# ФЛАГ-ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ, ПОЛУЧАЕМОЕ ПРИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЕЛОНЕ

**Р. Г. Арамян**

**Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №2, 1993**

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе Р.В. Амбарцумяна [1] было указано на существование так называемых *флаг-представлений* функций ширины выпуклых тел в $\mathbb{R}^3$.

Флаг - это пара $f = f(g, e)$, где $g$ - прямая, содержащая $O$, а $e$ - плоскость, содержащая $g$. Мы представим $f = f(\Omega, \phi)$, где $\Omega$ - пространственное направление $g$ в $\mathbb{R}^3$, $\phi$ - вращение $e$ вокруг $g$.

Пусть $H(\xi)$ - ширина некоторого выпуклого тела $K$ в направлении $\xi$. Тогда [1]

$$H(\xi) = \int_{S^1 \times S^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega, \phi)\, m(d\Omega, d\phi), \tag{1}$$

где $S^i$ - единичная сфера в $\mathbb{R}^{i+1}$, $i = 1, 2$, $\Omega, \xi \in S^2$, $m$ -некоторая мера на $S^1 \times S^2$, $\alpha$ - угол между $\Omega \in S^2$ следом $e_\xi \cap e(\Omega, \phi)$, $e_\xi$ - плоскость с нормалью $\xi$, и $e(\Omega, \phi)$ - плоскость флага $f(\Omega, \phi)$. Представление (1) неединственно (для данного $H$ существует много мер $m$). В [2] было получено некоторое (дискретное) флаг-представление для гладких выпуклых тел, при этом использовалась аппроксимация многогранниками. В [3] было получено другое (непрерывное) флаг-представление для гладких выпуклых тел с помощью стохастической аппроксимации (аппроксимации Вороного) многогранниками, натянутыми на точки независимо сброшенные на поверхность тела.

В настоящей работе находится флаг-представление, получаемое с помощью другой стохастической аппроксимации (Делоне) выпуклых тел. А именно, на выпуклое тело **K** независимо друг от друга бросается $n$ точек с одним и тем же распределением $\mathbf{P}$. Рассматривается случайный многогранник, ограниченный касательными плоскостями к $\partial\mathbf{K}$ в этих точках, выписывается стандартное флаг-представление для этого многогранника. Затем усредняется это представление относительно $\mathbf{P} \times \cdots \times \mathbf{P}$ и рассматривается предельное представление при $n \to \infty$. Доказывается, что предел есть флаг-представление для $\mathbf{K}$ и что этот предел не зависит от $\mathbf{P}$ (для класса распределений). Найдена плотность этого представления в терминах кривизн поверхности $\partial\mathbf{K}$, которая совпадает с плотностью представления, полученного при стохастической аппроксимации Вороного (см. [3]).

## 2. АППРОКСИМАЦИЯ ДЕЛОНЕ

Пусть $\mathbf{K}$ - достаточно гладкое (трижды непрерывно дифференцируемое) выпуклое тело в $\mathbb{R}^3$. Предположим, что во всех точках $\partial\mathbf{K}$ гауссовая кривизна положительна. Тогда отображение Гаусса поверхности $\partial\mathbf{K}$ на единичную сферу $S^2$ является гомеоморфизмом.

На $S^2$ независимо друг от друга бросим $n$ точек $P_1, \ldots, P_n$ с одним и тем же распределением $\mathbf{P}$. Пусть $d\mathbf{P} = f(\omega)d\omega$, где плотность $f(\omega) > 0$ непрерывна, $d\omega$ - элемент лебеговой меры на $S^2$. Через $P_1^*, \ldots, P_n^*$ обозначим образы точек $P_1, \ldots, P_n$ при отображении, обратном отображению Гаусса. Обозначим через $L_{P_i^*}$ замкнутое полупространство, ограниченное касательной плоскостью поверхности $\partial\mathbf{K}$ в точке $P_i^*$, которое содержит тело $\mathbf{K}$ ( см. Рис. 1).

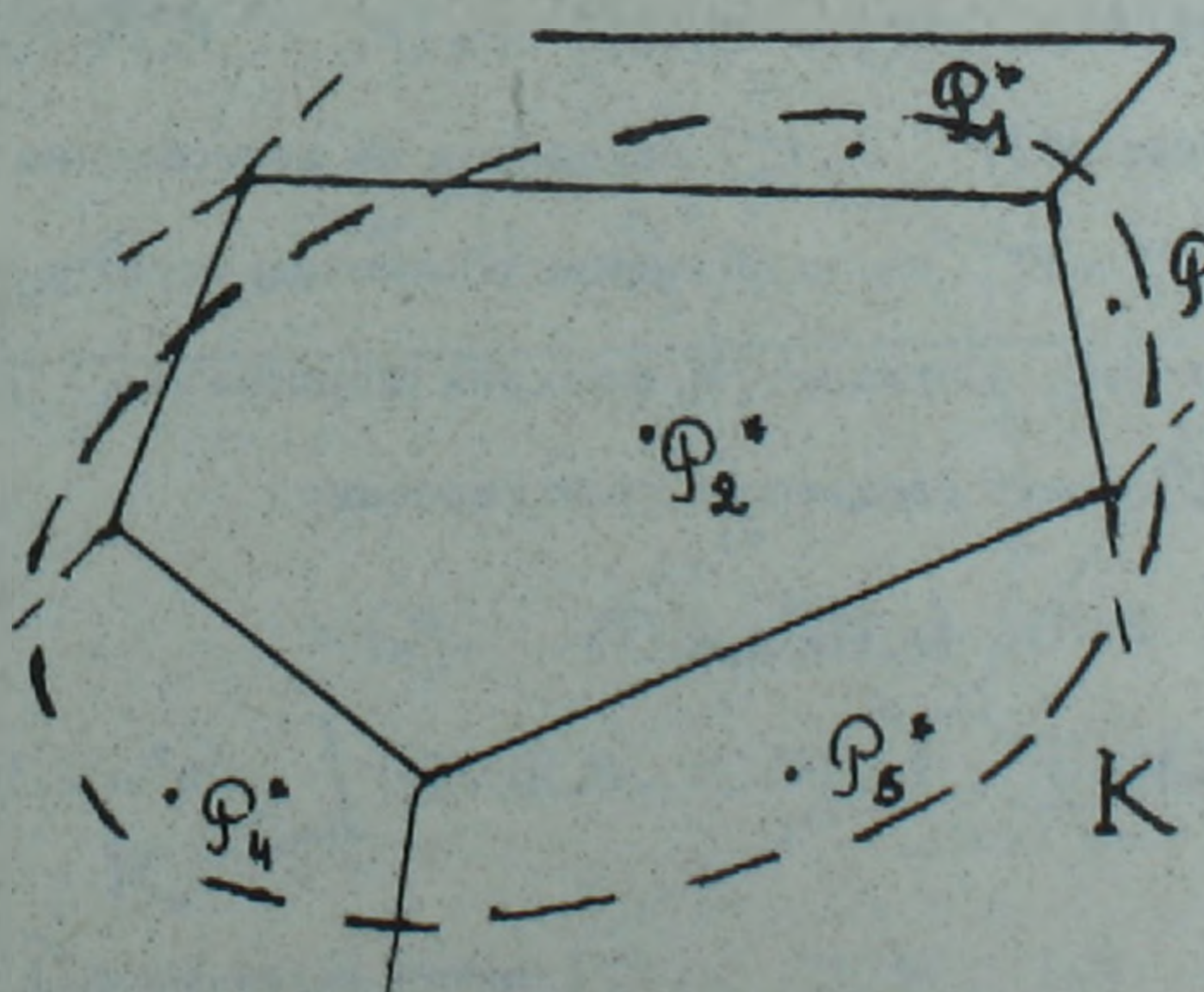


Рис. 1.

Здесь возникают следующие трудности :

1. $\mathbf{P}^n(\{(P_1, \ldots, P_n) : \cap_{i=1}^n L_{P_i^*}$ неограничено$\}) > 0$ для всех $n$, где $\mathbf{P}^n = \mathbf{P} \times \cdot \times \mathbf{P}$.

2. Условное среднее функции ширины $\cap_{i=1}^n L_{P_i^*}$ при условии, что $\{\cap_{i=1}^n L_{P_i^*}$ есть многогранник$\}$, бесконечно.

Нам необходима следующая лемма. Обозначим через

$$\Pi_F = \{(P_1, \cdots, P_n) : \cap_{i=1}^n L_{P_i^*} \subset F\},$$

где $F$ - выпуклое тело, содержащее $\mathbf{K}$.

**Лемма 1.** *Для любого $n$ существуют целое число $k$ и $0 < p_o < 1$ такие, что*

$$\mathbf{P}^n(\Pi_F^c) \leq p_o^{[\frac{n}{k}]},$$

*где $[\frac{n}{k}]$ - целая часть $\frac{n}{k}$, $\Pi_F^c$ - дополнение $\Pi_F$.*

Пусть $M\{P_1^*, \ldots, P_n^*\} = \cap_{i=1}^n L_{P_i^*}$.

**Лемма 2.** *Пусть $H(\xi)$ - функция ширины выпуклого тела $\mathbf{K}$, а $H_{P_1,\ldots,P_n}(\xi)$ - функция ширины многогранника $M\{P_1^*, \ldots, P_n^*\}$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int H_{P_1,\ldots,P_n}(\xi) I_{\Pi_{B(r)}}(P_1, \ldots, P_n) dP_1 \cdots dP_n = H(\xi),$$

*где $B(r)$ - шар с радиусом $r$, содержащий тело $\mathbf{K}$.*

## 3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Рассмотрим $M\{P_1^*, \ldots, P_n^*\} = \cap_{i=1}^n L_{P_i^*}$ при $(P_1, \ldots, P_n) \in \Pi_{B(r)}$. Каждое ребро многогранника $M\{P_1^*, \ldots, P_n^*\}$ находится на пересечении двух касательных плоскостей к $P_i^*$ и $P_j^*$. Это пересечение обозначим через $g_{ij}$, а соответствующее ребро - через $Q_iQ_j$. Согласно [1], функция ширины $H_{P_1,\ldots,P_n}(\xi)$ многогранника $M\{P_1^*, \ldots, P_n^*\}$ имеет следующее представление :

$$2\pi H_{P_1,\ldots,P_n}(\xi) I_{\Pi_{B(r)}}(P_1, \ldots, P_n) =$$
$$= I_{\Pi_{B(r)}}(P_1, \ldots, P_n) \sum_{i<j \;\; i,j=1}^{n} I_{D_{ij}}(P_1, \ldots, P_n) |Q_iQ_j| \int_{[\nu_{ij}]} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{ij}, \phi) d\phi, \tag{2}$$

где $D_{ij} = \{(P_1, \ldots, P_n) : M\{P_1^*, \ldots, P_n^*\}$ имеет ребро на $g_{ij}\}$, $|Q_iQ_j|$ - длина ребра $Q_iQ_j$, $[\nu_{ij}]$ - внешний двугранный угол $Q_iQ_j$, $\Omega_{ij}$ - направление $g_{ij}$.

Усредним обе части (2). Из соображения симметрии

$$2\pi H(\xi) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{2} \int_{(S^2)^n} \Big[ I_{D_{12}} \cdot I_{\Pi_{B(r)}} \cdot |Q_1Q_2| \times \times \int_{[\nu_{12}]} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{12}, \phi) d\phi \Big] dP_1 \cdots dP_n. \tag{3}$$

Возьмем $P_1$ в качестве полюса и запишем $P_2$ в $(\varphi, \nu)$-координатах :

$$dP_2 = f(\omega)d\omega = f(\varphi, \nu) \sin \nu d\nu d\varphi.$$

Следовательно, получаем

$$2\pi H(\xi) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{2} \int_{S^2\times S^1} \left[ \int_{[\nu]} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega, \phi) d\phi \right] \cdot \left[ \int_{(S^2)^{n-2}} I_{D_{12}} \cdot I_{\Pi_{B(r)}} \times \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} I_{Q_1Q_2}(l) dl \right] dP_3 \cdots dP_n \right] dP_1\, f(\varphi, \nu) \sin \nu d\nu d\varphi, \tag{4}$$

где $[\nu] = [\nu_{12}]$, $\Omega = \Omega_{12}$, $l$ - расстояние от точки на $g_{12}$ до проекции $P_i^*$.

## 4. СЛУЧАЙ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим случай равномерного распределения, т.е. $f(\omega) = (S_o C(\omega))^{-1}$, где $S_o$ - полная площадь поверхности $\mathbf{K}$, $C(\omega)$ - гауссова кривизна в точке $P_\omega^*$ на $\partial\mathbf{K}$ с нормалью $\omega$. Рассмотрим конус $C(\mathbf{K}, l)$ с вершиной в точке $l \in g_{12}$, который касается $\partial\mathbf{K}$ (см. Рис. 2).

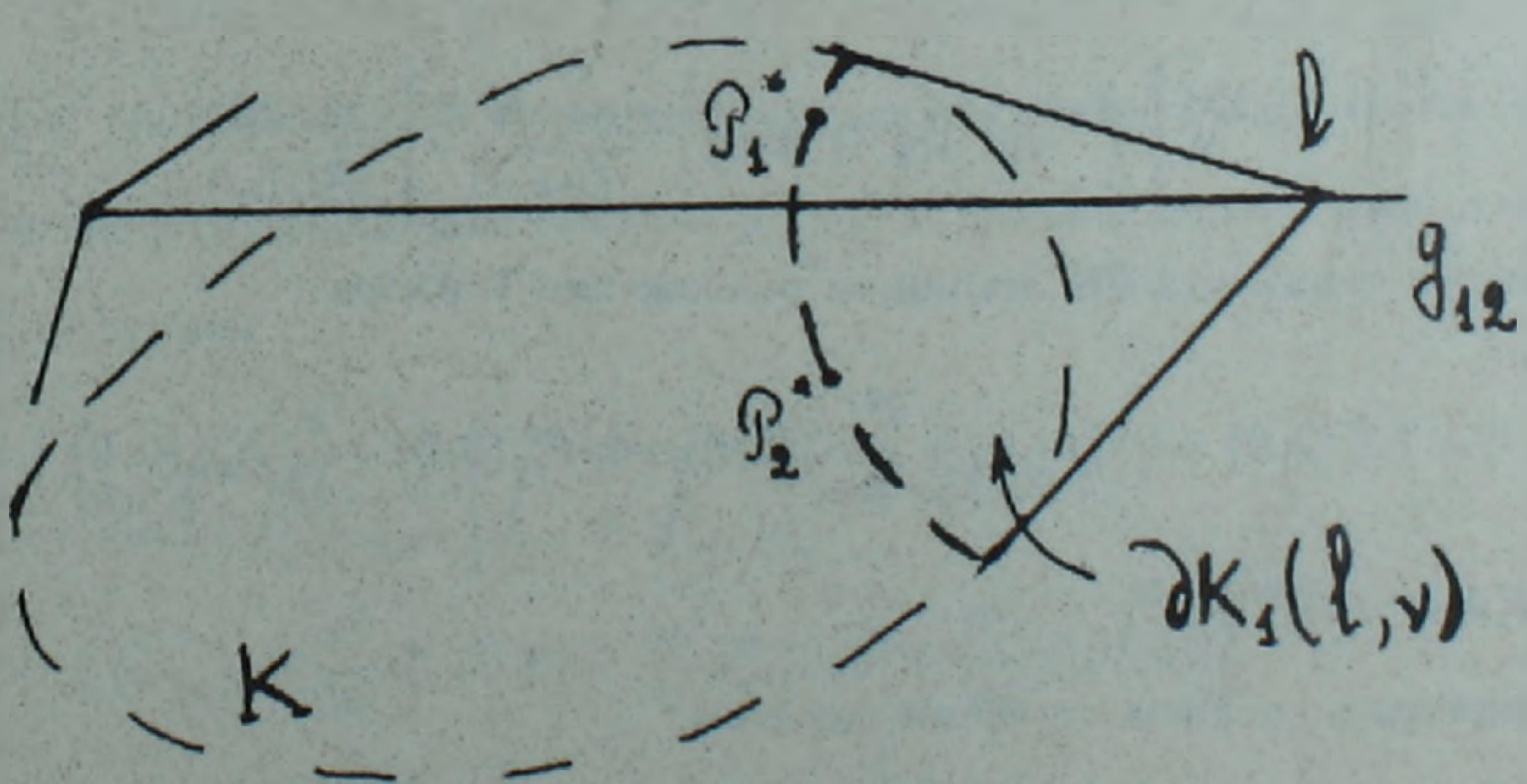


Рис. 2.

Касательная кривая разбивает $\partial\mathbf{K}$ на две части. Пусть $S(l,\nu)$ - площадь части $\partial\mathbf{K}_1(l,\nu)$ (см. Рис. 2). Применяя теорему Фубини во внутреннем интеграле (4), получаем

$$2\pi H(\xi) = \lim_{n\to\infty}\binom{n}{2}\int_{S^2\times S^1\times[0,\frac{\pi}{2}]}\left[\int_{[\nu]}\sin^2\alpha(\xi,\Omega,\phi)d\phi\right]\times$$

$$\times\left[\int_{-R(\nu,l)}^{R(\nu,l)}(1-\frac{S(\nu,l)}{S_o})^{n-2}dl\right]\frac{\sin\nu}{S_o^2C(\omega)C(\nu,\varphi)}d\omega d\nu d\varphi, \qquad (5)$$

где $C(\nu,\varphi)$ - гауссова кривизна в точке со сферическими координатами $(\nu,\varphi)$, соответствующая $\omega$, $R(\nu,l)\le R$.

Заметим, что $(\nu,l)$ можно рассматривать только в $[0,\nu_o]\times[-l_o,l_o]$, где $\nu_o$ и $l_o$ - - сколь угодно малые фиксированные числа. В самом деле, существует $q>0$ такое, что

$$1 > S_o^{-1}S(\nu,l) > q > 0$$

для всех $(\nu,l)\notin[0,\nu_o]\times[-l_o,l_o]$. Следовательно, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{2}|\int_{S^2\times S^1}\left[\int_{([0,\nu_o]\times[-l_o,l_o])^c}(1-\frac{S(\nu,l)}{S_o})^{n-2}\left[\int_{[\nu]}\sin^2\alpha(\xi,\Omega,\phi)d\phi\right]\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\sin\nu\, d\nu\, dl}{C(\nu,l)}\right]\frac{d\omega\, d\varphi}{S_o^2C(\omega)}|\le\lim_{n\to\infty}\binom{n}{2}A_o(1-q)^{n-2}=0.$$

Таким образом, получаем

$$2\pi H(\xi) = \lim_{n\to\infty}\binom{n}{2}\int_{S^2\times S^1}\left[\int_{[0,\nu_o]\times[-l_o,l_o]}(1-\frac{S(\nu,l)}{S_o})^{n-2}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\int_{[\nu]}\sin^2\alpha(\xi,\Omega,\phi)d\phi\right]\frac{\sin\nu\, d\nu\, dl}{C(\nu,l)}\right]\frac{d\omega\, d\varphi}{S_o^2C(\omega)}. \qquad (6)$$

Используя гладкость $\partial\mathbf{K}$, напишем разложение Тейлора

$$S(\nu,l) = l\,S_l'(0,0)+\nu S_\nu'(0,0)+\frac{l^2}{2}S_{ll}''(0,0)+l\nu S_{l\nu}''(0,0)+\frac{\nu^2}{2}S_{\nu\nu}''(0,0)+R(\nu,l), \quad (7)$$

где $R(\nu,l)=o(l^2+\nu^2)$.

Из теоремы о среднем значении находим

$$\int_{[\nu]}\sin^2\alpha(\xi,\Omega,\phi)d\phi = |\nu|\sin^2\alpha(\xi,\Omega,\phi_\nu), \quad (\phi_\nu\in|\nu|) \qquad (8)$$

После подстановки (7) и (8) в (6) и замены переменных $\alpha = \nu\sqrt{n}$, $\beta = l\sqrt{n}$, получаем

$$H(\xi) = (2\pi)^{-1} \int_{S^2 \times S^1} \frac{\sin^2 \alpha(\xi, \omega, \varphi + \frac{\pi}{2})}{2C^2(\omega)} \times$$

$$\times \left[\int_0^\infty \alpha^2 d\alpha \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2} S''_{\nu\nu}(0,0) - \alpha\beta S''_{l\nu}(0,0) - \frac{\beta^2}{2} S''_{ll}(0,0)} d\beta\right] d\omega\, d\varphi, \tag{9}$$

где $\alpha(\xi, \omega, \varphi)$ - угол между направлением $\varphi$ на $e_\omega$ (плоскость с нормалью $\omega$) и следом $e_\xi$ на $e_\omega$.

## 5. СЛУЧАЙ ОБЩЕГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

**Теорема 1.** *Флаг-представление функции ширины $H(\xi)$ гладкого тела $\mathbf{K}$, полученное при стохастической аппроксимации Делоне не зависит от плотности распределения $\mathbf{P}$.*

**Доказательство.** Из (4) и теоремы Фубини следует, что

$$2\pi H(\xi) = \lim_{n \to \infty} \binom{n}{2} \int_{S^2 \times S^1} \left[\int_{(0,\pi) \times \mathbb{R}^1} \left[\int_{[\nu]} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega, \phi) d\phi\right] \times\right.$$

$$\left. \times (1 - \mathbf{P}(\nu, l))^{n-2} f(\varphi, \nu) \sin\nu\, d\nu\, dl\right] f(\omega) d\omega\, d\varphi, \tag{10}$$

где $\Omega = \Omega_{12}$, $[\nu] = [\nu_{12}]$, $\mathbf{P}(\nu, l) = \mathbf{P}(\{P^* \in \partial\mathbf{K}_1(\nu, l)\})$ (см. Рис. 2).

Мы можем рассматривать переменные $(\nu, l)$ в $[0, \nu_o] \times [-l_o, l_o]$, где $\nu_o$ и $l_o$ сколь угодно малы.

Из теоремы о среднем значении следует, что

$$\mathbf{P}(\nu, l) = S(\nu, l) f_1(\omega_{\nu, l}), \tag{11}$$

где $f_1(\omega) = f(\omega) C(\omega)$, $\omega_{\nu, l}$ - точка на сферическом образе $\partial\mathbf{K}_1(\nu, l)$ (см. Рис. 2).

После соответствующей подстановки в (10) и замены переменных $\alpha = \nu\sqrt{n}$, $\beta = l\sqrt{n}$, получаем

$$2\pi H(\xi) = \lim_{n \to \infty} \binom{n}{2} \int_{S^2 \times S^1} \left[\int_0^{\nu_o\sqrt{n}} \int_{-l_o\sqrt{n}}^{l_o\sqrt{n}} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega, \phi) \times\right.$$

$$\times \left[1 - f_1(\omega_{\nu_n, l_n})\left(\frac{\alpha^2}{2n} S''_{\nu\nu}(0,0) + \frac{\alpha\beta}{n} S''_{\nu l}(0,0) + \frac{\beta^2}{2n} S''_{ll}(0,0)\right)\right]^{n-2} \times \tag{12}$$

$$\left. \times \frac{\alpha(\alpha + o(n^{-\frac{1}{2}})\sqrt{n})}{n^2 C(\varphi, \frac{\alpha}{\sqrt{n}})} f_1(\varphi, \frac{\alpha}{\sqrt{n}}) d\alpha d\beta\right] \frac{f_1(\omega)}{C(\omega)} d\omega d\varphi,$$

где $\nu_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$, $l_n = \frac{\beta}{\sqrt{n}}$.

Меняя порядок интегрирования и суммирования, а также учитывая, что

$$f_1(\omega_{\nu_n, l_n}) \to f_1(\omega)$$

при $n \to \infty$, получаем (9).

## 6. ПЛОТНОСТЬ ФЛАГ-ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Нам необходима следующая

**Лемма 3.** $S'_\nu(0,0)$, $S'_l(0,0)$, $S''_{ll}(0,0)$, $S''_{l\nu}(0,0)$, $S''_{\nu\nu}(0,0)$ *зависят только от значений производных первого и второго порядков поверхности* $\partial\mathbf{K}$ *в точке* $P^*_\omega$ *с нормалью* $\omega$.

Следовательно, соответствующие производные можем вычислить для соприкасающегося параболоида $\partial\mathbf{K}$ в точке $P^*_\omega$ с нормалью $\omega$.

После соответствующих вычислений и подстановки в (9) получаем следующую теорему.

**Теорема 2.** *Для любого достаточно гладкого выпуклого тела* **K** *имеет место следующее флаг-представление :*

$$H(\xi) = (2\pi^2)^{-1} \int_{S^2 \times S^1} \sin^2 \alpha(\xi, \omega, \varphi) \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{k^2(\omega, \varphi)} d\omega\, d\varphi, \tag{13}$$

*где* $k_i$, $i = 1, 2$ *- главные нормали кривизны,* $k(\omega, \varphi)$ *- нормальная кривизна в направлении* $\varphi$ *в точке* $P^*_\omega$ *поверхности* $\partial\mathbf{K}$ *с нормалью* $\omega$.

**Замечание.** Флаг-представление (13) совпадает с флаг-представлением, полученным при стохастической аппроксимации Вороного (см. [3]).

Автор выражает благодарность Р. В. Амбарцумяну за постановку задачи и ценные советы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, "Combinatorial integral geometry, metric and zonoids", Acta Appl. Math., vol. 9, 1987.
2. Г. Ю. Панина, "Выпуклые тела и трансляционно-инвариантные меры", Зап. науч. семинаров Ленинград. отд. Матем. ин-та АН СССР, том 157, 1986.
3. Р. Г. Арамян, "О стохастической аппроксимации выпуклых тел", Изв. АН Армении, Математика, том 22, №5, стр. 427 - 438, 1986.

23 Ноября 1992

Институт математики
НАН Армении