О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВРЕМЕННЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

М. Рейссиг, К. А. Ягджян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №2, 1993

В работе рассматривается задача Коши в классах Жевре для квазилинейных слабо гиперболических уравнений второго порядка с характеристиками, совпадающими на линии, несущей начальные условия Приводятся условия на нелинейные младшие члены $f(x, t, u_x)$, которые являются достаточными для локальной теоремы существования. Доказывается также существование конуса зависимости.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в ряде работ [1, 5, 13] описывались конструкции параметрикса и фундаментального решения задачи Коши для вырождающихся линейных гиперболических уравнений. Эти результаты тесно связаны с изучением условий корректности для линейных гиперболических уравнений с кратными характеристиками и вселяют надежду на успех в получении результатов для нелинейных и, в частности, квазилинейных вырождающихся уравнений.

В квазилинейном случае в дополнение к трудностям, связанным с нелинейностью оператора возникает проблема нахождения так называемых условий Леви и выбора пространств функций, в которых задача Коши была бы корректной. Условиями Леви мы будем называть алгебраические условия между младшими членами оператора, включая и их производные, и главной частью оператора.

Достаточные условия корректности задачи Коши в классах Жевре описаны в [5, 12] для линейных операторов. Эти условия близки к необходимым [5, 7, 14].

С другой стороны, известны результаты и для нелинейного случая при подходящем выборе пространств Жевре, а именно, когда показатель s класса меньше $m/(m-1)$, где m - кратность характеристических корней. В этом случае можно обойтись без условий Леви. Так, например, в работах [1, 3, 6, 9] наряду с другими результатами доказана локальная теорема существования. Итак, для уравнения второго порядка упомянутые работы дают результат только в классах Жевре с показателем $s < 2$.

Целью настоящей работы является исследование задачи Коши

$$u_{tt} - \lambda^2(t)a(x,t)u_{xx} = f(x,t,u_x), \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \tag{1.2}$$

где $\lambda(0) = 0$, $\lambda(t) > 0$, $\lambda'(t) \geq 0$ для $t > 0$ и $a(x,t) \geq \text{const} > 0$, в пространствах Жевре с произвольным показателем. Очевидно, что без ограничения общности, мы можем рассматривать только задачу с однородными начальными условиями.

Указанная задача Коши содержит все трудности, упомянутые выше. С одной стороны, мы имеем нелинейность в правой части уравнения, с другой стороны, характеристические корни имеют, вообще говоря, переменную кратность. Далее, для получения результата в классах Жевре с произвольным показателем мы нуждаемся в условиях Леви. Наш основной результат (см. Теорему 1.2) состоит в нахождении условий, при выполнении которых задача (1.1), (1.2) является корректной. Как обычно, корректность означает существование решения, его единственность и существование конуса зависимости. Необходимо подчеркнуть, что условие Леви (1.8) позволяет исследовать задачу Коши в пространствах Жевре с произвольным показателем.

После линеаризации единственность в задаче (1.1), (1.2) может быть получена из теоремы единственности следующей однородной задачи Коши [13] :

$$w_{tt} - \lambda^2(t)a(x,t)w_{xx} = b(x,t)w_x, \quad w(x,0) = w_t(x,0) = 0. \tag{1.3}$$

Единственность для (1.3) есть предмет отдельного исследования, весьма интересного. Этим объясняется большое количество статей, посвященных единственности и неединственности в задаче (1.3). Первая причина - нарушение условий Леви между b и $\lambda^2 a$ [2,7], вторая - наличие осцилляций [2]. Единственность доказывается, как правило, в пространстве C^∞ - функций. Мы также следуем этому подходу и напоминаем, что согласно [2] решение задачи Коши

$$w_{tt} - a(t)w_{xx} = 0, \quad w(x,0) = w_t(x,0) = 0$$

вообще говоря, неединственно, если функция $a(t) \in C^\infty(0,T)$ имеет нуль бесконечного порядка в точке $t = 0$. Используя результат работы [13] (см. Приложение), мы получаем теорему единственности для (1.3). Действительно, предположим, что $\lambda_m = \sup \lambda(t)\sqrt{a(x,t)} < \infty$ и рассмотрим для точки $A = (x_A, t_A)$ с $t_A > 0$ множества

$$C_A = \{(x,t) : \lambda_m^2(t - t_A)^2 - (x - x_A)^2 \geq 0, \ 0 \leq t \leq t_A\},$$

$$D_A = C_A \cap \{t = 0\}.$$

Теорема 1.1._(существование конуса зависимости) Рассмотрим квазилинейное слабо гиперболическое уравнение (1.1). Предположим, что с некоторыми положительными постоянными_ a_0, a_1

$$0 < a_0 \leq a(x,t) \leq a_1 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}_x \times [0,T], \tag{1.4}$$

вещественнозначная функция λ _принадлежит_ $C^\infty[0,T]$, $\lambda^2\Lambda^{-1} \in C^\infty[0,T]$, _а функции_ a _и_ f _удовлетворяют следующим условиям (ниже_ $c > 1/2$, $c, c_0, c_k, C_{i,k}, C_{i,k,l,K}$ _- положительные постоянные, а_ $\Lambda(t) = \int\limits_0^t \lambda(\tau)\, d\tau$_) :_

$$c\lambda(t)/\Lambda(t) \leq \lambda'(t)/\lambda(t) \leq c_0\lambda(t)/\Lambda(t) \quad \text{для всех } t > 0, \tag{1.5}$$

$$|\lambda^{(k)}(t)| \leq c_k(\lambda'(t)/\lambda(t))^{k-1}\lambda'(t) \quad \text{для всех } k = 1,2,..., \ t > 0, \tag{1.6}$$

$$|\partial_t^i \partial_x^k a(x,t)| \leq C_{i,k}(\lambda(t)/\Lambda(t))^i \quad \text{для всех } t > 0, \tag{1.7}$$

$$|\partial_t^i \partial_x^k \partial_p^l f(x,t,p)| \leq C_{i,k,l,K}\lambda^{2+i}(t)/\Lambda^{1+i}(t) \quad \text{для всех}$$
$$i,k,l, \ l \geq 1, \ (x,t,p) \in \mathbb{R}_x \times (0,T] \times K, \tag{1.8}$$

где $K \subset \mathbb{R}_p$ _есть произвольное компактное множество_

Если две решения u_1 _и_ u_2 _уравнения (1.1) принадлежат_ $C^\infty(C_A)$ _и_

$$u_1 = u_2, \quad \partial_t u_1 = \partial_t u_2 \quad \text{на } D_A, \tag{1.9}$$

то u_1 и u_2 совпадают на C_A.

Условия (1.8) являются условиями Леви, естественными для операторов с кратными характеристиками (ср. с [4] в случае $\lambda(t) = t^k$). С другой стороны, эти условия допускают функции $\lambda = \lambda(t)$, имеющие нули бесконечного порядка [13], например, $\lambda(t) = \exp(-t^{-2})$.

Для изучения корректности задачи в классах Жевре мы должны более точно описать постоянные $C_{i,k,l,K}, C_{i,k}$:

$$C_{i,k,l,K} = C_{K,i} M_{K,i}^{(k+l)s} l!^{s'} k!^s, \quad s' < s, \quad C_{i,k} = C_i M_i^{ks} k!^s. \tag{1.10}$$

Более того, мы требуем выполнения следующих условий :

$$|\partial_x^k \partial_p^l f(x,t,p)| \le C_K M_K^{(k+l)s} l!^{s'} k!^s o(\lambda^2(t)/\Lambda(t)) \tag{1.11}$$

для всех $k, l, \ l \ge 1, \ (x,t,p) \in \mathbb{R}_x \times (0,T] \times K$, а также

$$|\partial_t^i \partial_x^k f(x,t,p)| \le C_{K,i} M_{K,i}^{ks} k!^s (\lambda(t)/\Lambda(t))^i \tag{1.12}$$

для всех $i, k, (x,t,p) \in \mathbb{R}_x \times (0,T] \times K$. Здесь $o(\lambda^2(t)/\Lambda(t))$ обозначает известный символ Ландау.

Для формулировки нашего основного результата мы используем следующие обозначения.

Для заданных фиксированных постоянных $\rho > 0$ и $s \ge 1$, определим

$$X_\rho^s = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}_x) : |\partial_x^k u(x)| \rho^{ks} \le C_u k!^s \ \text{ для всех } \ k \ge 0\},$$

$$Y_\rho^s = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}_x) : \|\partial_x^k u(x)\| \rho^{ks} \le C_u k!^s \ \text{ для всех } \ k \ge 0\},$$

$$X_{loc'}^{s,s'}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_p) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_p) : |\partial_x^k \partial_p^l u(x,p)| \le C_K M_K^{(k+l)s} k!^s l!^{s'}$$

$$\text{для всех } \ k, l \ge 0, \ (x,p) \in \mathbb{R}_x \times K, \quad \text{где постоянные } C_K \text{ и } M_K$$

$$\text{зависят от выбранного компактного множества } K\}.$$

Здесь $\|\cdot\|$ есть L_2-норма. Как обычно, X_{+0}^s, Y_{+0}^s означают индуктивные пределы семейств $\{X_\rho^s\}_{\rho>0}, \{Y_\rho^s\}_{\rho>0}$, соответственно.

Используя указанные предположения и обозначения, мы доказываем следующий основной результат настоящей статьи :

Теорема 1.2. *Рассмотрим следующую задачу Коши для слабо гиперболического уравнения*

$$u_{tt} - \lambda^2(t)a(x,t)u_{xx} = f(x,t,u_x),$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0.$$

В дополнение к (1.4) - (1.8), (1.10) - (1.12) предположим, что

$$|\partial_t^i \partial_x^k a(x,t)| \le C_i M_i^{ks} k!^s (\lambda(t)/\Lambda(t))^i \quad \text{для всех } t > 0, \tag{1.13}$$

$$\lambda^2 a \in C^\infty([0,T]; X_{+0}^s), \tag{1.14}$$

$$f \in C^\infty([0,T]; X_{loc'}^{s,s'}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_p)), \tag{1.15}$$

$$\|\partial_t^i \partial_x^k \partial_p^l f(x,t,0)\| \le C_i M_i^{(k+l)s} k!^s l!^{s'}. \tag{1.16}$$

Тогда существует единственным образом определяемое решение

$$u \in C^\infty([0,\overline{T}]; Y_{+0}^s), \tag{1.17}$$

где достаточно маленькая положительная постоянная $\overline{T} \le T$ зависит от a и f. Более того, у рассматриваемой задачи Коши существует конус зависимости.

§2. ПРИВЕДЕНИЕ РАССМАТРИВАЕМОЙ ЗАДАЧИ К ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} u_{tt} - \lambda^2(t)a(x,t)u_{xx} &= f(x,t,u_x), \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Предположим, что существует классическое решение $u = u(x,t)$, определенное на $\mathbb{R}_x \times [0,T]$. Более того предположим, что выполнены все предположения Теоремы 1.2 .

Определим теперь функции $u^{(i)} = u^{(i)}(x,t)$, $i = 0, 1, ..., n$, с помощью следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u_{tt}^{(0)} = f(x,t,0), \\ u_{tt}^{(1)} = f(x,t,u_x^{(0)}) - f(x,t,0) + \lambda^2(t)a(x,t)u_{xx}^{(0)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{tt}^{(n)} = f(x,t,u_x^{(0)} + \dots + u_x^{(n-1)}) - f(x,t,u_x^{(0)} + \\ \dots + u_x^{(n-2)}) + \lambda^2(t)a(x,t)u_{xx}^{(n-1)} \end{cases} \tag{2.2}$$

с начальными условиями

$$u^{(i)}(x,0) = u_t^{(i)}(x,0) = 0 \quad \text{для всех} \quad i = 0, 1, ..., n. \tag{2.3}$$

Система может быть решена шаг за шагом. Ищем функцию $v = v(x,t)$ как решение квазилинейного слабо гиперболического уравнения

$$\begin{aligned} v_{tt} - \lambda^2(t)a(x,t)v_{xx} &= f(x,t,u_x^{(0)} + \dots + u_x^{(n)} + v_x) - \\ &- f(x,t,u_x^{(0)} + \dots + u_x^{(n-1)}) + \lambda^2(t)a(x,t)u_{xx}^{(n)} \end{aligned} \tag{2.4}$$

с однородными начальными условиями

$$v(x,0) = v_t(x,0) = 0. \tag{2.5}$$

Полагая $u = v + u^{(0)} + \dots + u^{(n)}$, легко доказать, что в соответствующих функциональных пространствах задача Коши (2.1) эквивалентна задачам Коши (2.2), (2.3) и (2.4), (2.5). Действительно, если $u, u^{(i)}$ удовлетворяют (2.1) - (2.3), соответственно, то $v = u - u^{(0)} - \dots - u^{(n)}$ является решением (2.4), (2.5). Обратно, если $u^{(i)}$, v есть решения задач (2.2), (2.3) и (2.4), (2.5), соответственно, то $u = v + u^{(0)} + \dots + u^{(n)}$ является решением задачи (2.1).

На первый взгляд этот процесс редукции кажется имеющим чисто формальный характер. Однако он позволяет использовать лемму Нерсесяна (см. Лемму А.2 Приложения), для применения которой необходимо, чтобы правая часть $f = f(x,t,p)$ уравнения имела подходящую асимптотику для малых t в точке $p = 0$. В формулировке нашей основной теоремы нет никакого специального предположения относительно подобного поведения правой части. И тем более удивительно, что и в квазилинейном случае такой простой процесс редукции шаг за шагом приводит к желаемому асимптотическому поведению в плоскости $p = 0$. Таким образом, мы получаем в (2.4) в качестве правой части функцию

$$g_n(x, t, v_x) = f(x, t, u_x^{(0)} + \cdots + u_x^{(n)} + v_x) -$$
$$-f(x, t, u_x^{(0)} + \cdots + u_x^{(n-1)}) + \lambda^2(t) a(x, t) u_{xx}^{(n)} \tag{2.6}$$

с

$$g_n(x, t, 0) \sim \lambda^n(t),$$

где n может быть сделано достаточно большим. А именно, имеет место следующая

Лемма 2.1. *Пусть функции λ, a, f из (2.1) удовлетворяют предположениям (1.4) - (1.6), (1.8), (1.10), (1.12) - (1.16). Тогда для каждого фиксированного n после процесса редукции функции g_n и, следовательно, правая часть уравнения (2.4) удовлетворяет*

$$g_n(x, t, p) \in C^\infty([0, T]; X_{loc'}^{s,s'}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_p)), \tag{2.7}$$

$$|\partial_x^i \partial_p^l g_n(x, t, p)| \le C_{K,n} M_{K,n}^{(i+l)s} l!^{s'} i!^s o(\lambda^2(t)/\Lambda(t)),$$
$$\textit{для всех} \quad i, l, \ l \ge 1, \ (x, t, p) \in \mathbb{R}_x \times [0, T] \times K, \tag{2.8}$$

$$|\partial_x^i g_n(x, t, p)| \le C_{K,n} M_{K,n}^{is} i!^s \quad \textit{для всех} \quad i, \ (x, t, p) \in \mathbb{R}_x \times [0, T] \times K, \tag{2.9}$$

$$\|\partial_x^i g_n(x, t, 0)\| \le C_n M_n^{is} i!^s \lambda^n(t), \quad \textit{для всех } i, \quad t \in [0, T]. \tag{2.10}$$

Более того, решения $u^{(k)}, k = 0, \ldots, n$, задач (2.2), (2.3) принадлежат $C^\infty([0, T]; Y_{+0}^s)$ и удовлетворяют неравенствам

$$\|\partial_x^i u^{(k)}(x, t)\| \le C_k M_k^{is} i!^s \lambda^k(t). \tag{2.11}$$

Доказательство. Согласно (2.2), (2.3), (1.16) имеем

$$\|\partial_t^2 \partial_x^\nu u^{(0)}(x, t)\| \le \|\partial_x^\nu f(x, t, 0)\| \le C_0 M^{\nu s} \nu!^s, \tag{2.12}$$

и, следовательно, в силу (2.3)

$$\|\partial_x^\nu u^{(0)}(x, t)\| \le C_0 M_0^{\nu s} \nu!^s t^2.$$

Из (1.15) получаем $u^{(0)} \in C^\infty([0,T]; Y^s_{+0})$.

Обозначив $p = u^{(0)}_x \in C^\infty([0,T]; Y^s_{+0})$, рассмотрим

$$u^{(1)}_{tt} = f(x,t,p) - f(x,t,0) + \lambda^2(t)a(x,t)p_x, \quad u^{(1)}(x,0) = u^{(1)}_t(x,0) = 0.$$

Согласно формуле Лейбница

$$\partial^i_x\{f(x,t,p) - f(x,t,0)\} = \int\limits_0^p f^{(i,0,1)}(x,t,v)dv +$$

$$+ \sum_{k+l=i} \frac{i!}{k!} \sum_{\nu=1}^{l} \frac{1}{\nu!} f^{(k,0,\nu)}(x,t,p) \sum_{\substack{m_1+\dots+m_\nu=l\\ m_i\geq 1}} \frac{(\partial^{m_1}_x p)\dots(\partial^{m_\nu}_x p)}{m_1!\dots m_\nu!},$$

где $f^{(k,l,\nu)}(x,t,p)$ обозначает $\partial^k_x \partial^l_t \partial^\nu_p f(x,t,p)$. Согласно последнему соотношению и принимая во внимание вложение $C^\infty([0,T]; Y^s_{+0}) \subset C^\infty([0,T]; X^s_{+0})$ и (1.8), заключаем

$$\|\partial^i_x\{f(x,t,p) - f(x,t,0)\}\| \leq C_1 M_1^{is} i!^s \|p\| \frac{\lambda^2(t)}{\Lambda(t)} +$$

$$+ \sum_{k+l=i} \frac{i!}{k!} \sum_{\nu=1}^{l} \frac{1}{\nu!} C_1 M_1^{(k+\nu)s} k!^s \nu!^{s'} \frac{\lambda^2(t)}{\Lambda(t)} \times$$

$$\times \sum_{\substack{m_1+\dots+m_\nu=l\\ m_i\geq 1}} \frac{\|\partial^{m_1}_x p\|_\infty \dots \|\partial^{m_{\nu-1}}_x p\|_\infty}{m_1!\dots m_{\nu-1}!} \frac{\|\partial^{m_\nu}_x p\|_2}{m_\nu!}.$$

Для того, чтобы оценить вторую сумму нам необходимы некоторые вычисления, которые мы здесь опускаем. Читатель может найти их в [10], в то время как их краткое изложение приведено в следующем пункте. Действительно, можно доказать следующую оценку :

$$\sum_{k+l=i} \frac{i!}{k!} \sum_{\nu=1}^{l} \frac{1}{\nu!} C_1 M_1^{(k+\nu)s} k!^s \nu!^{s'} \frac{\lambda^2(t)}{\Lambda(t)} \times$$

$$\times \sum_{\substack{m_1+\dots+m_\nu=l\\ m_i\geq 1}} \frac{\|\partial^{m_1}_x p\|_\infty \dots \|\partial^{m_{\nu-1}}_x p\|_\infty}{m_1!\dots m_{\nu-1}!} \frac{\|\partial^{m_\nu}_x p\|_2}{m_\nu!} \leq C_1 M_1^{is} i!^s \frac{\lambda^2(t)}{\Lambda(t)} t^2.$$

Наконец, получаем

$$\|\partial^2_t \partial^i_x u^{(1)}(x,t)\| \leq C_1 M_1^{is} i!^s \frac{\lambda^2(t)}{\Lambda(t)} t^2,$$

и, соответственно

$$\|\partial^i_x u^{(1)}(x,t)\| \leq C_1 M_1^{is} i!^s \lambda(t).$$

Это асимптотическое поведение при $t \to 0$ достаточно для последующего. Более того, (2.2), (2.3), (1.14) и (1.15) приводят к включению $u^{(1)} \in C^\infty([0,T];Y^s_{+0})$. Обозначая $p_0 = u_x^{(0)}, p_1 = u_x^{(1)}$, принадлежащие $C^\infty([0,T];Y^s_{+0})$, получаем для $u^{(2)}$

$$\partial_t^2\partial_x^i u^{(2)}(x,t) = \sum_{k+l=i}\frac{i!}{k!}\sum_{\nu=0}^{l}\frac{1}{\nu!}f^{(k,0,\nu)}(x,t,p_1+p_0)\times$$

$$\times\sum_{\substack{m_1+\dots+m_\nu=l\\ m_i\geq 1}}\frac{(\partial_x^{m_1}(p_1+p_0))\dots(\partial_x^{m_\nu}(p_1+p_0))}{m_1!\dots m_\nu!}-$$

$$-\sum_{k+l=i}\frac{i!}{k!}\sum_{\nu=0}^{l}\frac{1}{\nu!}f^{(k,0,\nu)}(x,t,p_0)\times$$

$$\times\sum_{\substack{m_1+\dots+m_\nu=l\\ m_i\geq 1}}\frac{(\partial_x^{m_1}p_0)\dots(\partial_x^{m_\nu}p_0)}{m_1!\dots m_\nu!}+\partial_x^i(\lambda^2(t)a(x,t)p_{1,x}).$$

Можно оценить $u^{(2)}$ с помощью аналогичных рассуждений. Необходимо только принять во внимание, что каждый член суммы содержит либо $\partial_x^{m_i}p_1$ либо $\int\limits_{p_0}^{p_0+p_1} f^{(k,0,\nu+1)}(x,t,v)dv$. Это дает желаемое асимптотическое разложение. Итак

$$\|\partial_t^2\partial_x^i u^{(2)}(x,t)\| \leq C_2 M_2^{is} i!^s \frac{\lambda^2(t)}{\Lambda(t)}\lambda(t)$$

и

$$\|\partial_x^i u^{(2)}(x,t)\| \leq C_2 M_2^{is} i!^s \lambda^2(t).$$

Таким образом, последовательно доказываем последнее утверждение леммы.

Осталось доказать (2.7) - (2.10) для

$$g_n(x,t,p) = f(x,t,u_x^{(0)}+\dots+u_x^{(n)}+p) - f(x,t,u_x^{(0)}+\dots+u_x^{(n-1)}) + \lambda^2(t)a(x,t)u_{xx}^{(n)}.$$

Свойство (2.7) следует непосредственно из (1.14), (1.15) и включений $u^{(k)} \in C^\infty([0,T];Y^s_{+0})$, $k = 0,\dots,n$. Используя $C^\infty([0,T];Y^s_{+0}) \subset C^\infty([0,T];X^s_{+0})$, (1.8) для $i = 0$ и (1.10), получаем

$$|\partial_x^i\partial_p^l g_n(x,t,p)| = |\partial_x^i\partial_p^l f(x,t,u_x^{(0)}+\dots+u_x^{(n)}+p)| \leq C_{K,n} M_{K,n}^{(i+l)s} l!^{s'} i!^s o(\lambda^2(t)/\Lambda(t));$$

т.е (2.8). Аналогично, принимая во внимание (1.14), (1.15), получаем (2.9). Для доказательства (2.10), т.е.

$$\|\partial_x^i g_n(x,t,0)\| = \|f(x,t,u_x^{(0)}+\dots+u_x^{(n)})-$$

$$-f(x,t,u_x^{(0)}+\dots+u_x^{(n-1)}) + \lambda^2(t)a(x,t)u_{xx}^{(n)}\| \leq C_{n+1}M_{n+1}^{is} i!^s \lambda^n(t),$$

мы вводим $p_0 = u_x^{(0)} + \cdots + u_x^{(n-1)}$, $p_1 = u_x^{(n)}$. Очевидно, p_0 и p_1 принадлежат $C^\infty([0,T]; Y^s_{+0})$. Тогда (1.14), (2.11) для $k = h$ и рассуждения, использованные для оценивания $\|\partial_t^2 \partial_x^i u^{(2)}(x,t)\|$ дают (2.10), где мы снова напомним, что в каждом члене имеется либо $\int\limits_{p_0}^{p_0+p_1} f^{(k,0,\nu+1)}(x,t,v)dv$ либо $\partial_x^{m_i} p_1$. Эти члены обеспечивают асимптотическое поведение нормы $\|\partial_x^i g_n(x,t,0)\|$ по переменной t. Этим завершается доказательство леммы.

Нижеследующая лемма является результатом утверждений, содержащихся в начале настоящего пункта и Леммы 2.1.

Лемма 2.2. *Пусть функции λ, a, f из (2.1) удовлетворяют предположениям (1.4) - (1.6), (1.8), (1.10), (1.12) - (1.16). Далее, пусть функции $u^{(0)}, \ldots, u^{(n)}$, принадлежащие $C^\infty([0,T]; Y^s_{+0})$, построены как решения задачи (2.2), (2.3). Если $v \in C^k([0,T]; Y^s_{+0})$ есть решение задачи (2.4), (2.5), то $u = v + u^{(0)} + \cdots + u^{(n)}$ есть решение задачи (2.1), принадлежащее $C^k([0,T]; Y^s_{+0})$.*

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Определим для функций u из $Y^s_{\rho(t)}$ частичные энергии ($j \geq 1$)

$$e_j(t) = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} (\lambda^2(t) a(x,t) |\partial_x^j u|^2 + |\partial_x^{j-1} u_t|^2 + j^2 |\partial_x^{j-1} u|^2) dx \right)^{1/2},$$

и энергии конечного порядка

$$E_N(t) = \sum_{j=1}^{N} \eta(j) \quad \text{для } N \geq 1,$$

где обозначено $\eta(j) = e_j(t)\rho(t)^{j-k} j^{ks}/j!^s$, k - фиксированное натуральное число, в одномерном случае $k = 3$ [1 1]. Функция $\rho(t) = \rho_0 \exp(-Ct)$, подчиненная дополнительному условию $\rho(t) \geq \rho_0/2$ определяет интервал существования $[0, T^*]$.

3.1. Последовательные приближения

Благодаря Лемме 2.2, остается только исследовать задачу

$$v_{tt} - \lambda^2(t) a(x,t) v_{xx} = g_n(x,t,v_x), \quad v(x,0) = v_t(x,0) = 0, \tag{3.1}$$

где g_n удовлетворяет предположениям (2.7) - (2.10). Мы предполагаем следующую схему последовательных приближений

$$v_{tt}^{(p+1)} - \lambda^2(t)a(x,t)v_{xx}^{(p+1)} = g_n(x,t,v_x^{(p)}), \tag{3.2}$$

$$v^{(p+1)}(x,0) = v_t^{(p+1)}(x,0) = 0 \tag{3.3}$$

для $p = 0, 1, \ldots$. Натуральное число n выбирается достаточно большим.

Мы стартуем с $v^{(0)} = 0$. Согласно (2.8) и Лемме А.1 Приложения, существует решение $v^{(1)} \in C^2([0,T]; Y^s_{+0})$ с тем же асимптотическим поведением в $t = 0$, то есть

$$\|\partial_x^i v^{(1)}(x,t)\| \le CM^{is} i!^s \lambda^n(t) \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T] \quad \text{и} \quad i \ge 0.$$

Здесь и далее через C и M обозначены универсальные постоянные. Принимая во внимание

$$g_n(x,t,v_x^{(1)}) = g_n(x,t,0) + \int_0^{v_x^{(1)}} \partial_p g_n(x,t,p)\,dp,$$

получаем

$$\lambda^{-n} g_n(x,t,v_x^{(1)}) \in C([0,T]; Y^s_{+0})$$

и

$$\|\partial_x^i g_n(x,t,v_x^{(1)})\| \le CM^{is} i!^s \lambda^n(t) \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T], \ \ i \ge 0.$$

Следовательно, мы можем применить Лемму А.1 к (3.2), (3.3) для $p = 1$. Рассуждая последовательно, получаем решения $v^{(p)} \in C^2([0,T]; Y^s_{+0})$, где

$$\|\partial_x^i v^{(p)}(x,t)\| + \|\partial_x^i g_n(x,t,v_x^{(p)})\| \le CM^{is} i!^s \lambda^n(t). \tag{3.4}$$

Итак схема последовательных приближений (3.2), (3.3) является приемлемой в предположениях Теоремы 1.2.

3.2. Энергетические оценки

Обозначим $E_N^{(p)}(t) = E_N(v^{(p)})(t)$, где

$$E_N(v)(t) = \sum_{j=1}^{N} \Big(\int_{\mathbb{R}} (\lambda^2(t)a(x,t)|\partial_x^j v|^2 + |\partial_x^{j-1} v_t|^2 + j^2|\partial_x^{j-1} v|^2)\,dx \Big)^{1/2} \rho(t)^{j-k} j^{ks}/j!^s. \tag{3.5}$$

Нашей целью является оценка энергии конечного порядка $E_N^{(p)}(t)$ для $N \geq 1$. Дифференцирование частичных энергий e_j даёт

$$e_j(t)e_j'(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} (\lambda^2(t)a(x,t)\partial_x^j v\partial_x^j v_t + \partial_x^{j-1}v_t\partial_x^{j-1}v_{tt} + j^2\partial_x^{j-1}v\partial_x^{j-1}v_t)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}} (\lambda'(t)\lambda(t)a(x,t) + \lambda^2(t)a_t(x,t))|\partial_x^j v|^2 dx.$$

Согласно условию (1.4) и уравнению (3.1), имеем

$$e_j(t)e_j'(t) \leq \int\limits_{\mathbb{R}} \left\{(\lambda^2(t)[\partial_x^{j-1}, a(x,t)\partial_x^2]v)\partial_x^{j-1}v_t + Q\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\lambda^2(t)a(x,t)|\partial_x^j v|^2 +\right.$$

$$\left. + j^2\partial_x^{j-1}v\partial_x^{j-1}v_t)\right\}dx + \int\limits_{\mathbb{R}} \partial_x^{j-1}v_t\partial_x^{j-1}g_n(x,t,v_x)dx,$$

где положительная постоянная Q зависит только от a и λ. Следовательно

$$e_j'(t) \leq je_j(t) + Q\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}e_j(t) + \|\lambda^2(t)[\partial_x^{j-1}, a(x,t)\partial_x^2]v\| + \|\partial_x^{j-1}g_n(x,t,v_x)\|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} E_N'(t) &\leq \sum_{j=1}^{N}\left\{e_j'(t) + \frac{\rho'}{\rho}(j-k)e_j(t)\right\}\rho(t)^{j-k}j^{ks}/j!^s + A_N + B_N \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{N}\left[(j-k)\rho' + j\rho + \rho Q\frac{\lambda'}{\lambda}\right]e_j(t)\rho(t)^{j-k-1}j^{ks}/j!^s + A_N + B_N, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где

$$A_N(t) = \sum_{j=1}^{N}\|\lambda(t)[\partial_x^{j-1}, a(x,t)\partial_x^2]v\|\rho(t)^{j-k}j^{ks}/j!^s,$$

$$B_N(t) = \sum_{j=1}^{N}\|\partial_x^{j-1}g_n(x,t,v_x)\|\rho(t)^{j-k}j^{ks}/j!^s.$$

Сначала рассмотрим коммутатор

$$[\partial_x^{j-1}, a(x,t)\partial_x^2]v = (j-1)a_x(x,t)\partial_x^j v + \sum_{h=0}^{j-2}\binom{j}{h}a_x^{(j-h)}(x,t)\partial_x^{h+1}v.$$

Ввиду (1.4), (1.14) и (3.5)

$$\lambda(t)\|(j-1)a_x(x,t)\partial_x^j v\| \leq C(j-1)e_j(t).$$

Согласно предположению (1.13)

$$\|\sum_{h=0}^{j-2}\binom{j}{h}a_x^{(j-h)}(x,t)\partial_x^{h+1}v\|/j!^s \le \sum_{h=1}^{j-1}\binom{j}{h-1}^{1-s}CM^{s(j-h+1)}\frac{\|\partial_x^h v\|}{(h-1)!^s}.$$

Использование теперь неравенств

$$\binom{j}{h-1}^{1-s} \le Ch^{1-s}(h+1)^{1-s} \quad \text{при } h=1,\dots,j-1$$

приводит к оценке

$$\|\sum_{h=0}^{j-2}\binom{j}{h}a_x^{(j-h)}(x,t)\partial_x^{h+1}v\|/j!^s \le C\sum_{h=1}^{j-1}M^{s(j-h+1)}\|\partial_x^h v\|(h-1)!^{-s}h^{1-s}(h+1)^{1-s}.$$

Суммируя и меняя порядок суммирования, получаем

$$A_N(t) \le C\sum_{h=1}^{N-1}e_{h+1}\rho(t)^{h+1-k}(h+1)^{ks+1-s}h!^{-s} \tag{3.7}$$

в предположении, что $M^s\rho(t)\le 1/2$.

Теперь займемся выбором функции $\rho(t)$. Заметим, что можно включить оценку для $A_N(t)$ в первую сумму в оценке $E'_N(t)$. Таким образом

$$E'_N(t) \le \sum_{j=1}^{N}\left[(j-k)\rho' + j\rho + \rho Q\frac{\lambda'}{\lambda} + C\rho j\right]e_j(t)\rho(t)^{j-k-1}j^{ks}/j!^s + B_N.$$

Функция $\rho=\rho(t)$ определяется теперь как решение задачи

$$\frac{1}{2}\rho'(t) + (C+1)\rho(t) = 0, \quad \rho(0)=\rho_0, \quad \rho_0M^s \le 1/2, \quad \rho_0M_K^s < 1/2, \tag{3.8}$$

где дополнительно требуется $\rho(t) \ge \rho_0/2$. Компактное множество K будет определено позже. Итак, $\rho=\rho(t)$ определена только на интервале $[0,T^*]$, где $T^*\le T$ зависит от коэффициента $\lambda^2(t)a(x,t)$. Следовательно, $(j-k)\rho'+(C+1)\rho j\le 0$ для $j\ge 2k$. Мы можем опустить эти члены и прийти к

$$E'_N(t) \le 2Q\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}E_N(t) + B_N(t), \tag{3.9}$$

в предположении, что T^* достаточно мало. Согласно Лемме A.1 и результату пункта 3.1 для всех p

$$B_N^{(p)}(t) = \sum_{j=1}^{N}\|\partial_x^{j-1}g_n(x,t,v_x^{(p)})\|\rho(t)^{j-k}j^{ks}/j!^s =$$
$$= O(\lambda^n(t)), \quad E_N^{(p)}(t) = O(\lambda^n(t)). \tag{3.10}$$

где n достаточно велико. Поэтому, из (3.9), (3.10), применяя Лемму A.2, мы выводим из

$$E_N^{(p+1)'}(t) \leq 2Q\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}E_N^{(p+1)}(t) + B_N^{(p)}(t)$$

неравенство

$$E_N^{(p+1)}(t) \leq \lambda^{2Q}(t)\int\limits_0^t \lambda^{-2Q}(\tau)B_N^{(p)}(\tau)\,d\tau, \quad n \geq 2Q. \tag{3.11}$$

Для $p = 0$ из (3.2) имеем

$$B_N^{(0)}(t) \leq \sum_{j=1}^{N} \|g_n^{(j-1,0,0)}(x,t,0)\|\rho(t)^{j-k}j^{ks}/j!^s \leq |||g_n(x,t,0)|||, \tag{3.12}$$

где использовано обозначение

$$|||g_n(x,t,0)||| = \sum_{j=1}^{\infty} \|g_n^{(j-1,0,0)}(x,t,0)\|\rho(t)^{j-k}j^{ks}/j!^s. \tag{3.13}$$

Итак

$$E_N^{(1)}(t) \leq \lambda^{2Q}(t)\int\limits_0^t \lambda^{-2Q}(\tau)|||g_n(x,\tau,0)|||\,d\tau. \tag{3.14}$$

Далее, согласно формуле Лейбница

$$\begin{aligned}\partial_x^{j-1}g_n(x,t,v_x^{(p)}(x,t)) = &\sum_{i+l=j-1}\frac{(j-1)!}{i!}\sum_{\nu=0}^{l}\frac{1}{\nu!}g_n^{(i,0,\nu)}(x,t,v_x^{(p)})\times \\ \times &\sum_{\substack{m_1+\ldots+m_\nu=l \\ m_i\geq 1}}\frac{1}{m_1!\ldots m_\nu!}(\partial_x^{m_1+1}v^{(p)})(\partial_x^{m_2+1}v^{(p)})\ldots(\partial_x^{m_\nu+1}v^{(p)}).\end{aligned} \tag{3.15}$$

Оценим теперь $B_N^{(p)}$. С этой целью рассмотрим отдельно следующих три случая :

a) $i = 0, \quad l = j-1$;

b) $i = j-1, \quad l = 0$;

c) сумму S_j всех других членов, возникающих в формуле (3.15).

Мы будем использовать (1.11) в эквивалентной форме

$$|\partial_x^k\partial_p^l f(x,t,p)| \leq \alpha(t)C_K M_K^{(k+l)s}l!^{s'}k!^s\lambda^2(t)/\Lambda(t), \quad l \geq 1,$$

где $\alpha(t)$ стремится к 0 при t, стремящемся к 0.

Случай а). Мы должны оценить случаи $1 \le \nu \le j-1$. Для $\nu = 1$ получаем из условий Леви (1.11) и (2.8)

$$\|g_n^{(0,0,1)}(x,t,v_x^{(p)})\partial_x^j v^{(p)}(x,t)\| \le \alpha(t)C_K M_K^s \lambda'(t)\|\partial_x^j v^{(p)}(x,t)\| \le$$

$$\le \alpha(t)C_K M_K^s a_0^{-1/2}\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}e_j(v^{(p)}).$$

Следовательно

$$\sum_{j=2}^{N}\|g_n^{(0,0,1)}(x,t,v_x^{(p)})\partial_x^j v^{(p)}(x,t)\|\rho(t)^{j-k}j^{ks}/j!^s \le$$

$$\le \alpha(t)C_K M_K^s a_0^{-1/2}E_N^{(p)}(t)\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}. \tag{3.16}$$

Для остальных ν, благодаря условиям Леви (2.8), имеем

$$R_j = \sum_{\nu=2}^{j-1}\frac{(j-1)!}{\nu!}\|g_n^{(0,0,\nu)}(x,t,v_x^{(p)})\sum_{\substack{|m|=j-1\\ m_i\ge 1}}\frac{1}{m_1!\dots m_\nu!}(\partial_x^{m_1+1}v)\dots(\partial_x^{m_\nu+1}v)\| \le$$

$$\le \alpha(t)\sum_{\nu=2}^{j-1}C_K M_K^{s\nu}a_0^{-1/2}\nu!^{s'-1}\nu^{-ks}\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\times$$

$$\times\sum_{\substack{|m|=j-1\\ m_i\ge 1}}\frac{(j-1)!}{m_1!\dots m_{\nu-1}!}\|(\partial_x^{m_1+1}v)\dots(\partial_x^{m_{\nu-1}+1}v)\lambda(t)\sqrt{a(x,t)}(\partial_x^{m_\nu+1}v)/m_\nu!\|,$$

где мы несколько увеличили постоянную M_K. Итак (см. [10, 11])

$$R_j \le \alpha(t)\sum_{\nu=2}^{j-1}C_K M_K^{s\nu}\nu!^{s'-1}\nu^{-(k-1)s}\frac{\lambda'}{\lambda}\times$$

$$\times\sum_{|m|=j-1,1\le m_1\le m_2\le\dots\le m_\nu}(j-1)!\frac{\|\partial_x^{m_1+1}v^{(p)}\|_\infty\dots\|\partial_x^{m_{\nu-1}+1}v^{(p)}\|_\infty}{m_1!\dots m_{\nu-1}!}\times$$

$$\times\|\lambda(t)\sqrt{a(x,t)}\partial_x^{m_\nu+1}v^{(p)}\|/m_\nu!,$$

и, наконец, в силу теоремы вложения

$$R_j \le \alpha(t)\frac{C_K}{C_0}a_0^{-1/2}(j-1)!^s\sum_{\nu=2}^{j-1}(M_K^s C_0)^\nu\nu^{-(k-1)s}\nu!^{s'-s}\frac{\lambda'}{\lambda}\times$$

$$\times\sum_{|m|=j-1,1\le m_1\le m_2\le\dots\le m_\nu}\frac{e_{m_1+k}(m_1+k)^{ks}}{(m_1+k)!^s(m_1+k)}\cdots\frac{e_{m_{\nu-1}+k}(m_{\nu-1}+k)^{ks}}{(m_{\nu-1}+k)!^s(m_{\nu-1}+k)}\times$$

$$\times \frac{c_{m_\nu+1}(m_\nu+1)^{ks}}{m_\nu!^s(m_\nu+1)}\left(\frac{m_1!\dots m_\nu!\nu!}{(j-1)!}\right)^{s-1}.$$

В одномерном случае $k=3$, C_0 - постоянная вложения.

Принимая во внимание неравенство $\nu!m_1!\dots m_\nu! \le (j-1)!$ и $j \le \nu m_\nu$, когда $1 \le m_1 \le \dots \le m_\nu \le j-1$, $|m| = j-1$, заключаем

$$\sum_{j=3}^{N} R_j\rho(t)^{j-k}j^{ks}/j!^s \le \alpha(t)\frac{C_K}{C_0}a_0^{-1/2}\sum_{\nu=2}^{N}(M_K^sC_0)^\nu\nu^{-(k-1)s}\nu!^{s'-s}\frac{\lambda'}{\lambda}\times$$

$$\times\sum_{j=\nu+1}^{N}\sum_{\substack{|m|=j-1\\1\le m_1\le m_2\le\dots\le m_\nu}}\eta(m_1+k)\dots\eta(m_\nu+k)\le \tag{3.17}$$

$$\le \alpha(t)\frac{C_K}{C_0}\frac{\lambda'}{\lambda}a_0^{-1/2}\sum_{j=1}^{\infty}(M_K^sC_0E_N^{(p)}(t))^jj!^{s'-s}.$$

Заметим, что не только $m_\nu+1 \le N$, но и $m_i+k \le n \quad (k=3)$.

Случай b) Для $p \ge 1$ очевидное соотношение

$$g_n^{(j-1,0,0)}(x,t,v_x^{(p)}) = g_n^{(j-1,0,0)}(x,t,0) + \int_0^{v_x^{(p)}} g_n^{(j-1,0,1)}(x,t,v)\,dv$$

и условия Леви (2.8), (2.10) приводят к оценке

$$||g_n^{(j-1,0,0)}(x,t,v_x^{(p)})|| \le ||g_n^{(j-1,0,0)}(x,t,0)||+\alpha(t)C_KM_K^{js}j!^s(j+1)^{-ks}\lambda'(t)||v_x^{(p)}(x,t)||.$$

Отсюда и из (3.8) следует, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}||g_n^{(j-1,0,0)}(x,t,v_x^{(p)})||\rho(t)^{j-k}j^{ks}/j!^s \le |||g_n(x,t,0)|||+$$

$$+\alpha(t)\sum_{j=1}^{\infty}C_KM_K^{js}\lambda'(t)\rho(t)^{j-k}||v_x^{(p)}(x,t)|| \le \tag{3.18}$$

$$\le |||g_n(x,t,0)|||+\alpha(t)C(\rho_0)C_Ka_0^{-1/2}\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}E_1^{(p)}(t).$$

Случай c) Для изучения этого случая принимаем во внимание, что $\nu>0$, $l \le j-2$. Используя (2.8) и (2.10), получаем (M_K - несколько увеличено)

$$S_j \le \alpha(t)\sum_{i+l=j-1}\frac{(j-1)!}{i!}\sum_{\nu=0}^{l}\frac{1}{\nu!}C_KM_K^{s(i+\nu)}i!^s\nu!^{s'}(i+1)^{-ks}(\nu+1)^{-ks}\times$$

$$\times\nu\lambda'(t)\sum_{\substack{|m|=j-1\\1\le m_1\le m_2\le\dots\le m_\nu}}\frac{||\partial_x^{m_1+1}v^{(p)}||_\infty\dots||\partial_x^{m_{\nu-1}+1}v^{(p)}||_\infty||\partial_x^{m_\nu+1}v^{(p)}||}{m_1!\dots m_{\nu-1}!m_\nu!}.$$

Отсюда, согласно теореме вложения для одномерного случая, следует

$$S_j \le \frac{C_K}{C_0}\frac{\lambda'}{\lambda}(j-1)!^s \sum_{i+l=j-1}\sum_{\nu=0}^{l} M_K^{s(i+\nu)} C_0^{\nu} \nu!^{s'-s}\left(\frac{i!l!}{(j-1)!}\right)^{s-1} \times$$

$$\times \alpha(t)(i+1)^{-(k-1)s}\nu^{-(k-1)s}\left(\frac{m_1!...m_{\nu-1}!m_\nu!\nu!}{l!}\right)^{s-1} \times \sum_{\substack{|m|=l\\ 1\le m_1\le m_2\le\cdots\le m_\nu}}$$

$$\frac{e_{m_1+k}(m_1+k)^{ks}}{(m_1+k)!^s(m_1+k)}\cdots\frac{e_{m_{\nu-1}+k}(m_{\nu-1}+k)^{ks}}{(m_{\nu-1}+k)!^s(m_{\nu-1}+k)}\frac{e_{m_\nu+2}(m_\nu+2)^{ks}}{m_\nu!^s(m_\nu+2)^{ks+1}}a_0^{-1/2}.$$

На данном этапе мы нуждаемся в (3.8), в неравенстве $\frac{i!l!}{(j-1)!} \le 1/(j-1) \le \le 1/(m_\nu+1)$ справедливом ввиду $l \le j-2$ и $m_\nu \ge l/\nu$, и соотношения $(m_\nu+2)\nu(\nu+1)(i+1) \ge j$. После суммирования мы получаем оценку

$$\sum_{j=2}^{N} S_j\rho(t)^{j-k}j^{ks}/j!^s \le \frac{C_K}{C_0}\frac{\lambda'}{\lambda}\sum_{i+l=j-1}\sum_{\nu=0}^{l}(M_K^s C_0)^{\nu}\nu!^{s'-s}(\rho(t)M_K^s)^i \times$$

$$\times \alpha(t)a_0^{-1/2} \sum_{\substack{|m|=l\\ 1\le m_1\le m_2\le\cdots\le m_\nu}} \eta(m_1+k)...\eta(m_{\nu-1}+k)\eta(m_\nu+2) \le$$

$$\le \alpha(t)\frac{C_K}{C_0}a_0^{-1/2}\frac{\lambda'}{\lambda}\sum_{j=1}^{\infty}(2M_K^s C_0 E_N^{(p)}(t))^j j!^{s'-s}. \tag{3.19}$$

Из неравенств (3.15) - (3.19) получаются оценки для $B_N^{(p)}(t)$

$$B_N^{(p)}(t) \le C(\rho_0)\alpha(t)\frac{C_K}{C_0}a_0^{-1/2}\frac{\lambda'}{\lambda}\sum_{j=1}^{\infty}(2M_K^s C_0 E_N^{(p)}(t))^j j!^{s'-s} + |||g_n(x,t,0)||| \tag{3.20}$$

для всех $p \ge 0$, $t \in [0,T^*]$. Из (3.11), (3.20) следует, что

$$E_N^{(p+1)}(t) \le \lambda^{2Q}(t)\int_0^t \lambda^{-2Q}(\tau)|||g_n(x,\tau,0)|||d\tau + \lambda^{2Q}(t)\int_0^t \lambda'(\tau)\lambda^{-(2Q+1)}(\tau)\times$$

$$\times\ \alpha(t)C(\rho_0)\frac{C_K}{C_0}a_0^{-1/2}\sum_{j=1}^{\infty}(2M_K^s C_0 E_N^{(p)}(\tau))^j j!^{s'-s}\,d\tau \tag{3.21}$$

для всех $N \ge 0$, $t \in [0,T^{**}]$.

3.3. Компактность

Лемма 3.1. *(априорная оценка для приближений) Для решений задач (3.2), (3.3) можно найти положительные постоянные $\overline{D}_n$ и $\overline{T} \le T^{**}$ такие, что для всех* $p \ge 0$, $N \ge 1$

$$E_N^{(p)}(t) \le \overline{D}_n\lambda^n(t) \quad \textit{для всех} \quad t \in [0,\overline{T}],\ n > 2Q \tag{3.22}$$

Доказательство. Существует постоянная $\overline{D}_n$ такая, что

$$|||g_n(x,t,0)||| \le \overline{D}_n \lambda^n(t)/3,$$

и согласно (3.11)

$$E_N^{(1)}(t) \le \overline{D}_n \lambda^n(t)/3$$

для всех N и всех $t \in [0, T^*]$. Следовательно

$$\lambda^{2Q}(t) \int_0^t \lambda^{-2Q}(\tau)|||g_n(x,\tau,0)|||d\tau \le \overline{D}_n \lambda^n(t)/3 \quad \text{для всех} \quad t \in [0, T^*]. \tag{3.23}$$

Далее, выбираем компактное множество $K(\overline{D}_n) = [-C(\overline{D}_n), C(\overline{D}_n)]$ так, чтобы из $E_N(u)(t) \le \overline{D}_n$ следовало бы включение $u_x(x,t) \in [-C(\overline{D}_n), C(\overline{D}_n)]$ для всех $x \in \mathbb{R}, t \in [0, T^*]$. Пусть теперь положительное $\overline{T} \le T^*$ выбрано так, что для всех $t \in [0, \overline{T}]$ выполняется неравенство ($K = K(\overline{D}_n)$)

$$\frac{\alpha(t)}{n-2Q} \frac{C(\rho_0)}{C_0} a_0^{-1/2} C_K \sum_{j=1}^{\infty} (2M_K^s C_0 \overline{D}_n)^j j!^{s'-s} \le \overline{D}/3. \tag{3.24}$$

Такое число $\overline{T} > 0$ существует, поскольку $\lim_{t \to 0} \alpha(t) = 0$. Используя (3.23) и (3.24), из (3.21) получаем

$$E_N^{(p+1)}(t) \le \overline{D}_n \lambda^n(t)/3 + \lambda^{2Q}(t) \int_0^t \lambda'(\tau)\lambda^{-(2Q+1)}(\tau)\lambda^n(\tau)\overline{D}_n/3\, d\tau \le$$
$$\le \overline{D}_n \lambda^n(t)/3 + \overline{D}_n \lambda^n(t)/3 \le \overline{D}_n \lambda^n(t)$$

для всех $t \in [0, \overline{T}]$ и всех N. Применение метода математической индукции завершает доказательство леммы.

Доказательство Теоремы 1.2

Итак, выбираем последовательные итерации $\{v^{(p)}\}$ согласно (3.2), (3.3). Из Леммы 3.1 следует оценка $E_N^{(p)}(t) \le \overline{D}_n$ для всех $p \in \mathbb{N}_0, N \ge 1$ и $t \in [0, \overline{T}]$. Учитывая еще и уравнение (3.2), получаем включение $v^{(p)} \in C^2([0, \overline{T}]; Y_{+0}^s)$, а также $\|v^{(p)}(x,t)\|_{s,\rho_1} \le D_1$ для всех $p \in \mathbb{N}_0$ с некоторой, достаточно малой положительной постоянной ρ_1. Компактность Y_{+0}^s, выбор последовательных приближений и однозначная разрешимость (3.1) обеспечивают сходимость $v^{(p)} \to v$ в

$C^1([0,\overline{T}];Y^s_{+0})$, причем стандартными рассуждениями доказывается, что v есть решение задачи (3.1). Сама задача показывает, что тогда $v \in C^2([0,\overline{T}];Y^s_{+0})$. Благодаря Лемме 2.2, $u = v + u^{(0)} + \cdots + u^{(n)}$ есть $C^2([0,\overline{T}];Y^s_{+0})$ - решение задачи (1.1), (1.2). Вместе с предположениями (1.14) - (1.16), из $u \in C^k([0,\overline{T}];Y^s_{+0})$ следует $u \in C^{k+1}([0,\overline{T}];Y^s_{+0})$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$. Следовательно, $u \in C^\infty([0,\overline{T}];Y^s_{+0})$. Существование конуса зависимости и, следовательно, единственность следуют из Теоремы 1.1, (1.4) и (1.14). Этим завершается доказательство Теоремы 1.2.

Замечание. Можно доказать эту теорему и в том случае, когда условие (1.11) заменено на следующее :

$$|\partial_x^k \partial_p^l f(x,t,p)| \leq C_K\, M_K^{(k+l)s} l!^{s'} k!^s \lambda^2(t)/\Lambda(t).$$

Действительно, используя последнее условие возможно доказать вместо Леммы 3.1, что можно найти постоянные $\overline{D}$ и $\overline{T}_n$ такие, что $E_N^{(p)}(t) \leq \overline{D}\lambda^n(t)$ для всех $t \in [0,\overline{T}_n]$, где $n > 2Q$ - конечное число. Доказательство этого утверждения требует слишком длинных вычислений для того, чтобы быть представленным здесь.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В статье [13] построены параметрикс и фундаментальное решение задачи Коши для линейного гиперболического уравнения, вырождающегося по времени. Используя этот результат, мы докажем теорему единственности и существование конуса зависимости в задаче Коши для квазилинейного уравнения (1.1).

Действительно, рассмотрим задачу Коши

$$Lu = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}_x \times [0,T], \tag{A.1}$$

$$D_t^j u\Big|_{t=s} = \psi_j(x), \quad j = 0,1, \quad x \in \mathbb{R}_x, \tag{A.2}$$

где $t, s \in J = [0,T]$, $T > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $D_t = -i\partial/\partial t$, $D_x = -i\partial/\partial x$, а L есть дифференциальный оператор

$$L = D_t^2 u + \sum_{j+\alpha \leq 2,\, j<2} a_{j,\alpha}(x,t) D_x^\alpha D_t^j u \tag{A.3}$$

с гладкими коэффициентами $a_{j,\alpha} \in C^\infty(\mathbb{R}_x \times [0,T])$. Предположим, что главная часть P_2 оператора L представима в следующем виде :

$$P_2(x,t;\xi,\tau) = (\tau - \lambda_1(x,t,\xi))(\tau - \lambda_2(x,t,\xi)), \tag{A.4}$$

где функции $\lambda_1(x,t,\xi), \lambda_2(x,t,\xi)$ являются вещественнозначными и удовлетворяют неравенствам

$$|\lambda_j(x,t,\xi)| \le C\lambda(t)|\xi| \quad \text{для всех} \quad t\in[0,T], \quad x\in\mathbb{R}, \quad \xi\in\mathbb{R}, \tag{A.5}$$

$$|\lambda_1(x,t,\xi) - \lambda_2(x,t,\xi)| \ge \delta\lambda(t)|\xi| \ \text{ для всех } \ t\in[0,T],\ x\in\mathbb{R},\ \xi\in\mathbb{R} \tag{A.6}$$

с положительной постоянной δ и с функцией $\lambda(t)$, описанной в пункте 1. Предположим также, что коэффициенты $a_{j,\alpha}(x,t)$ удовлетворяют следующим неравенствам :

$$|D_t^k D_x^\beta a_{j,\alpha}(x,t)| \le C_{k,\beta}|\lambda(t)|^{2-j}\left|\frac{ln|\lambda(t)|}{\Lambda(t)}\right|^{2-j-\alpha}\left|\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right|^k, \tag{A.7}$$

$$|D_t^k D_x^\beta \, Im\, a_{0,1}(x,t)| \le C_{k,\beta}\lambda(t)\left|\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right|^{k+1}. \tag{A.8}$$

Если L удовлетворяет всем перечисленным выше условиям, то формально сопряженный оператор

$${}^tLv = D_t^2 v + \sum_{j+\alpha\le 2,\, j<2} (-1)^{j+\alpha} D_x^\alpha D_t^j (a_{j,\alpha}(x,t)v) \tag{A.9}$$

также удовлетворяет этим же условиям. Следовательно, согласно результатам работы [13], задача Коши

$${}^tLv = 0 \qquad \text{в} \quad \mathbb{R}_x \times [0,T], \tag{A.10}$$

$$v(s,x) = 0, \qquad v_t(s,x) = \psi(x), \qquad x\in\mathbb{R}_x \tag{A.11}$$

с $s > 0$ и $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x)$ имеет решение $v \in C^\infty(\mathbb{R}_x \times [0,T])$. Более того, существует компактное множество $K \subset \mathbb{R}$ такое, что supp $v(t) \subseteq K$ для всех $t \in [0,T]$. Таким образом, можно доказать единственность для задачи (A.1), (A.2) с $s = 0$. В случае $s > 0$ единственность очевидна. Действительно, если $u \in C^\infty(\mathbb{R}_x \times [0,T])$ - решение уравнения $Lu = 0$ такое, что $D_t^j u\big|_{t=0} =$

$= 0$ для всех j, то $\int\limits_0^s dt \int\limits_{\mathbb{R}_x} dx\ u^t Lv = 0$ влечет $\int u(s,x)\psi(x)dx = 0$ для всех $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Следовательно, $u = 0$. Далее, задача (A.1), (A.2) имеет свойство конечной скорости распространения. Действительно, в силу уже доказанной единственности, $u(x,t) = \lim\limits_{\varphi\to 0} u(x,t,\varphi)$, где $u(x,t,\varphi)$ есть решение уравнения (A.1) с данными Коши $D_t^j u(x,\varphi,\varphi) = \psi_j(x)$, $j = 0,1$, $\varphi > 0$.

Доказательство Теоремы 1.1

Функция $w = u_1 - u_2$, принадлежащая $C^\infty(C_A)$ есть решение задачи Коши (1.3). Предположения (A.4) - (A.7) выполнены для символа $\tau^2 - \lambda^2(t)a(x,t)\xi^2$. Свойства f обеспечивают принадлежность $b(x,t)$ классу $C^\infty(C_A)$ и выполнимость (A.7), (A.8). Действительно

$$b(x,t) = \int\limits_0^1 (\partial_p f)(x,t,u_1(x,t) + \tau(u_2(x,t) - u_1(x,t))\,d\tau. \tag{A.12}$$

Отсюда следует

$$|D_t^k D_x^\beta b(x,t)| \le C_{k,\beta}\lambda(t)\left|\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right|^{1+k}.$$

Таким образом, условия (A.7), (A.8) выполнены. Поэтому $w = 0$ в силу результата единственности для линейного уравнения (1.3). Теорема 1.1 доказана.

Лемма A.1. (Лемма 3 [12]). *Рассмотрим задачу Коши для слабо гиперболического уравнения*

$$v_{tt} - \lambda^2(t)a(x,t)v_{xx} = g(x,t), \tag{A.13}$$

$$v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0. \tag{A.14}$$

В дополнение к (1.4), (1.5) предположим, что

$$\lambda^2 a \in C^2([0,T]; X_{+0}^s). \tag{A.15}$$

Тогда существует достаточно большое положительное число M такое, что для любой функции g, для которой

$$\lambda^{-M} g(x,t) \in C([0,T]; Y_{+0}^s), \tag{A.16}$$

существует единственное решение $v(x,t)$, причем $\lambda^{-M} v(x,t) \in C^2([0,T]; Y_{+0}^s)$.

Лемма А.2. [8] (Лемма Нерсесяна - обобщение известной леммы Гронуолла на дифференциальные неравенства с сингулярным коэффициентом). *Пусть задано дифференциальное неравенство*

$$y'(t) \leq K(t)y(t) + f(t) \tag{A.17}$$

в $t \in (0, T)$, *где функции* $K = K(t)$ *и* $f = f(t)$ *принадлежат* $C(0, T)$, $T > 0$. *Если*

$$\int_0^{\varphi} K(\tau)d\tau = \infty, \int_{\varphi}^{T} K(\tau)\, d\tau < \infty \qquad \text{для всех} \quad \varphi \in (0, T), \tag{A.18}$$

$$\lim_{\varphi \to 0} \int_{\varphi}^{t} \exp(\int_{s}^{t} K(\tau)\, d\tau) f(s)\, ds \quad \text{существует для каждого} \quad t \in (0, T], \tag{A.19}$$

$$y(\varphi) \exp(\int_{\varphi}^{t} K(\tau)d\tau) = o(\varphi) \tag{A.20}$$

то любое $C([0, T]) \cap C^1(0, T)$*-решение неравенства (A.19) удовлетворяет неравенству*

$$y(t) \leq \int_0^t \exp(\int_s^t K(\tau)\, d\tau) f(s)\, ds. \tag{A.21}$$

Благодарности : Идеи настоящей работы возникли в период пребывания второго из авторов в Техническом Университете Горной Академии Фрайберга с февраля по май 1993. Оба автора благодарят DFG (Немецкое Исследовательское Общество) за финансовую поддержку, а также Горную Академию Фрайберга за гостеприимство.

ABSTRACT. We consider the Cauchy problem in Gevrey classes for quasilinear weakly hyperbolic second order equations with characteristics coinciding on initial line. We suggest conditions on nonlinear lower order term $f(x, t, u_x)$ which are sufficient for the local existence theorem. We prove also the existence of cone of dependence.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Cattabriga, L. Zanghirati, "Fourier integral operators of infinite order on Gevrey spaces, application to the Cauchy problem for certain hyperbolic operators",

Journal of Math. of Kyoto Univ., vol. 30, no. 1, pp. 149 – 192, 1990.
2. F. Colombini, S. Spagnolo, "A non-uniqueness result for the operators with principal part $\partial_t^2 + a(t)\partial_x^2$", in : Partial Differential Equations and the Calculus of Variations, vol. 1, Essays in Honor of Enrico de Giorgi, Progress in Non-linear Differential Equations and their applications, Birkhäuser, pp. 331 – 353, 1989.
3. P. D'Ancona, R. Manfrin, "The Cauchy problem in abstract Gevrey spaces for nonlinear weakly hyperbolic equation of second order", Preprints di Matematica, vol. 145, October 92, Scuola Normale Superiore, Pisa, pp. 1 – 17, 1992.
4. В. Я. Иврий, В. М. Петков, "Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений", Успехи мат. наук, том 29, №. 5, стр. 3 – 70, 1974.
5. В. Я. Иврий, "Линейные гиперболические уравнения", в книге : Линейные Уравнения с Частными Производными, том 197, №4, (Проблемы Современной Математики : Фундаментальные Направления) том 33, стр. 157 – 247, 1988.
6. K. Kajitani, "Local solution of Cauchy problem for nonlinear hyperbolic systems in Gevrey classes", Hokkaido Math. J., vol. 12, 434 – 460, 1983.
7. S. Nakane, "Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem for a class of operators of degenerate type - II", Proc. Japan Acad. vol. 59, pp. 318 – 320, 1983.
8. А. Б. Нерсесян, "О задаче Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка", Докл. АН СССР, том 166, стр. 1288 – 1291, 1966.
9. T. Nishitani, "Sur les equations hyperboliques a coefficients hölderiens en t et de classe de Gevrey en x", Bull. Sc. math., 2^e serie, vol. 107, pp. 113 – 138, 1983.
10. M. Reissig, K. Yagdjian, "Levi conditions and global Gevrey regularity for the solutions of quasilinear weakly hyperbolic equations", to appear.
11. S. Spagnolo, "Analytic regularity of the solutions of a semi-linear weakly hyperbolic equation", Ricerche di Matematica, Suppl., vol. 36, pp. 193 – 202, 1987.
12. К. А. Ягджян, "Задача Коши для слабо гиперболического уравнения в классах Жевре", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том. 13, №1, стр. 3 – 22, 1978.
13. К. А. Ягджян, "Псевдодифференциальные операторы с параметром и фундаментальное решение задачи Коши для операторов с кратными характеристиками", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том. 21, №4, стр. 317 – 344, 1986.[English translation : Soviet Journal of Contemporary Math. Anal. (Armenian Academy of Sciences)],vol. 21, no. 4, pp. 1 – 29, 1986.
14. К. А. Ягджян, "Необходимые условия корректности задачи Коши для операторов с кратными характеристиками",Изв. АН Арм. ССР, Математика, [English translation : Soviet Journal of Contemporary Math. Anal. (Armenian Academy of Sciences)], vol. 23, no. 5, pp. 36 – 61, 1988.

25 Июня 1993

Технический университет
Горной Академии Фрайберга, ФРГ

Институт математики
НАН Армении