

ОБ ОДНОМ КОНЕЧНО-АДДИТИВНОМ ФУНКЦИОНАЛЕ В \mathbb{R}^3

Р. В. АМБАРЦУМЯН

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, №2, 1993

Руководствуясь некоторым разложением Комбинаторной Интегральной Геометрии, мы определяем конечно-аддитивный функционал на ограниченных выпуклых многогранниках в \mathbb{R}^3 . При некоторых предположениях гладкости, найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы этот функционал определял бы знакопеременную меру в \mathbb{R}^3 . Этот результат применяется к задаче порождения знакопеременной меры в пространстве плоскостей в \mathbb{R}^3 с помощью стереографии.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Идея аддитивного функционала, зависящего от функций, определенных в пространстве клиньев (функция клина) возникла в Комбинаторной Интегральной Геометрии, см. [1],[2]. Рассмотренные в [1], [2] функции клина зависели от мер m , определенных в пространстве \mathbb{E} плоскостей в \mathbb{R}^3 , и давали возможность комбинаторного вычисления значений m на подмножествах \mathbb{E} из так называемого класса Бюффона.

Настоящая заметка посвящена следующей задаче: дана функция клина, как выяснит, порождает ли она посредством соответствующего аддитивного функционала Комбинаторной Интегральной Геометрии меру в пространстве \mathbb{E} или нет. Примеры подобных "обращений" "прямых" результатов Комбинаторной Интегральной Геометрии можно найти уже в [1] (теорема о порождении мер в пространстве прямых линейно-аддитивными, непрерывными псевдометриками). Тем не менее, прогресс в этом направлении для клиньев в \mathbb{R}^3 и мер в \mathbb{E} являлся трудной задачей до появления концепций флага и флаговой плотности, которые были развиты в [2]. Значительные аналитические преимущества возникают при переформулировке задачи для \mathbb{E} в пространство \mathbb{R}^3 с использованием стерео-

графического отображения, предложенного в [3], где оно с успехом применялось в двумерном случае. Основным принципом этого преобразования является то, что после стереографии образ флага есть (двойственный) флаг, а образ клина - (двойственный) клин.

В результате, после стереографии, мы вновь получаем задачу порождения меры посредством функции клина, однако теперь пространство, где мы хотели бы иметь меру есть \mathbb{R}^3 , а не \mathbb{E} . Именно эта версия задачи рассматривается ниже. Читатель заметит, что рассматриваемый ниже аддитивный функционал X есть дуальная переформулировка известного разложения Комбинаторной Интегральной Геометрии [1],[2].

Целью этой работы является описание основных шагов решения, и, поэтому, где возможно, мы не вдаемся в детали, включая переформулировку результатов в терминах пространства \mathbb{E} . Надеемся, что позже этот недостаток будет компенсирован в других публикациях, касающихся этого вопроса.

§2. КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Начнем с некоторых необходимых определений.

Флагом f в \mathbb{R}^3 называется тройка $f = (P, g, e)$, где P - точка в \mathbb{R}^3 , g - прямая, проходящая через P , а e - плоскость, содержащая g . Пространство флагов обозначим через \mathcal{F} .

Свободным флагом называется пара $r = (\Omega, \phi)$, где Ω - направление в \mathbb{R}^3 , ϕ - угол вращения вокруг Ω .

Клин называется пара $w = (s, V)$, где s - отрезок прямой в \mathbb{R}^3 , V - вертикальная двугранная область в \mathbb{R}^3 , ограниченная парой плоскостей, пересекающихся по прямой, содержащей s .

Имеется взаимно-однозначное соответствие между клиньями $w = (s, V)$ и множествами флагов в \mathbb{R}^3 :

$$w = \{f = (P, g, e) : P \in s, g \text{ - продолжение } s, e \subset V\} \subset \mathcal{F},$$

что приводит к эквивалентному определению клина.

Каждому клину w соответствует *свободный клин*, который определяется как

следующее множество свободных флагов :

$$W = \{r = (\Omega, \phi) : r \text{ соответствует } f \text{ из } w\}.$$

Через W_0 обозначим множество клиньев (s, V) , для которых замыкание V не содержит начала координат O .

Мы рассмотрим аддитивные функционалы, определенные на W_0 .

Функция F , определенная на W_0 называется аддитивной, если для любых двух клиньев $w_1, w_2 \in W_0$ таких, что

$$\text{int } w_1 \cap \text{int } w_2 = \emptyset \text{ и } w_1 \cup w_2 \text{ есть снова клин,}$$

имеем

$$F(w_1) + F(w_2) = F(w_1 \cup w_2).$$

Выше мы использовали интерпретацию клиньев как подмножеств \mathcal{F} .

Мы будем рассматривать аддитивные функции клина, имеющие на ребрах из W_0 интегральное представление

$$F(w) = \int_w \rho(f) df, \quad (1)$$

где df обозначает перенос и вращение инвариантной меры на семействе

$$\Theta_g = \{f = (P, g, e) : P \in g, g \subset e\},$$

т.е.

$$df = dl d\phi,$$

где dl - элемент длины на g , $d\phi$ - элемент угла вращения. Назовем $\rho(f)$ *флаговой плотностью* F' . Так как мы не предполагали неотрицательности ρ , то (1) означает, что F определяет *знакопеременную меру* на каждом семействе Θ_g . Для выполнимости нижеследующих утверждений, ρ предполагается достаточно гладкой функцией.

Заметим, что (1) можно переписать, используя свободные клинья. Полагая, что $w = (s, W)$, находим

$$F(w) = \int_s l(P, W) dl, \quad (2)$$

где

$$I(P, W) = \int_W \rho(P, \Omega, \phi) d\phi.$$

Определим функционал X на классе C_0 ограниченных выпуклых многогранников, не содержащих начала координат O .

Дано $C \subset C_n$, через $\{a_i\}$ обозначим множество ребер C . С каждым a_i мы ассоциируем два клина, ограниченные плоскостями двух граней C , пересекающихся по a_i , т.е.

$$(a_i, V_i) \text{ и } (a_i, V_i^c), \text{ где } V_i^c \text{ — это дополнение } V_i.$$

Обозначим через w_i тот из этих двух клиньев, который принадлежит множеству W_0 . Это w_i может содержать C (в этом случае w_i называется *покрывающим*), или не содержать (тогда w_i называется *внешним*). Через $W(a_i)$ обозначим свободный клин, соответствующий w_i .

Предложение. Для любого F , определенного по формуле (1), выражение

$$X(C) = \sum_{\substack{\text{по покрывающим} \\ \text{клиньям}}} F(w_i) - \sum_{\substack{\text{по внешним} \\ \text{клиньям}}} F(w_i) \quad (3)$$

определяет конечно-аддитивный функционал на C_0 .

Доказательство проводится, используя аддитивность F и правило знака, принятое в (3). Например, из этого правила следует, что если $C_1, C_2 \in C_n$ с $\text{int } C_1 \cap \text{int } C_2 = \emptyset$ обладают общим ребром, которое не является ребром для $C_1 \cup C_2$, то соответствующие $F(w_i)$ из (3), записанные для C_1 и C_2 , входят в (3) с разными знаками.

§3. БРУСКИ И ИХ ФРАГМЕНТЫ

Всюду ниже полагаем, что в \mathbb{R}^3 имеется фиксированная Декартова система координат.

Бруски.

Под *бруском* мы понимаем прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям x, y и z . Буквой B будем обозначать бруски в \mathbb{R}^3 .

Для удобства назовем плоскость x, y - *горизонтальной*, а направление z - *вертикальным*.

Через $2h_x, 2h_y, 2h_z$ обозначим длины ребер B , параллельных осям x, y и z , соответственно.

В качестве параметра величины бруска выбираем его объем - $V = 8h_x h_y h_z$; а его форма определяется отношениями $\frac{h_y}{h_x}, \frac{h_z}{h_x}$.

B^* фрагменты.

Этот термин будет относиться к выпуклым многогранникам $B^* \subset \mathbb{R}^3$, которые могут быть представлены в виде пересечения

$$B^* = B \cap H,$$

где B - брусок, а H - полупространство, граничная плоскость ∂H , которая удовлетворяет следующим условиям:

- а) ∂H содержит внутреннюю диагональ d бруска B ;
- б) ∂H не касается ни одной из двух горизонтальных граней B .

Единственную вершину B^* , для которой три исходящих ребра совпадают с ребрами B , назовем верхушкой T фрагмента B^* . Ромбоидальную грань S фрагмента B^* , не являющуюся частью какой-либо грани B , назовем *наклонной гранью* B^* . Ясно, что S всегда *правильный ромбоид*: ромбоид назовем *правильным*, если проекции его сторон на горизонтальную плоскость параллельны осям x и y . Выберем площадь $\|S\|$ грани S в качестве параметра величины B^* ; форма B^* определяется формой соответствующего B и ориентацией в плоскости e_0 . Существуют восемь различных *типов* B^* : тип зависит от выбора диагонали d и верхушки T .

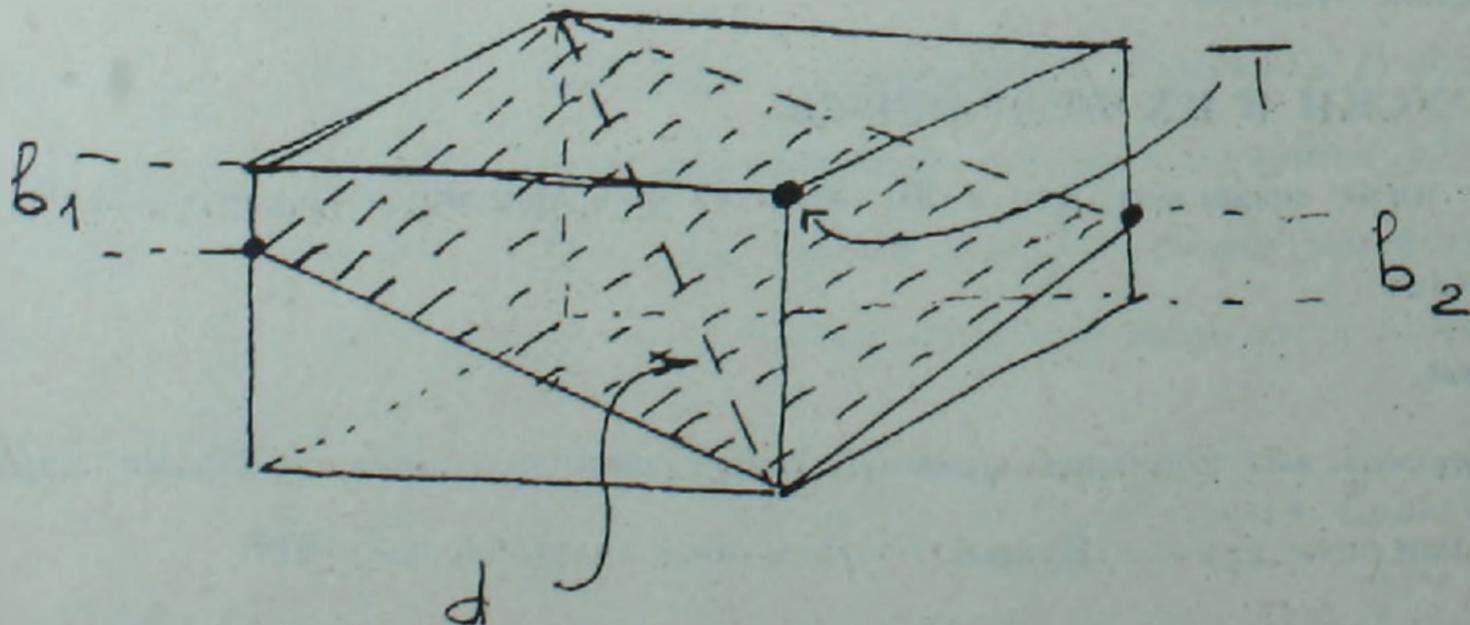


Рис. 1. T - верхушка, наклонная грань заштрихована

Построение 1. Даны полупространство H в общем положении, а также *правильный* ромбоид $S \subset \partial H$. Существует единственный фрагмент $B^* \subset H$, для которого S является скатом.

Этот B^* построен следующим образом.

При любом $(x, y, z) \in \partial H$ из соотношения $(x, y, z + \epsilon) \in H$ следует, что либо а) $\epsilon > 0$, либо б) $\epsilon < 0$.

Пусть $P_i, i = 1, \dots, 4$ - вершины S :

$$P_i = (x_i, y_i, z_i).$$

Можем предположить, что

$$z_1 = \min(z_1, z_2, z_3, z_4), \quad z_4 = \max(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Тогда вершущка T фрагмента B^* имеет координаты

$$T = (x_1, y_1, z_4) \quad \text{в случае а)}$$

и

$$T = (x_4, y_4, z_1) \quad \text{в случае б)}.$$

Тело, ограниченное горизонтальной плоскостью, проходящей через T , а также вертикальными плоскостями, проходящими через стороны S и через само S и есть искомос B^* .

B^{} фрагменты.**

Определим квадрант Q как часть \mathbb{R}^3 , ограниченную двумя полуплоскостями (гранями), одна из которых вертикальна. Грань, которая не вертикальна называется наклонной. Отрезок прямой, по которой пересекаются вертикальная и наклонная грани, обозначается через L и называется ребром квадранта Q .

Вертикальная плоскость V , проходящая через диагональ d и заштрихованная плоскость, показанная на Рис 1., порождают четыре квадранта Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 .

Они порождают также $B_i^{**} = B \cap Q_i$.

Тем не менее, вообще говоря, наклонная грань квадранта Q может пересекать горизонтальные основания бруска B .

Выберем длину $|L|$ отрезка L в качестве параметра *размера* для фрагмента B^{**} ; форма параметров B^{**} такая же, как для B^* , однако существует 16 типов (зависящих от выбора d и квадрантов Q_i).

Построение 2. Даны квадрант Q и не горизонтальный прямолинейный отрезок L на ребре квадранта Q_0 . Существует единственный фрагмент B^{**} , для которого $B^{**} \subset Q$, L является ребром B^{**} и наклонная грань квадранта Q содержит грань фрагмента B^{**} .

Это B^{**} может быть построено как пересечение $B \cap Q$, где B - брусок, ограниченный плоскостями, параллельными координатным плоскостям, и проходящими через концы отрезка L .

§4. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ БРУСКИ И ФРАГМЕНТЫ БРУСКОВ

В этом параграфе рассмотрим асимптотическое поведение функционала X на брусках и фрагментах бруска, предполагая, что их области стягиваются к точкам (которые определяют их положение), тогда как параметры размера стремятся к нулю. Предположим также, что их формы остаются фиксированными.

Опишем основной принцип, лежащий в основе нижеследующего анализа :

инфинитезимальные бруски и B^ фрагменты обладают группами ребер a_i , для которых свободные клинья $W(a_i)$ совпадают. Внутри соответствующих групп слагаемых в (3) разложения в ряд Тейлора выражений (2) могут быть алгебраически просуммированы.*

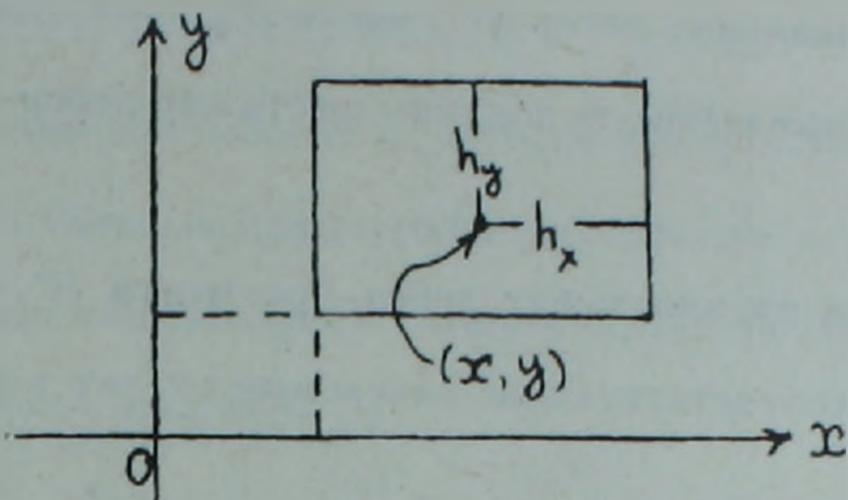
Инфинитезимальные бруски.

Начнем с последовательности брусков $B \subset \mathbb{C}_0$, предполагая, что они стягиваются к общему центру $P = (x, y, z)$. Объем B обозначим через dV .

Мы выберем из группы слагаемых в (3), соответствующие ребрам a_i , параллельным оси z . Для ребер из этой группы свободные клинья $W(a_i)$ совпадают, положим

$$W_z = W(a_i).$$

Ситуация, изображенная на Рис. 2, а) (соответствует определенному выбору

Рис. 2. Проекция бруска B на плоскость x, y .

знаков), их совместный вклад равен

$$\int_{z-h_x}^{z+h_x} l(x+h_x, y-h_y, l, W_z) dl + \int_{z-h_x}^{z+h_x} l(x-h_x, y+h_y, l, W_z) dl - \\ - \int_{z-h_x}^{z+h_x} l(x+h_x, y+h_y, l, W_z) dl - \int_{z-h_x}^{z+h_x} l(x-h_x, y-h_y, l, W_z) dl$$

что, очевидно, эквивалентно

$$\frac{1}{8} \frac{\partial^2 l(x, y, z, W_z)}{\partial x \partial y} dV.$$

Для ситуации, показанной на Рис. 2, б), получаем тот же результат, но с противоположным знаком. Учитывая группы ребер, параллельных осям x и y , получаем (обозначение очевидно)

$$X(B) = H_1(P) dV, \quad (4)$$

где

$$H_1(P) = c_z(P) \frac{\partial^2 l(P, W_z)}{\partial x \partial y} + c_x(P) \frac{\partial^2 l(P, W_x)}{\partial y \partial z} + c_y(P) \frac{\partial^2 l(P, W_y)}{\partial x \partial z}.$$

Функции $c(P)$ могут принимать значения $+1$ или -1 . Например,

$$c_z(P) = 1, \text{ если } xy > 0, \quad -1, \text{ если } xy < 0.$$

Инфинитезимальные B^* фрагменты.

Выберем полупространство H , правильный ромбoid с инфинитезимальной площадью dS в плоскости $e = \partial H$. Пусть $P \in e$ - центр этого ромбoida. Используя Построение 1, получим B^* , который стягивается к P . Разделим вертикальное ребро B^* с концом в вершукe T на две части b_1 и b_2 , длины которых эквивалентны

длинам двух других вертикальных ребер фрагмента B^* . Если будем рассматривать эти части как отдельные ребра, то получим шесть пар ребер эквивалентной длины.

Пусть a_1, a_2 - i -тая пара параллельных ребер фрагмента B^* . Всегда имеем $W(a_1) = W(a_2) = W$ и соответствующие слагаемые входят в (3) с противоположными знаками.

Используя разложение Тейлора, находим

$$t_i(P) = \lim(dS)^{-1} \left[\int_{a_1} I(P, W) dl - \int_{a_2} I(P, W) dl \right] = q_1 \frac{\partial I(P, W)}{\partial a} + q_2 \frac{\partial I(P, W)}{\partial \alpha},$$

где $\frac{\partial}{\partial a}$ - производная в положительном направлении a , $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ - производная в предельном положительном направлении диагонали ромбоида, определяемой посредством a_1, a_2 . (Можем предполагать, что эти положительные направления были определены, согласно некоторой трансляционно-инвариантной договоренности).

Для данной пары a_1, a_2 величины $|q_1|, |q_2|$ зависят исключительно от формы нашего B^{**} и его типа; знаки этих коэффициентов зависят от типа B^{**} и сдвига точки P в плоскости e .

Из предыдущего уравнения следует, что

$$X(B^*) = H_2(P) dS, \quad \text{где} \quad H_2(P) = \sum_{i=1}^6 t_i(P). \quad (5)$$

Замечание. Упомянутый выше результат справедлив также для инфинитезимальных треугольных призм, которые могут быть получены как пределы B^* фрагментов.

Инфинитезимальные B^{**} фрагменты.

Выберем квадрант Q и интервал с центром в P , с длиной dL на ребре квадранта Q . Воспользовавшись Построением 2, получим последовательность фрагментов B^{**} , которые стягиваются к P . Все слагаемые в (3), записанные для $X(B^*)$, асимптотически пропорциональны dL . Получаем

$$X(B^*) = H_3(P) dS, \quad \text{где} \quad H_3(P) = \sum u_i I(P, W(a_i)), \quad (6)$$

a_i - ребра фрагмента B^{**} , $|u_i|$ - пределы отношений $\frac{|a_i|}{dL}$, зависящие от формы B^{**} . Если заданы форма и тип B^* , то знаки этих коэффициентов зависят от выбора точки P .

§5. УСЕЧЕННЫЕ ПРАВИЛЬНЫЕ ПРИЗМЫ

Через Π_r обозначим выпуклое тело, которое может быть получено из правильной призмы с горизонтальным прямоугольным основанием сечением наклонной плоскостью, не пересекающей горизонтальные основания (см. Рис. 3 а). Обозначим через σ наклонную грань тела Π_r .

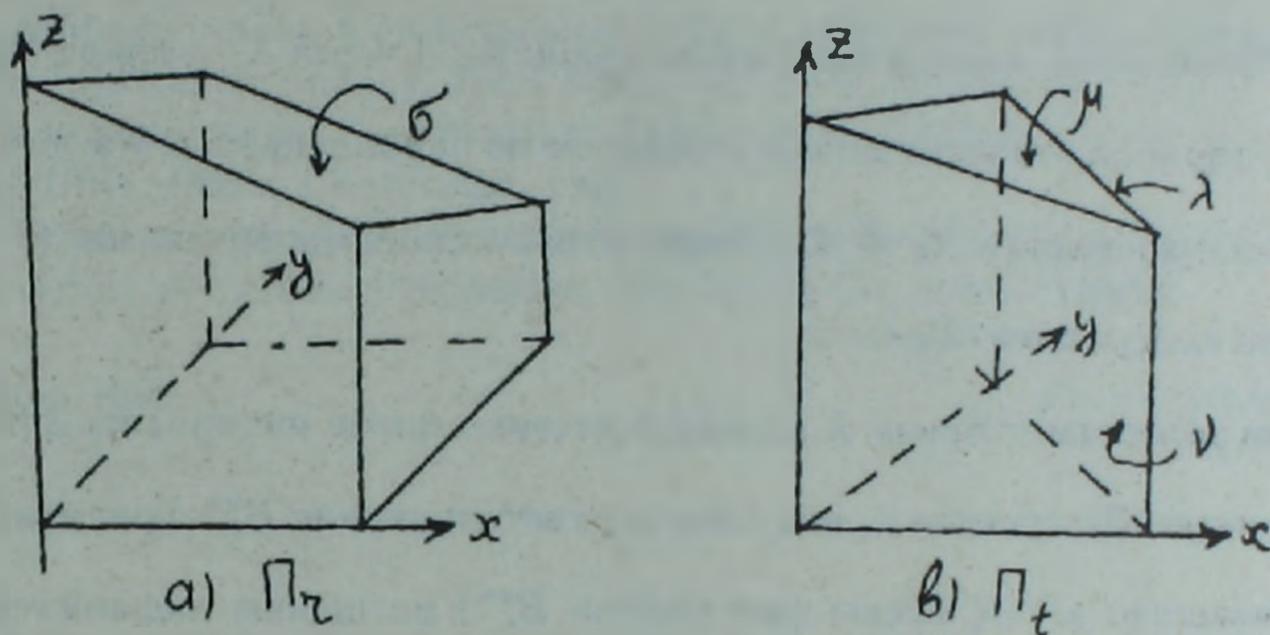


Рис. 3.

Разобьем данное тело $\Pi_r \in \mathcal{C}_0$ инфинитезимальными брусками и B^* фрагментами следующим образом.

Сначала разобьем грань σ с помощью правильных ромбоидов dS_i , тогда в силу Построения 1 получим соответствующие B_i^* внутри тела Π_r . Множество $\Pi_r \setminus \cup B_i^*$ принадлежит тому типу, который можно разбить инфинитезимальными брусками B_s (это возможно, так как часть тела Π_r под каждым B_i^* является бруском).

В силу аддитивности функционала X

$$X(\Pi_r) = \sum X(B_s) + \sum X(B_i^*). \quad (7)$$

Подставляя (4) и (5) в (7), получим

$$X(\Pi_r) = \int_{\Pi_r} H_1 dV + \int_{\sigma} H_2 dS.$$

Повторяя рассуждения, применяемые в похожей ситуации в плоском случае в [3], приходим к следующему необходимому условию.

Условие 1. Если X порождает меру в $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, то обязательно $H_1 \equiv 0$ (для всех типов, форм и положений P).

Пусть Π'_i - правильная призма, горизонтальное основание которой - правильный треугольник со сторонами, параллельными осям x и y . Через Π_i обозначим выпуклое тело, которое может быть получено из призмы Π'_i сечением наклонной плоскостью, которое не пересекает горизонтальные основания призмы Π'_i (см. Рис. 3 б)). Обозначим через μ наклонную грань Π_i , а через λ - сторону грани μ , проекция которой на горизонтальное основание не параллельно оси x или оси y . Разобьем данную призму $\Pi_i \in \mathcal{C}_0$ инфинитизимальными брусками B^* и B^{**} фрагментами следующим образом.

Сначала разделим сторону λ на инфинитезимальные интервалы длины dl_i . Тогда, используя Построение 1, получим соответствующие B_i^{**} фрагменты внутри Π_i . Множество $\mu \setminus \cup \{ \text{следы фрагментов } B_i^{**} \}$ расщепим инфинитезимальными правильными ромбоидами с площадью dS_i для которых построим (Построение 1) соответствующие B_i^* . Такую же операцию мы совершаем на вертикальной грани ν тела Π_i , содержащего сторону λ , и получим множества B_i^* , которые касаются грани ν . Множество $\Pi_i \setminus \cup B_i^*$ допускает разбиение брусками.

Поступая так же как выше, получаем представление

$$X(\Pi_i) = \int_{\Pi_i} H_1 dV + \int_{\cup \nu_i} H_2(P) dS + \int_{\lambda} H_3 dl.$$

Применяя Условия 1, получаем

2. Если X порождает меру в $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, то обязательно $H_2 \equiv 0$ (для всех типов, форм и положений P).

Теорема. Одновременное выполнение тождеств $H_1 \equiv 0$ и $H_2 \equiv 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы конечно-аддитивный функционал $X(B)$, определенный посредством (3), являлся бы мерой $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ с плотностью $H_1(P)$.

Доказательство. Необходимость доказана выше. Доказательство достаточности основывается на представлении функционала $X(C)$ для любого $C \in \mathcal{C}_0$ в виде линейной комбинации значений X на конечном числе тел типа Π_i .

ABSTRACT. Guided by a decomposition in Combinatorial Integral Geometry, we define a finite-additive functional on bounded convex polyhedrons in \mathbb{R}^3 . Under certain smoothness assumptions, we find necessary and sufficient conditions when this functional defines a signed measure in \mathbb{R}^3 . The result applies via stereography, in signed measure generation in the space of planes in \mathbb{R}^3 .

REFERENCES

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
2. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
3. R. V. Ambartzumian "Planar measure generation by Euler functionals." Submitted to Journal of Applied Probability, Stochastic Geometry Section.

19 Февраля 1993

Институт математики
НАН Армении