-1}L$, $\omega(L) \neq 0$, $z = \widetilde{R}\widetilde{\lambda}^*$.

Из (25) получаем

$$\frac{\omega(\widetilde{R}\widetilde{\lambda}^*)}{\omega(\widetilde{Q}\widetilde{\lambda}^*)} = \frac{\omega(\widetilde{R}\widetilde{Q}^{-1}L)}{\omega(L)} < 1.$$

Значит, $\|\widetilde{R}\widetilde{Q}^{-1}\|_\omega < 1$.

Таким образом, обозначая $\overline{Q}_n = \|\widetilde{R}\widetilde{Q}^{-1}\|_\omega$, $\underline{Q}_n = \|\widetilde{Q}\widetilde{R}^{-1}\|_\omega^{-1}$, получаем требуемое утверждение. Теорема доказана.

В заключение, автор выражает благодарность профессору Г.Г. Геворкяну за постановку задачи и обсуждения результатов работы.

ABSTRACT. Theorems on convergence of multiple Fourier series of several variables continuous functions with harmonic bounded variation are proved. Also the Gibbs phenomenon for multiple Fourier series is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Физ.- Мат. Гиз., Москва, 1961.
2. N. Wiener, "The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients," Massachuetts. J. Math., vol. 3, pp. 72 94, 1924.
3. J. Marcinkiewicz, "On a class of function and their Fourier series," Compt. Rend.

Soc-Sci. Varsowie, vol. 26, pp. 71 – 77, 1934.
4. L. C. Jung, "General inequalities for Stiltjes integrals and the convergence of Fourier series," Mat. Ahn., vol. 115, pp. 581 – 612, 1938.
5. Salem, Essais Sur Les Series Trigonometriques. Actualite Sci et Industr., Paris, 862, 1940.
6. C. Goffman, "Everywhere convergence of Fourier series," Indiana Univ. Math. J., vol. 20, no. 2, pp. 107 – 112, 1970.
7. К. И. Осколков, "Обобщенная вариация, индикатриса Банаха и равномерная сходимость рядов Фурье," Мат. Заметки, том 12, №3, стр. 313 – 324, 1972.
8. D. Waterman, "On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation," Studia Math., vol. 44, no. 2, pp. 107 – 117, 1972.
9. G. H. Hardy, "On double Fourier series and espesiasially those which represanthe double zeta-function with reale and incommensurable parameters," Quart. J. Math., vol. 37, no. 1, pp. 53 – 79, 1906.
10. В. И. Голубов, "О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной обобщенной вариации", Сиб. мат, журн., том 15, №2, стр. 262 – 292, 1974.
11. А. А. Саакян,"О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации," Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 21, №6, стр. 517 – 529, 1986.
12. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, том 1, М., Мир, 1965.

22 Февраля 1993 Ереванский государственный университет