

ЗАМЕЧАНИЕ О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ ТЕПЛИЦЕВА ТИПА ОТ СТАЦИОНАРНЫХ ГАУССОВСКИХ ВЕЛИЧИН

М. С. Гиновян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, №2, 1993

1. Пусть $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots$ - стационарная гауссовская последовательность с нулевым средним и спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, $f(-\lambda) = f(\lambda)$.

Рассмотрим вопрос применимости Центральной Предельной Теоремы для следующих квадратичных форм теплицева типа :

$$L_n = \sum_{k,j=1}^n a_{k-j} X(k)X(j), \quad (1)$$

где

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} g(\lambda) d\lambda, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

- коэффициенты Фурье некоторой вещественной, четной, интегрируемой функции $g(\lambda)$ на $[-\pi, \pi]$, которую назовем порождающей для квадратичной формы L_n .

Эта проблема впервые была изучена Гренандером и Сеге [6] в качестве применения их теории об асимптотическом поведении следа произведения теплицевых матриц.

В последнее время снова возник интерес к этой проблеме (см. [1]-[5], [7]). В частности, результаты Аврама [1], Фокса и Таку [2] можно объединить в следующую теорему.

Теорема А. *Предположим, что выполнено одно из условий Q1), Q2) :*

$$Q1) \quad f(x) \in L_{p_1}, \quad g(x) \in L_{p_2}, \quad \text{где } p_1, p_2 \geq 1 \text{ и } \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{2}.$$

$$Q2) \quad f(x) < c|x|^{-\alpha}, \quad |g(x)| < c|x|^{-\beta}, \quad \text{где } \alpha, \beta < 1 \text{ и } \alpha + \beta < \frac{1}{2}.$$

Тогда распределение нормированной квадратичной формы $\tilde{L}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} (L_n - EL_n)$ стремится (при $n \rightarrow \infty$) к нормальному распределению $N(0, \sigma^2)$ с дисперсией

$$\sigma^2 = 16\pi^3 \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda) g^2(\lambda) d\lambda. \quad (2)$$

Доказательство Теоремы А в [1], [2] основано на следующем хорошо известном представлении

$$\chi_k(\tilde{L}_n) = \begin{cases} 2^{k-1}(k-1)! n^{-k/2} \text{tr}(T_n(f)T_n(g))^k, & k \geq 2 \\ 0, & k = 1 \end{cases}$$

k -того кумулянта $\chi_k(\cdot)$ квадратичной формы $\tilde{L}_n$, где в правой части записан след произведения теплицевых матриц $T_n(g) = \|a_{k-j}\|_{k,j=\overline{1,n}}$ и $T_n(f) = \|r_{k-j}\|_{k,j=\overline{1,n}}$; $r_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} f(\lambda) d\lambda$ - ковариация последовательности $X(k)$.

В работе Гиравитиса и Сургалиса [5] был применен другой подход, позволяющий распространить Теорему А на линейные последовательности. В гауссовском случае их результат формулируется следующим образом.

Теорема В. *Предположим, что*

$$\chi_2(\tilde{L}_n) = \frac{2}{n} \text{tr}(T_n(f)T_n(g))^2 \longrightarrow 16\pi^3 \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda) g^2(\lambda) d\lambda < \infty. \quad (3)$$

Тогда справедливо утверждение Теоремы А.

В работах [1] и [2] было установлено, что каждое из условий Q1), Q2) Теоремы А влечет (3), т.е. (3) слабее Q1) или Q2). К сожалению, (3) не является явным условием.

В той же работе [5] выдвигается гипотеза, что (3) верно при единственном условии, что интеграл в правой части (3) сходится. В этой работе дается отрицательный ответ на эту гипотезу, а именно, строятся функции $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$, такие, что $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda) g^2(\lambda) d\lambda < \infty$, но сходимость в (3) не имеет места.

2. Рассмотрим функции

$$f(\lambda) = \begin{cases} \left(\frac{2^s}{s^2}\right)^{1/p}, & \text{если } 2^{s-1} \leq \lambda \leq 2^s, s = 2m \\ 0, & \text{если } 2^{s-1} \leq \lambda \leq 2^s, s = 2m + 1 \end{cases}$$

и

$$g(\lambda) = \begin{cases} \left(\frac{2^s}{s^2}\right)^{1/q}, & \text{если } 2^{s-1} \leq \lambda \leq 2^{-s}, s = 2m + 1 \\ 0, & \text{если } 2^{s-1} \leq \lambda \leq 2^{-s}, s = 2m, \end{cases}$$

где m - положительное целое число, а $p, q \geq 1$.

Легко видеть, что $f(\lambda) \in L_p, g(\lambda) \in L_q, f(\lambda)g(\lambda) \in L_r$ для любых r и $\sigma^2 = 0$.

Покажем теперь, что для $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$

$$\chi_2(\bar{L}_n) = \frac{2}{n} \operatorname{tr}(T_n(f)T_n(g))^2 \longrightarrow \infty, \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

и, следовательно, сходимость в (3) не имеет места.

Обозначая через $\lambda_k, k = \overline{1, n}$ собственные значения $T_n(f)T_n(g)$, получаем следующее легко проверяемое соотношение:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \lambda_k &= \operatorname{tr}(T_n(f)T_n(g)) = \\ &= 2 \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{n}{2}(t-\lambda)}{\sin^2 \frac{1}{2}(t-\lambda)} f(\lambda)g(t) d\lambda dt = 2 \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} h(x) dx, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$h(x) = \int_0^\pi f(\lambda)g(\lambda+x) d\lambda.$$

Имеем $h(0) = 0$ и для $x \neq 0$ сегмент $[2^{s-1}+x; 2^{-s}+x]$ содержится в $[2^{-s}; 2^{-s+1}]$ до тех пор, пока $x \in [2^{s-1}; 2^{-s}]$.

Таким образом, при $s = 2m$ и $\lambda, x \in [2^{s-1}; 2^{-s}]$ получаем

$$f(\lambda)g(\lambda+x) = \left(\frac{2^s}{s^2}\right)^{1/p} \left(\frac{2^{s-1}}{(s-1)^2}\right)^{1/q} \gtrsim c \cdot \left(\frac{2^s}{s^2}\right)^{1/p+1/q} \quad (6)$$

и

$$h(x) \gtrsim c \cdot x^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+1} (\ln x)^{-2/p-2/q}. \quad (7)$$

Здесь и ниже буквой c обозначаются положительные постоянные.

Легко видеть, что оценки (6) и (7) справедливы в случае, когда $s = 2m + 1$.

Поэтому, принимая во внимание тот факт, что для $0 < x < \frac{1}{n}$

$$\frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{n^2 \sin^2 \frac{x}{2}} \geq c,$$

в силу (5) и (7), имеем

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \lambda_k &= 2n^2 \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{n^2 \sin^2 \frac{x}{2}} h(x) dx \geq c \cdot n^2 \int_0^{1/n} h(x) dx \gtrsim \\ &\gtrsim cn^2 \int_0^{1/n} x^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+1} (\ln x)^{-2/p-2/q} dx \geq c \cdot n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} (\ln n)^{-2/p-2/q}.\end{aligned}$$

Применяя неравенство Шварца, получаем

$$\chi_2(\tilde{L}_n) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \geq \frac{2}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right)^2 \geq c \cdot n^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-2} (\ln n)^{-4/p-4/q}.$$

Очевидно, если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$, то последнее выражение стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, мы показали, что условие $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda) g^2(\lambda) d\lambda < \infty$ не гарантирует сходимости в (3).

В заключение, мы выдвигаем гипотезу, что из условия

$$0 < \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda) g^2(\lambda) d\lambda < \infty$$

следует сходимость в (3).

Автор выражает благодарность профессору И.А.Ибрагимову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Avram, "On bilinear forms in Gaussian random variables and Toeplitz matrices", Probab. Th. Rel. Fields, vol. 79, pp. 37 – 45, 1988.
2. R. Fox, M. S. Taqqu, "Central limit theorem for quadratic forms in random variables having long-range dependence", Probab. Th. Rel. Fields, vol. 74, pp. 213 – 240, 1987.
3. М. С. Гиновян, "Асимптотически эффективное непараметрическое оценивание функционалов на спектральной плоскости, имеющей нули", Теория вероятностей и ее приложения, том 33, стр. 315 – 322, 1988.
4. M. S. Ginovian, "On Toeplitz type quadratic functionals in Gaussian stationary process", Probab. Th. Rel. Fields (in press).
5. L. Giraitis, D. Surgailis, "A central limit theorem for quadratic forms in strongly dependent linear variables and its application to asymptotical normality of Whittle's estimate", Probab. Th. Rel. Fields, vol. 86, pp. 87 – 104, 1990.
6. U. Grenander, G. Szegő, Toeplitz Forms and Their Applications, University of California Press, 1958.
7. R. Z. Hasminskii, I. A. Ibragimov, "Asymptotically efficient nonparametric estimation of functionals of a spectral density function", Probab. Th. Rel. Fields, vol. 73, pp. 447 – 461, 1986.