

О МЕРАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ФЛАГОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Г. С. Сукиасян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, №2, 1993

В работе рассматривается задача порождения знакопеременных мер в пространстве $\mathbb{E}$ плоскостей в $\mathbb{R}^3$ с помощью флаговых функций с использованием алгоритма из комбинаторной интегральной геометрии. Найдены условия на флаговые функции, обеспечивающие порождение меры в $\mathbb{E}$. Найдены также дополнительные условия, обеспечивающие неотрицательность порожденной меры.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{R}^3$ - трехмерное евклидово пространство, $\mathbb{E}$ - пространство плоскостей в $\mathbb{R}^3$, $P_1|P_2$ - множество плоскостей, разделяющих точки P_1 и P_2 . Для всякой меры μ в $\mathbb{E}$, $\mu(P_1|P_2)$ как функция от P_1, P_2 является псевдометрикой в $\mathbb{R}^3$. Одна из формулировок 4-ой проблемы Гильберта в $\mathbb{R}^3$ может быть изложена следующим образом : можно ли непрерывную и линейно-аддитивную метрику $F(P_1, P_2)$ представить в виде

$$F(P_1, P_2) = \mu(P_1 | P_2), \quad (1)$$

где μ - некоторая мера в $\mathbb{E}$?

Известно (см. [1]), что для достаточно гладких метрик F , имеет место представление (1), если под μ понимать *обобщенную меру*, т.е. разрешить μ принимать и отрицательные значения. Однако, восстановление знакопеременной меры μ по данной метрике F требует множества сложных вычислений. Некоторые задачи здесь остаются нерешенными, например, описание класса псевдометрик, порождаемых неотрицательными мерами посредством (1), описание класса функций на отрезках, которые могут быть представлены с помощью знакопеременной

меры посредством (1), описание класса знакопеременных мер, порождающих метрики посредством (1).

В настоящей работе рассматривается задача порождения знакопеременных мер в пространстве $\mathbb{E}$ плоскостей в $\mathbb{R}^3$ с помощью т.н. флаговых функций с использованием алгоритма из комбинаторной интегральной геометрии [2, 3]. Найдены условия на флаговые функции, обеспечивающие порождение меры в $\mathbb{E}$. Найдены также дополнительные условия, обеспечивающие неотрицательность порожденной меры.

§1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ КОМБИНАТОРНОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Напомним некоторые основные факты комбинаторной интегральной геометрии (см. [2], [3], [6]). Пусть $\{P_i\}$ - конечное множество точек в $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{R}(\{P_i\})$ - соответствующее кольцо Радона подмножеств пространства $\mathbb{E}$, а $\mathcal{R} = \cup \mathcal{R}(\{P_i\})$, где объединение берется по всем конечным множествам $\{P_i\}$. Для любого $B \in \mathcal{R}$ и каждой знакопеременной меры μ в $\mathbb{E}$ значение $\mu(B)$ можно представить в виде конечной суммы

$$\mu(B) = \sum_w c_w W(w), \quad (2)$$

где c_w - целочисленные коэффициенты, зависящие от B , но не от выбора меры μ , W - функция, определенная в пространстве клиньев. Дадим определение клина в терминах т. н. флагов. Флагом f называется тройка (P, γ, e) , где P - точка, γ - прямая, e - плоскость, причем $P \in \gamma \subset e$. Мы будем использовать также обозначение $f = (P, \gamma, \varphi)$, где φ есть угол поворота плоскости e вокруг γ .

Пусть ν - отрезок P_1, P_2 , обозначим через $\bar{\nu}$ прямую, содержащую ν . Множество флагов (см. Рис. 1)

$$w(\nu, \Phi) = \{(P, \gamma, \varphi) : P \in \nu, \gamma = \bar{\nu}, \varphi \in \Phi\}, \quad \Phi \subset [0, \pi)$$

называется клином (ν называется ребром, а Φ - раствором клина w).

В [2] функция W зависит от выбора знакопеременной меры μ . При каждом выборе μ , W порождает семейство знакопеременных мер $\{m_\gamma\}$ [3], каждая m_γ определена на линейном семействе флагов

$$\{(P, \gamma, \varphi) : P \in \gamma, \varphi \in [0, \pi)\}$$

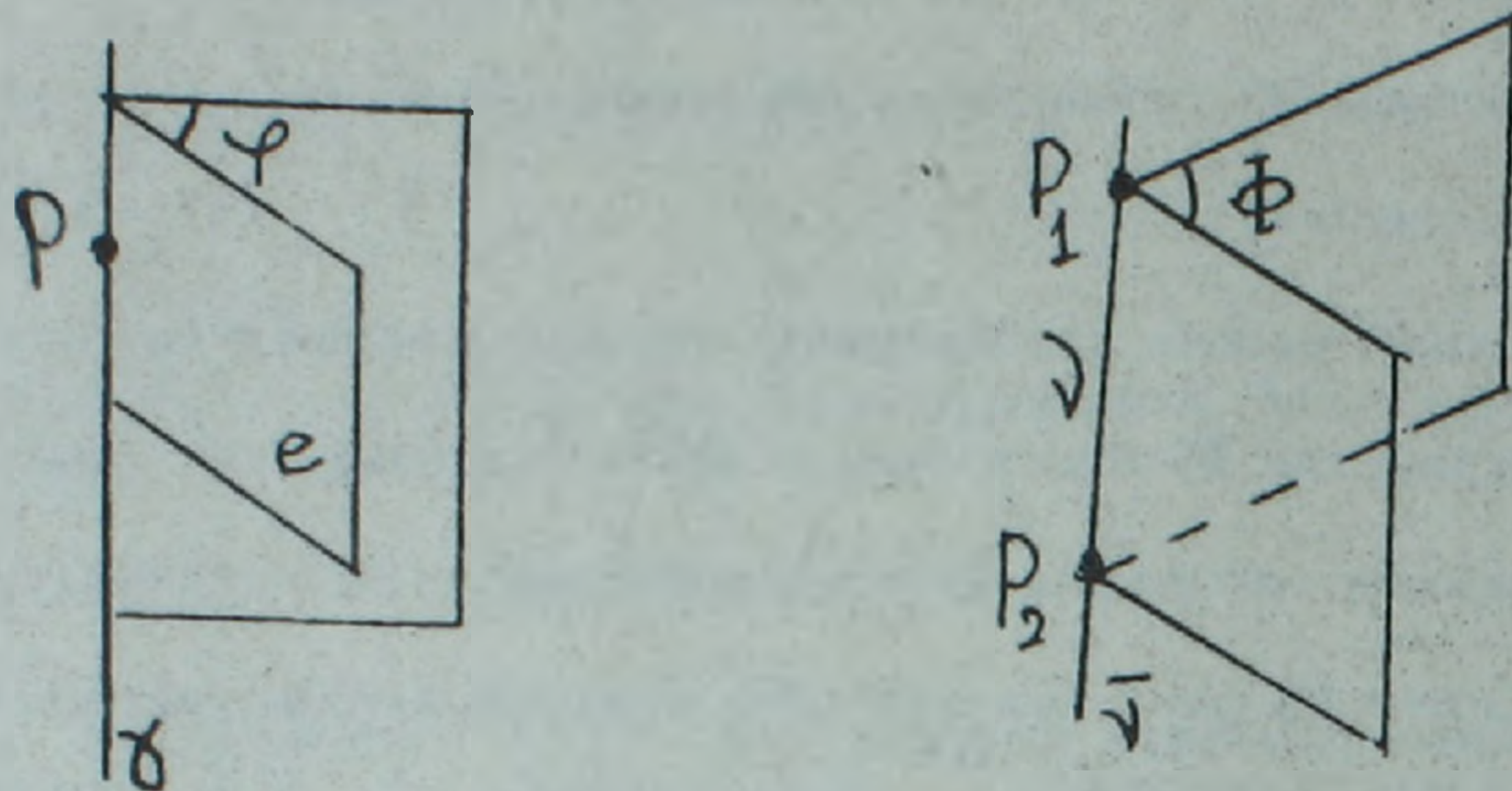


Рис. 1. Флаг и клин

соотношением

$$W(w(\nu, \Phi)) = m_{\bar{\nu}}(w(\nu, \Phi)). \quad (3)$$

Р. В. Амбарцумяном была поставлена следующая задача. Предположим, что задано семейство знакопеременных мер m_γ . Каким условиям должно удовлетворять семейство мер $\{m_\gamma\}$, чтобы оно порождало знакопеременную меру μ на $\mathbb{E}$ посредством (2), (3). Связь с 4-ой проблемой Гильберта в $\mathbb{R}^3$ в том, что если μ - неотрицательная мера, то

$$F(P_1, P_2) = m_{\bar{\nu}}(w(\nu, [0, \pi])), \quad \nu = [P_1, P_2] \quad (4)$$

есть *псевдометрика* в $\mathbb{R}^3$.

Мы решаем эту задачу при дополнительном условии существования *плотности* ρ :

$$m_{\bar{\nu}}(w(\nu, \Phi)) = \int_{P_1}^{P_2} dx \int_{\Phi} \rho(x, \bar{\nu}, \varphi) d\varphi. \quad (5)$$

Плотность ρ есть функция, определенная в пространстве флагов и в силу (4), (5) ее можно назвать *дезинтегрированной метрикой*. Таким образом, нашу задачу можно сформулировать так: какие условия необходимы и достаточны, чтобы дезинтегрированная метрика ρ порождала меру (или знакопеременную меру) μ посредством (2), (3), (5).

§2. ФУНКЦИОНАЛЫ Ψ И Ψ'

Пусть ρ - флаговая функция. Ниже (см. (10) и (13)), мы используем разложение Тейлора функции ρ . Предположим, что ρ столь гладкая, что обеспечивается справедливость разложений (10) (13).

Для заданной флаговой функции ρ построим клиновую функцию W посредством (3) и (5). Следуя подходу, предложенному в [4], [5] и подражая комбинаторной формуле (2), построим следующий функционал Ψ в $\mathcal{R}$:

$$\Psi(B) = \sum_w c_w W(w).$$

Функционал Ψ конечно-аддитивен в $\mathcal{R}$. Рассмотрим значения функционала Ψ на множествах $Q|S$, определенных ниже. Рассмотрим плоскость $e_o \subset \mathbb{R}^3$, выпуклый многоугольник $S \subset e_o$ с вершинами $\{P_i\}$ и точку $Q \in \mathbb{R}^3$ вне e_o . Предположим, что ортогональная проекция O точки Q на e_o лежит внутри S . Обозначим через $Q|S$ множество плоскостей, отделяющих точку Q от S . Через T обозначим пирамиду с вершиной Q и основанием S . Согласно (2) имеем (см. [3])

$$\Psi(Q|S) = \sum_{V_1} W(b_i, \Phi'_i) - \sum_{V_2} W(a_j, \Phi''_j). \quad (6)$$

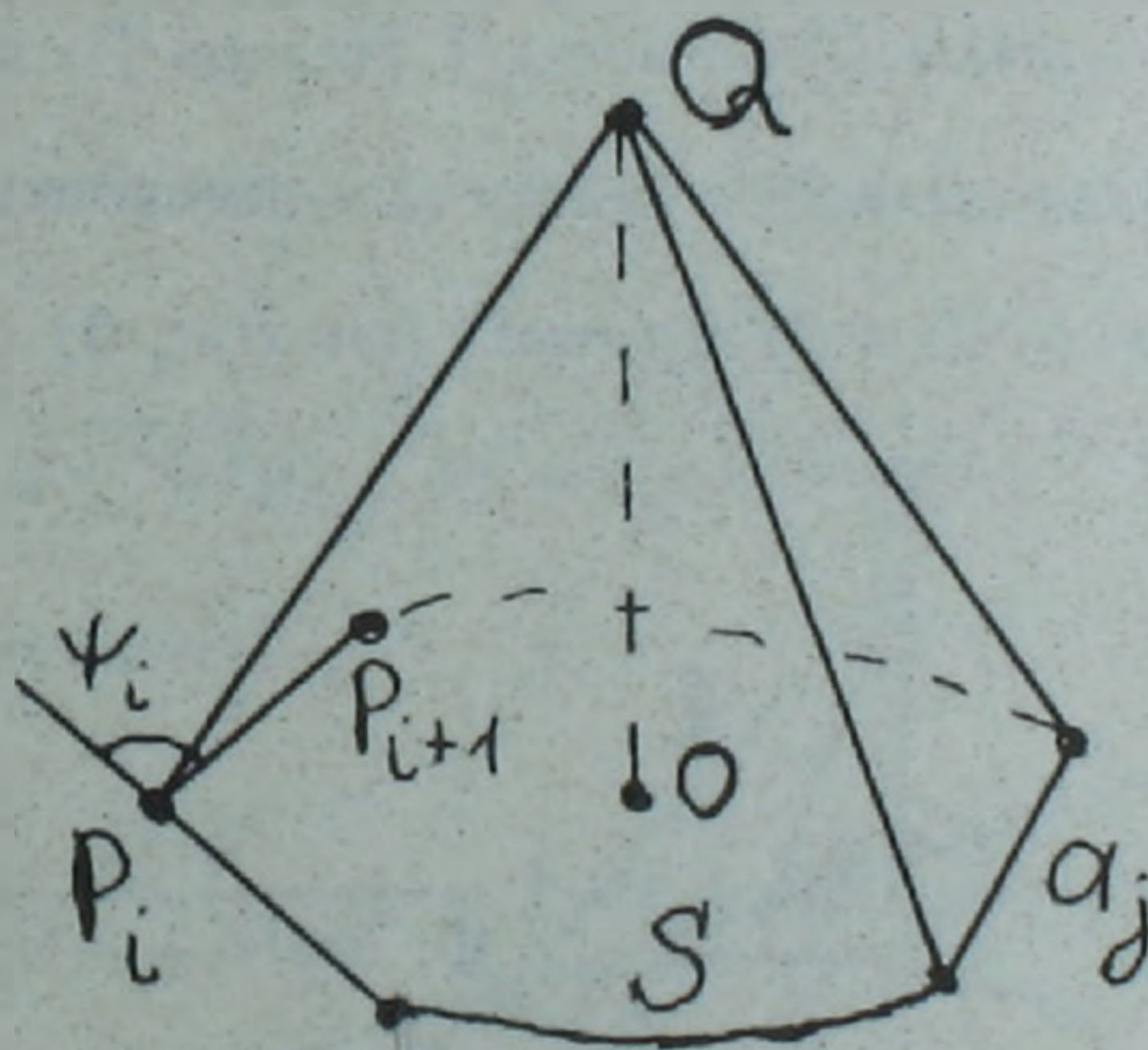


Рис. 2.

В (6) первое суммирование ведется по множеству (см. Рис. 2):

$$V_1 = \{w = (b_i, \Phi'_i) : b_i = QP_i - \text{боковое ребро пирамиды } T,$$

Φ'_i - внешний двугранный угол при $b_i\}$.

Второе суммирование ведется по множеству

$$V_2 = \{w = (a_j, \Phi''_j) : a_j = P_jP_{j+1} - \text{сторона основания},$$

Φ''_j - внутренний двугранный угол при $a_j\}$.

При исследовании правой части (6) нам предстоит переход в первой сумме к интегральному выражению для W . Обозначим через φ' угол между ребром P_i, P_{i+1} и следом на e_o плоскости флага. Перейдем от переменной φ к φ' :

$$W(w(b_i, \Phi'_i)) = \int_{b_i} dx \int_{\psi_i} \rho(x, \bar{b}_i, \varphi) J d\varphi',$$

где J - якобиан, ψ_i - внешний угол многоугольника S при вершине P_i . Вместе с Ψ рассмотрим предел функционала Ψ , определенный на множествах $Q|S$, где $S \subset e_o$ - уже выпуклая область с границей, обладающей гладкой кривизной. Этот предел определяет другой функционал Ψ' на вышеупомянутых множествах. Ψ' задается формулой

$$\Psi'(Q|S) = \int_{\partial S} J k(l) dl \int_{b(l)} \rho(x, \bar{b}, e_l(l)) dx - \int_{\partial S} dl \int_{\Phi(l)} \rho(l, t(l), \varphi) d\varphi, \quad (7)$$

где ∂S - граница S , l - переменная точка из ∂S , $b(l)$ - отрезок Ql , $k(l)$ - кривизна ∂S в точке l , флаговая плоскость $e_l(l)$ касается T (теперь T - конус) по образующей b , раствор $\Phi(l)$ есть двугранный угол между e_o и плоскостью, проходящей через вершину Q и касательную $t(l)$ к ∂S в точке l (см. Рис. 3).

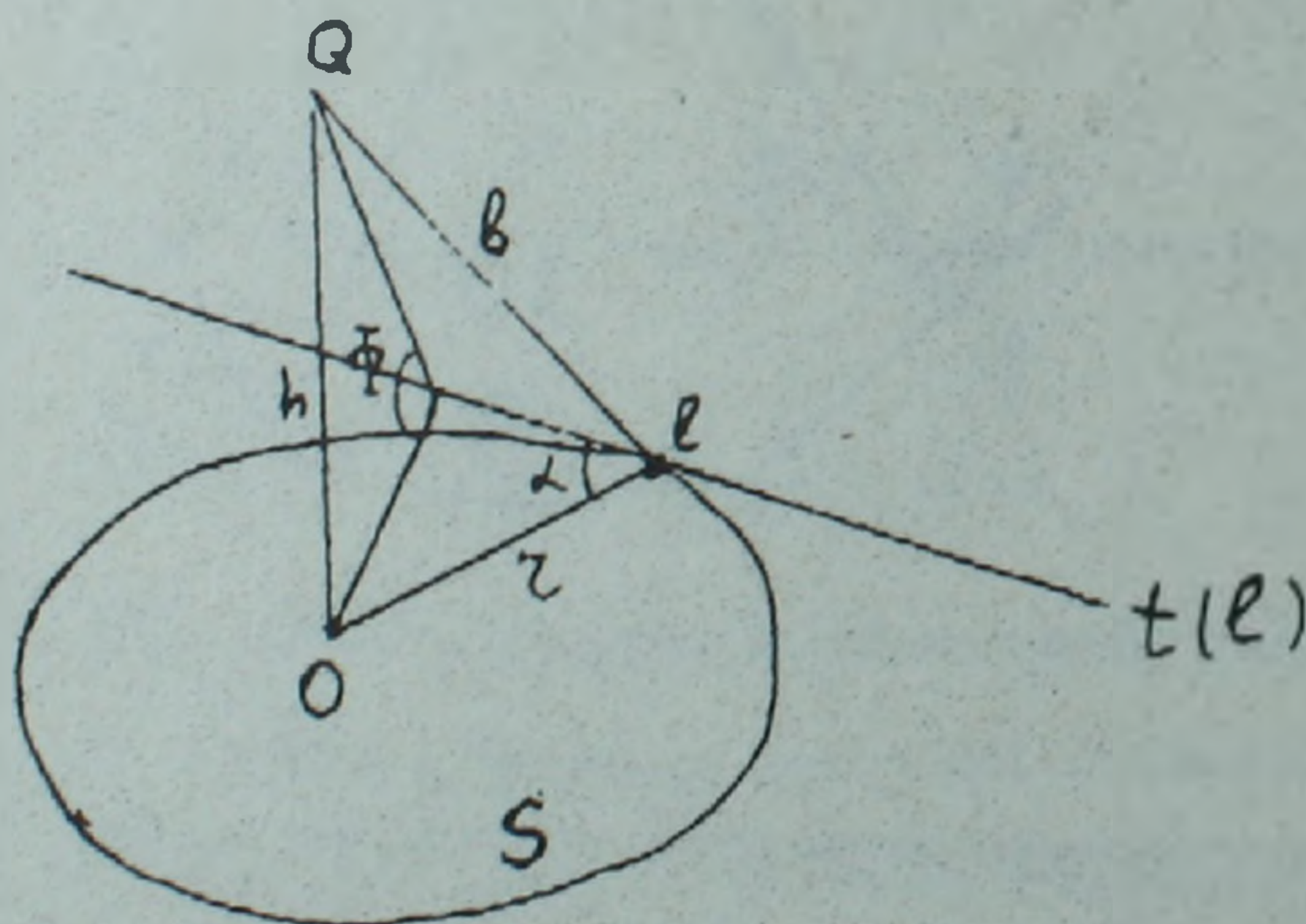


Рис. 3

На рис. 3 применены следующие обозначения: $r(l)$ - это радиус-вектор точки $l \in \partial S$, h - высота QO , α - угол между r и касательной $t(l)$. В этих обозначениях имеем (здесь и далее отрезки и их длины обозначены одинаково)

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{h}{r \sin \alpha}. \quad (8)$$

В (7) мы использовали соотношение $d\varphi' = k dl$. С помощью Рис.4 и известных формул сферической тригонометрии находим связь между углами φ и φ'

$$\operatorname{tg} \varphi = \cos \beta \operatorname{ctg}(\alpha + \varphi'), \quad \cos \beta = h/b.$$

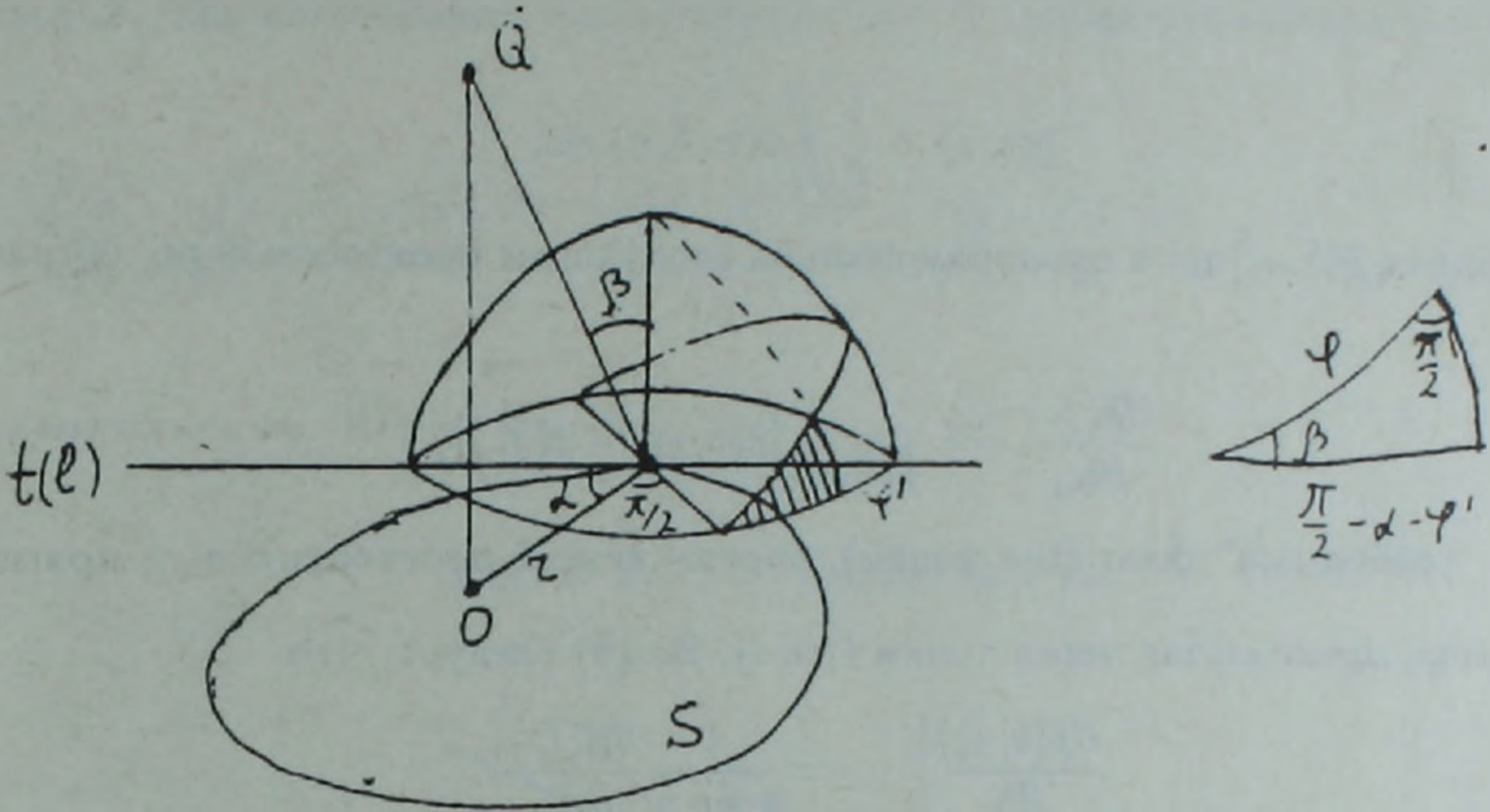


Рис. 4. Зависимость между φ и φ'

Вычислим значение якобиана J в точке $\varphi' = 0$:

$$J = \frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{\cos \beta}{\sin^2 \alpha} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{\cos \beta}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta \cos^2 \alpha} = \frac{bh}{b^2 \sin^2 \alpha + h^2 \cos^2 \alpha}.$$

Подставляя в (7), получаем

$$\Psi'(Q|S) = h \int_{\partial S} \frac{bk dl}{b^2 \sin^2 \alpha + h^2 \cos^2 \alpha} \int_b \rho(x, \bar{b}, e_i(l)) dx - \int_{\partial S} dl \int_0^\Phi \rho(l, t(l), \varphi) d\varphi. \quad (9)$$

Наша цель - получить разложение Тейлора для (9) при $h \downarrow 0$. Обозначим через $f_1(l)$ флаг $(l, t(l), e_o)$. Имеем

$$\rho(l, t(l), \varphi) = \rho(f_1) + \varphi \frac{\partial \rho(f_1)}{\partial \varphi} + \frac{\varphi^2}{2} \frac{\partial^2 \rho(f_1)}{\partial \varphi^2} + o(\varphi^2).$$

С помощью (8) получим

$$\begin{aligned} \int_0^\Phi \rho(l, t(l), \varphi) d\varphi &= \Phi \rho(f_1) + \frac{\Phi^2}{2} \frac{\partial \rho(f_1)}{\partial \varphi} + \frac{\Phi^3}{6} \frac{\partial^2 \rho(f_1)}{\partial \varphi^2} + o(\Phi^3) = \\ &= \frac{h \rho(f_1)}{r \sin \alpha} + \frac{h^2}{2} (r \sin \alpha)^{-2} \frac{\partial \rho(f_1)}{\partial \varphi} + \frac{h^3}{6} (r \sin \alpha)^{-3} \left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2}(f_1) - 2\rho(f_1) \right] + o(h^3). \quad (10) \end{aligned}$$

Заметим, что $b^2 = h^2 + r^2$ и величины r и α не зависят от h . Следовательно

$$\frac{b^2}{b^2 \sin^2 \alpha + h^2 \cos^2 \alpha} = \frac{\sin^{-2} \alpha}{1 + \frac{h^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{h^2 + r^2}} = \sin^{-2} \alpha \left(1 - \frac{h^2}{r^2} \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) + o(h^3). \quad (11)$$

Через $\bar{\rho}(b, e)$ обозначим интегральное среднее значение плотности ρ на отрезке b :

$$\bar{\rho}(b, e) = \frac{1}{b} \int_b \rho(x, \bar{b}, e) dx.$$

Производная $\bar{\rho}(b, e_i)$ по h пропорциональна следующей производной по направлению:

$$\frac{\partial \bar{\rho}(f_r)}{\partial n_\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Phi \rightarrow 0} \frac{1}{\Phi} [\bar{\rho}(b, e_i) - \bar{\rho}(f_r)],$$

где f_r - "свободный" флаг (без точки), определяемый плоскостью e_o и прямой $\bar{r}$ ($\bar{r}$ - прямая, проходящая через точки O и I). Из (8) следует, что

$$\left. \frac{\partial \bar{\rho}(b, e_i)}{\partial h} \right|_{h=0} = \frac{1}{r \sin \alpha} \frac{\partial \bar{\rho}(f_r)}{\partial n_\alpha}.$$

Заметим, что при $\alpha = 0$ имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial n_0} = \frac{\partial \rho}{\partial \varphi}. \quad (12)$$

Для плотности $\bar{\rho}$ имеет место следующее разложение:

$$\bar{\rho}(b, e_i) = \bar{\rho}(f_r) + \frac{h}{r \sin \alpha} \frac{\partial \bar{\rho}(f_r)}{\partial n_\alpha} + \frac{h^2}{2r^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 \bar{\rho}(f_r)}{\partial n_\alpha^2} + o(h^2). \quad (13)$$

Подставляя выражения (10), (11) и (13) в (9), получаем следующий результат

Лемма 1. Для любой выпуклой области S с границей ∂S , имеющей гладкую кривизну k и для достаточно гладкой флаговой плотности ρ имеет место следующее разложение:

$$\Psi'(Q|S) = A'_1(\rho, S)h + A'_2(\rho, S)h^2 + A'_3(\rho, S)h^3 + o(h^3), \quad (14)$$

где

$$A'_1(\rho, S) = \int_{\partial S} \left[\frac{k \bar{\rho}(f_r)}{\sin^2 \alpha} - \frac{\rho(f_i)}{r \sin \alpha} \right] dl, \quad (15)$$

$$A'_2(\rho, S) = \int_{\partial S} \left[\frac{k}{r \sin^3 \alpha} \frac{\partial \bar{\rho}(f_r)}{\partial n_\alpha} - \frac{1}{2r^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial \rho(f_i)}{\partial \varphi} \right] dl, \quad (16)$$

$$A'_3(\rho, S) = \int_{\partial S} \left\{ \frac{k}{2r^2 \sin^4 \alpha} \left[\frac{\partial^2 \bar{\rho}(f_r)}{\partial n_\alpha^2} - 2 \cos^2 \alpha \bar{\rho}(f_r) \right] - \frac{1}{6r^3 \sin^3 \alpha} \left[\frac{\partial^2 \rho(f_i)}{\partial \varphi^2} - 2\rho(f_i) \right] \right\} dl. \quad (17)$$

Пример. Рассмотрим в $\mathbb{E}$ (неотрицательную) меру μ_0 , инвариантную относительно группы евклидовых движений пространства $\mathbb{R}^3$. Инвариантной мере μ_0 соответствует флаговая плотность $\rho(x, \gamma, e) = c = \text{const}$, см. [3, 6].

Лемма 2. Для постоянной плотности $\rho = c$ и для любой области S имеет место

$$A'_1(c, S) = A'_2(c, S) = 0, \quad A'_3(c, S) \geq 0.$$

Доказательство. Имеем (см. Рис. 5) :

$$k dl = d\varphi', \quad \sin \alpha dl = r d\psi.$$

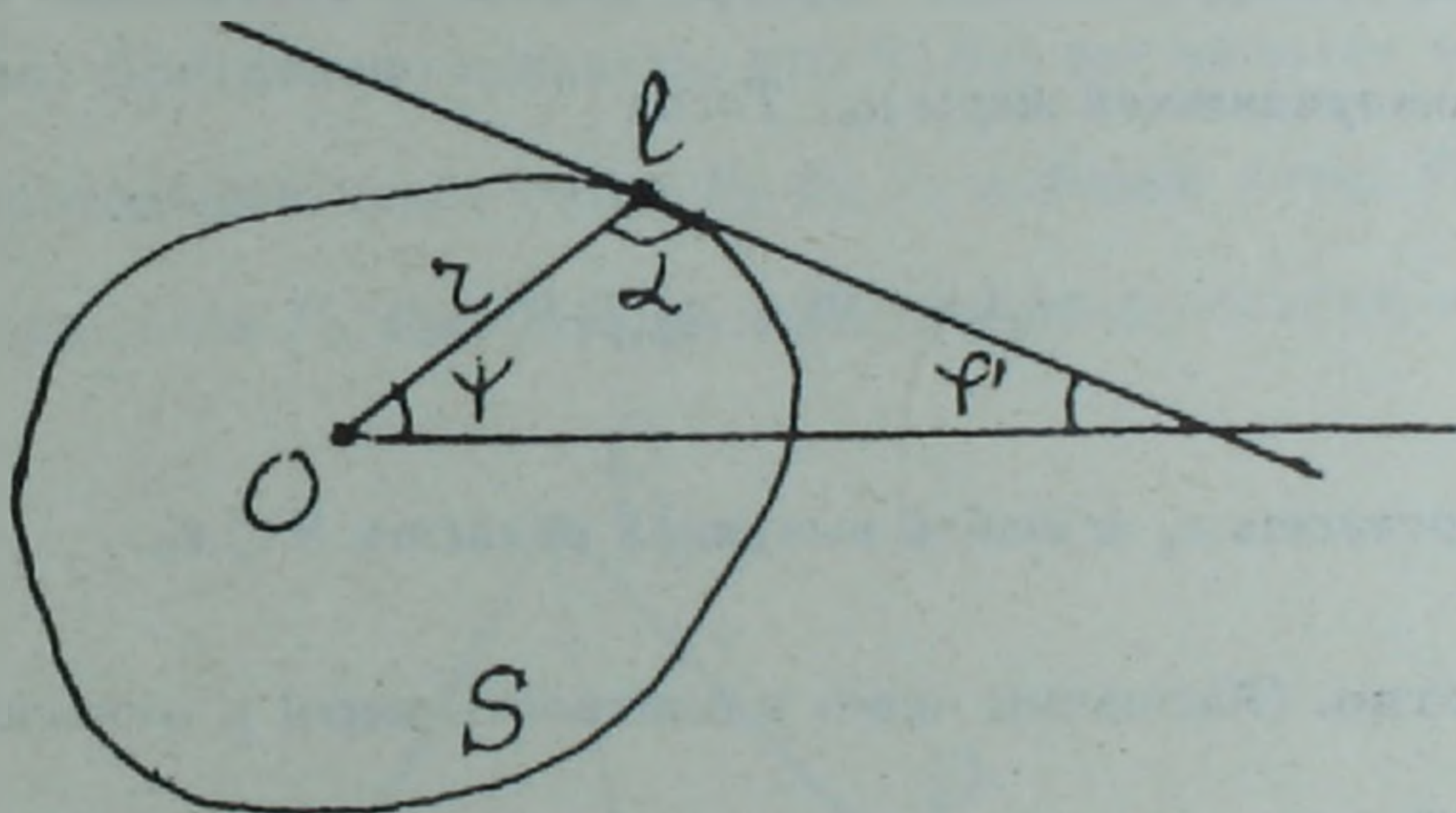


Рис. 5.

Отсюда получаем другой вид формулы (15) :

$$A'_1(\rho, S) = \int_0^{2\pi} \bar{\rho}(f_r) \sin^{-2} \alpha d\varphi' - \int_0^{2\pi} \rho(f_l) \sin^{-2} \alpha d\psi. \quad (18)$$

В случае $\rho(x, \gamma, e) = c = \text{const}$ имеем $\bar{\rho} = c$. Из (18) и (16) следует $A'_1 = A'_2 = 0$.

Применяя Лемму 1, получаем

$$\mu_0(Q|S) = A'_3(c, S)h^3 + o(h^3).$$

Однако, инвариантная мера μ_0 неотрицательна, следовательно, $A'_3(c, S) \geq 0$.

Лемма 2 доказана.

§3. ПОРОЖДЕНИЕ МЕР ПОСРЕДСТВОМ ФУНКЦИОНАЛА Ψ

Лемма 3. Для любого выпуклого многоугольника $S \subset e_o$ имеет место

$$\Psi(Q|S) = A_1(\rho, S)h + A_2(\rho, S)h^2 + A_3(\rho, S)h^3 + o(h^3).$$

Значения A_i можно получить из значений A'_i формальной подстановкой в (15) - (17) вместо кривизны k соответствующих комбинаций δ -функций.

Доказательство получается прямым вычислением, с фактическим повторением доказательства Леммы 1.

Предложение 1. Пусть флаговая функция ρ служит флаговой плотностью для некоторой знакопеременной меры μ , причем μ абсолютно непрерывна относительно инвариантной меры μ_o . Тогда

$$A_1(\rho, S) = A_2(\rho, S) = 0 \quad (19)$$

для любой плоскости e_o и любой выпуклой области $S \subset e_o$.

Доказательство. Обозначим через v плотность меры μ относительно инвариантной меры μ_o :

$$\mu(de) = v(e) \mu_o(de).$$

Так как множество плоскостей $Q|S$ при $h \downarrow 0$ стремится к $\{e_o\}$, плотность $v(e)$ можно вычислить по формуле

$$v(e_o) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu(Q|S)}{\mu_o(Q|S)}. \quad (20)$$

Из (2) и Лемм 1, 3 следует, что

$$\mu(Q|S) = A_1(\rho, S)h + A_2(\rho, S)h^2 + A_3(\rho, S)h^3 + o(h^3). \quad (21)$$

Согласно Лемме 2, знаменатель в (20) имеет порядок h^3 . Следовательно, тот же порядок имеет и числитель. Из разложения (21) следует искомое равенство (19).

Предложение доказано.

Для доказательства того, что соотношение (18) является достаточным условием, необходимо напомнить некоторые сведения из комбинаторной интегральной геометрии [2, 3, 6]. Обозначим через $\{P_i\}|\{P'_j\}$ множество плоскостей, разделяющих точки множеств $\{P_i\}$ и $\{P'_j\}$. Известно, см. [2], что значения функционала Ψ на множествах $H_1 = P_1 | P_2, P_3, P_4$ и $H_2 = P_1, P_2 | P_3, P_4$ определяют значения Ψ на всем $\mathcal{R}$. Любое $B \in \mathcal{R}$ можно представить в виде $B = \sum B_i$, где B_i - непересекающиеся множества вида H_1 или H_2 , причем мы можем взять B_i бесконечно малыми (так называемый "принцип триангуляции", см. [2]).

Лемма 4. Функционал Ψ на $\mathcal{R}$ полностью определяется заданием значений Ψ на множествах $Q|S$, где S - треугольник либо плоский, выпуклый четырехугольник.

Доказательство. Достаточно показать, что $\Psi(H_2)$ выражается через $\Psi(Q|S)$.

На плоскости, проходящей через точки P_2, P_3, P_4 выберем точку P_5 так, чтобы выпуклая оболочка точек P_2, P_3, P_4, P_5 являлась четырехугольником (см. Рис. 6).

Имеем

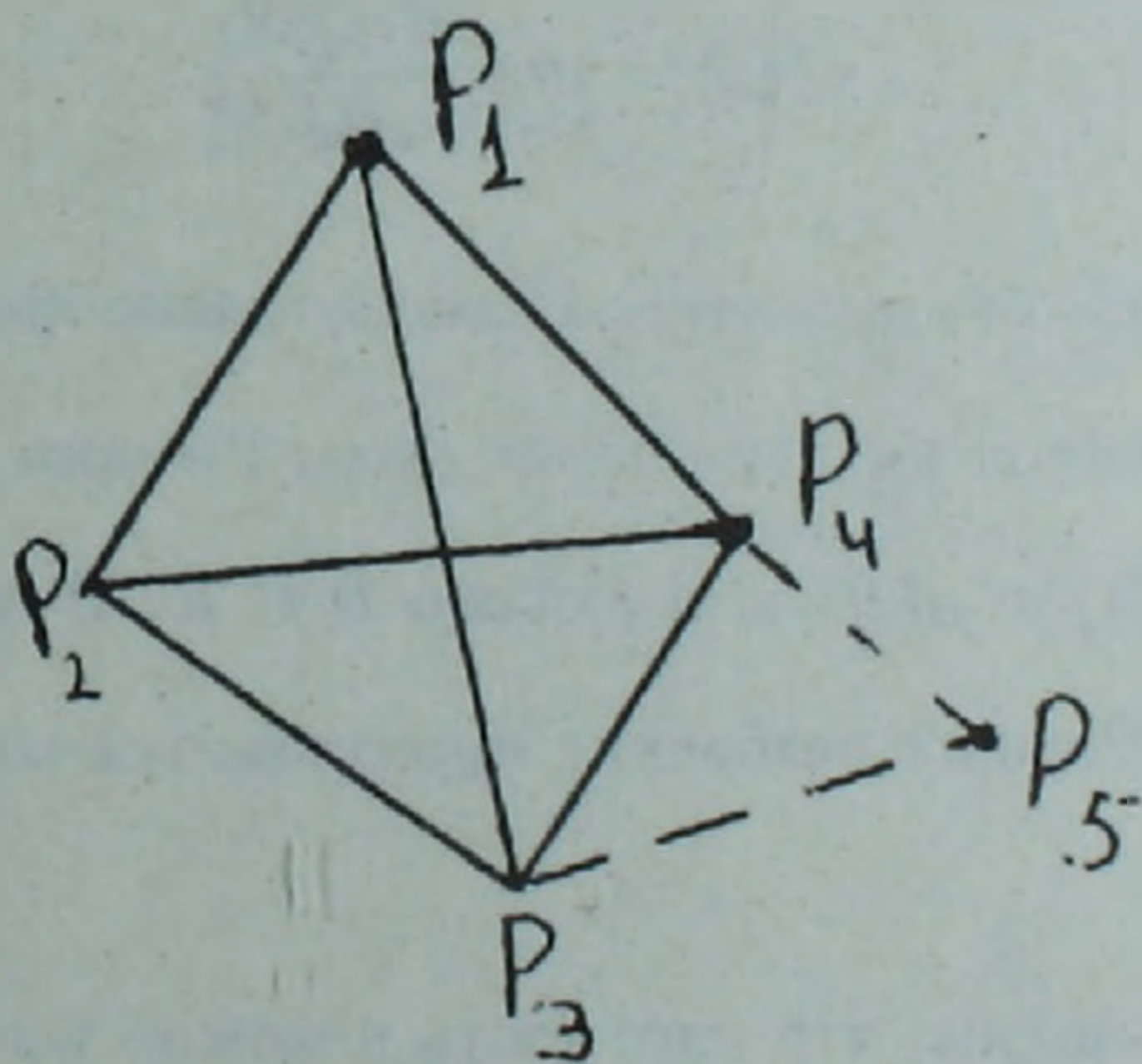


Рис. 6.

$$P_1 | P_3, P_4, P_5 = P_1, P_2 | P_3, P_4, P_5 \oplus P_1 | P_2, P_3, P_4, P_5,$$

здесь $\oplus$ означает объединение непересекающихся множеств. Но $P_1, P_2 | P_3, P_4$,

$P_5 = P_1, P_2 | P_3, P_4$, следовательно

$$\Psi(H_2) = \Psi(P_1 | P_3, P_4, P_5) - \Psi(P_1 | P_2, P_3, P_4, P_5). \quad (22)$$

Лемма 4 доказана.

Теорема 1. *Достаточно гладкая флаговая функция ρ является флаговой плотностью для некоторой знакопеременной меры μ , абсолютно непрерывной относительно инвариантной меры μ_0 тогда и только тогда, когда*

$$A_1(\rho, S) = A_2(\rho, S) = 0 \quad (23)$$

для любой плоскости e_0 и любой выпуклой области $S \subset e_0$.

При этом если $A_3(\rho, S) \geq 0$, то мера μ неотрицательна.

Доказательство. Необходимость доказана в Предложении 1.

Достаточность : Для заданной гладкой флаговой функции ρ , удовлетворяющей условию (23), построим функционал Ψ . Из (23) и Леммы 3 для любой плоскости e_0 получим

$$\Psi(Q|S) = A_3(\rho, S)h^3 + o(h^3).$$

Следовательно, существует предел

$$v(e_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Psi(Q|S)}{\mu_0(Q|S)}$$

Рассмотрим меру μ , плотность которой относительно инвариантной меры μ_0 есть v . Тогда, используя метод интегральных сумм Римана, который применен в [4], [5], докажем, что $\Psi(B) = \mu(B)$ для любого $B \in \mathcal{R}$. В силу (22) при построении интегральных сумм Римана разбиение производится множествами вида H_1 или H_2 .

В заключение заметим, что плотность v можно вычислить по формуле

$$v(e_0) = A_3(\rho, S) \cdot A_3^{-1}(c, S). \quad (24)$$

Из Леммы 2 имеем $A_3(c, S) \geq 0$, а из (24) следует, что неравенство $A_3(\rho, S) \geq 0$ является достаточным условием для неотрицательности меры μ . Теорема 1 доказана.

ABSTRACT. In the paper we consider the problems of signed measure generation in the space $\mathbb{E}$ of planes in $\mathbb{R}^3$ by means of flag functions using an algorithm from combinatorial integral geometry. We find conditions which guarantee, that a flag function generates a signed measure on $\mathbb{E}$.

We find also some additional conditions on flag function which imply that actually we have a non-negative measure.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Погорелов, Четвертая Проблема Гильберта, М. Наука, 1976.
2. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology. John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
3. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
4. Р. В. Амбарцумян, "Заметки о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$ " Изв. АН Армении, Математика, том 27, №5, стр. 1 – 21, 1992.
5. R. V. Ambartzumian, "Planar measure generation by Euler functionals", Submitted to Journal of Applied Probability.
6. Р. В. Амбарцумян, И. Мекке, Д. Штойян, Введение в Стохастическую Геометрию, М., Наука, 1989.

21 Апреля 1993

Институт математики
НАН Армении