О РАЗМЕРНОСТЯХ ЯДРА И КОЯДРА МАТРИЧНОГО ТЕПЛИЦЕВА ОПЕРАТОРА

Р. З. Мкртчян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №2, 1993

Пусть $\mathbf{T}_n = (T_{ij})_{i,j=1}^n$ - операторная матрица, где T_{ij}, $i,j = \overline{1,n}$ - теплицевы операторы, определенные на пространстве Харди H^2. В настоящей работе получены достаточные условия обратимости $\mathbf{T}_n$, которые не предполагают перестановочности операторов T_{ij}. Получены также оценки размерностей ядра и коядра операторных матриц $\mathbf{T}_n$, которые являются в то же время векторнозначными теплицевыми операторами.

1. Пусть A, B, C, D - операторы, определенные на некотором гильбертовом пространстве H. Рассмотрим вопросы обратимости операторных матриц типа

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{1}$$

В случае, когда некоторые из элементов матрицы (1) перестановочны, эта проблема рассмотрена в работах [1], [2]. Было выяснено, что в этом случае обратимость матрицы (1) связана с обратимостью формальных определителей $AD - BC$. В работе [1], стр. 43 была поставлена следующая задача : найти условия обратимости матрицы (1), когда элементы матрицы (1), вообще говоря, не перестановочны. Мы исследуем эту задачу в случае, когда A, B, C, D - теплицевы. А наш результат можно распространить на матрицу размерности $n \times n$.

Пусть $\mathbf{T}_n = (T_{ij})_{ij=1}^n$, где T_{ij}, $i,j = \overline{1,n}$ - теплицевы операторы, определенные на пространстве Харди H^2. В настоящей работе получены некоторые достаточные условия обратимости операторных матриц $\mathbf{T}_n$, без требования перестановочности операторов T_{ij}, $i,j = \overline{1,n}$. Получены также оценки размерностей ядра и коядра операторной матрицы $\mathbf{T}_n$.

Оператор $\mathbf{T}_n$ определен на пространстве $\mathbf{H}^2_n = H^2 \oplus_n \cdots \oplus H^2$, т.е. на прямой сумме пространств Харди. Элементы пространства $\mathbf{H}^2_2$ имеют вид

$$\mathbf{x}_n =^{tr} (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}), \quad \text{где} \quad x^{(i)} \in H^2 \;\; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Норма и скалярное произведение в $\mathbf{H}^2_2$ определяются следующим образом

$$||\mathbf{x}_n||^2_{\mathbf{H}^2_2} = \sum_{p=1}^{n} ||x^{(p)}||^2_{H^2}, \quad (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)_{\mathbf{H}^2_n} = \sum_{p=1}^{n} (x^{(p)}, y^{(p)})_{H^2}.$$

Легко видеть, что

$$||\mathbf{T}_2\mathbf{x}_2||^2_{\mathbf{H}^2_2} = ||T_{11}x^{(1)}||^2_{H^2} + ||T_{12}x^{(2)}||^2_{H^2} + ||T_{21}x^{(1)}||^2_{H^2} + ||T_{22}x^{(2)}||^2_{H^2} +$$

$$+ 2\mathrm{Re}\,(T_{21}x^{(1)}, T_{22}x^{(2)})_{H^2} + 2\mathrm{Re}\,(T_{11}x^{(1)}, T_{12}x^{(2)})_{H^2}. \tag{2}$$

В следующем пункте получено представление для норм $||\mathbf{T}_2\mathbf{x}_2||^2$, позволяющее оценить размерности как ядра, так и коядра оператора $\mathbf{T}_2$.

2. В этом пункте дадим необходимые определения и получим представление для скалярного произведения (Tx, Qy), где T и Q - теплицевы операторы, определенные на H^2.

Ганкелев оператор χ_ψ и теплицев оператор T_ψ определяются следующим образом :

$$\chi_\psi u = P_- \psi u,$$

$$T_\psi u = P_+ \psi u,$$

где $u \in H^2$, $\psi \in L^\infty$, P_+ и P_- - операторы проектирования из L_2 на пространства H^2 и $H^2_- = L^2 \ominus H^2$, соответственно. Функция ψ называется *символом* операторов χ_ψ и T_ψ.

Ганкелевы и теплицевы операторы связаны соотношением

$$\chi_\psi u + T_\psi u = \psi u, \quad u = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{ik\theta} \in H^2, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty. \tag{3}$$

Мы будем предполагать, что символ ψ теплицева оператора T_ψ удовлетворяет условию :

$$P_- \psi \subset L^\infty.$$

Пусть символы теплицевых операторов T и Q имеют следующий вид :

$$T \sim \psi(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ik\theta} \in L^\infty, \quad Q \sim \omega(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{ik\theta} \in L^\infty.$$

Определим теплицевы операторы $T^{(n)}$ и $Q^{(n)}$ так, что соответствующими им символами будут следующие функции :

$$T^{(n)} \sim \psi^{(n)}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{-n-1} a_k e^{ik\theta}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad .$$

$$Q^{(n)} \sim \omega^{(n)}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{-n-1} b_k e^{ik\theta}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Аналогично определим ганкелевы операторы χ_T, $\chi_T^{(n)}$, χ_Q и $\chi_Q^{(n)}$ с символами $\psi(\theta)$, $\psi^{(n)}(\theta)$, $\omega(\theta)$ и $\omega^{(n)}(\theta)$, соответственно.

Пусть

$$H_p^2 = \{u(\theta);\ u(\theta) = \sum_{m=p}^{\infty} x_m e^{im\theta}\} \quad \text{и} \quad H_{m,p}^2 = H_m^2 \oplus H_p^2 \subset \mathbf{H}_2^2.$$

Поскольку скалярное произведение теплицевых и ганкелевых операторов равно нулю, имеем

$$(Tu_p, Qv_q) = ((T + \chi_T)u_p, (Q + \chi_Q)v_q) - ((T^{(p)} + \chi_T)u_p, (Q^{(q)} + \\ + \chi_Q)v_q) + (T^{(p)}u_p, Q^{(q)}v_q). \tag{5}$$

Легко видеть, что

$$\chi_T u_p = \chi_T^{(p)} u_p \quad \text{и} \quad \chi_Q v_q = \chi_Q^{(q)} v_q,$$

для $u_p \in H_p^2$, $v_q \in H_q^2$.

Следовательно, равенство (5) можно записать следующим образом :

$$(Tu_p, Qv_q) = ((T + \chi_T)u_p, (Q + \chi_Q)v_q) - \\ -((T^{(p)} + \chi_T^{(p)})u_p, (Q^{(q)} + \chi_Q^{(q)})v_q) + (T^{(p)}u_p, Q^{(q)}v_q). \tag{6}$$

Принимая во внимание (3), получим

$$(Tu_p, Qv_q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\psi\bar{\omega} - \psi^{(p)}\omega^{(q)})u_p\bar{v}_q \, d\theta + (T^{(p)}u_p, Q^{(q)}v_q), \tag{7}$$

где $u_p \in H_p^2$, $v_q \in H_q^2$.

В частном случае, когда $T = Q$, из (7) следует

$$||Tu_p||^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|\psi|^2 - |\psi^{(p)}|^2)|u_p|^2 \, d\theta + ||T^{(p)}u_p||^2, \tag{8}$$

где $u_p \in H_p^2$.

Замечание 1. Из равенств (8) получаются оценки для размерности ядра оператора T, которые даны в работе [4].

3. В этом пункте получим представление для норм $||\mathbf{T}_n||^2$ и оценим размерности как ядра, так и коядра оператора $\mathbf{T}_n$.

Аналогично равенству (8) можно написать

$$||T_{ml}u_p||^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|\psi_{ml}|^2 - |\psi_{ml}^{(p)}|^2)|u_p|^2\,d\theta + ||T_{ml}^{(p)}u_p||^2, \tag{9}$$

где $u_p \in H_p^2$, и функция $\psi_{ml} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^{(m,l)} e^{ik\theta} \in L^\infty$ - символ оператора T_{ml}, $m, l = 1, 2, \ldots$.

В силу (7), получим

$$(T_{ml}u_p, T_{ks}v_q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\psi_{ml}\bar{\psi}_{ks} - \psi_{ml}^{(p)}\bar{\psi}_{ks}^{(q)})u_p\bar{v}_q\,d\theta + (T_{ml}^{(p)}u_p, T_{ks}^{(q)}v_q), \tag{10}$$

где $m, l, s, k = 1, 2, \ldots, u_p \in H_p^2, v_q \in H_q^2$.

Нам необходимы следующие обозначения :

$$A_{nk}(\theta) = A_{np_k} = \sum_{m=1}^{n}(|\psi_{mk}|^2 - |\psi_{mk}^{(p_k)}|^2),$$

$$A^*_{nk}(\theta) = A^*_{np_k} = \sum_{m=1}^{n}(|\bar{\psi}_{km}|^2 - |(\bar{\psi}_{km})^{(p_k)}|^2,$$

$$B_{n,k,l}(\theta) = B_{np_kp_l} = \sum_{m=1}^{n}(\psi_{mk}\bar{\psi}_{ml} - \psi_{mk}^{(p_k)}\bar{\psi}_{ml}^{(p_l)}),$$

$$B^*_{n,k,l}(\theta) = B^*_{np_kp_l} = \sum_{m=1}^{n}(\bar{\psi}_{lm}\psi_{km} - \overline{(\bar{\psi}_{lm})^{(p_l)}}(\bar{\psi}_{km})^{(p_k)}),$$

$$E_{n,k,l} = E_{np_kp_l} = \{\theta;\ |B_{np_kp_l}|^2 < A_{np_k}A_{np_l},\quad k \neq l\},$$

$$E^*_{n,k,l} = E^*_{np_kp_l} = \{\theta;\ |B^*_{np_kp_l}|^2 < A^*_{np_k}A^*_{np_l},\quad k \neq l\}.$$

Учитывая (9) и (10), перепишем равенство (2) следующим образом :

$$||\mathbf{T}_2\mathbf{x}_2||^2 = \sum_{j=1}^{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}A_{2j}(\theta)|u_{p_j}|^2\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}2\mathrm{Re}\,[B_{212}u_{p_1}\bar{u}_{p_2}]d\theta +$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}||T_{mj}^{(p_j)}u_{p_j}||^2 + \sum_{m=1}^{2}2\mathrm{Re}\,(T_{m1}^{(p_1)}u_{p_1}, T_{m2}^{(p_2)}u_{p_2}), \tag{11}$$

где $u_{p_j} \in H^2_{p_j}$, $j = 1, 2$, $\mathbf{x}_2 =^{tr} (u_{p_1}, u_{p_2}) \in H^2_{p_1,p_2}$. Так как сумма последних двух слагаемых в правой части равенства (11) неотрицательна, то получим следующее неравенство :

$$||\mathbf{T}_2\mathbf{x}_2||^2 \geq \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_{2j}(\theta)|u_{p_j}|^2\, d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\mathrm{Re}\, [B_{212}(\theta) u_{p_1} \bar{u}_{p_2}] d\theta. \tag{12}$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Из условий*

(i) $A_{2k}(\theta) \geq 0$ $k = 1, 2$, *почти всюду,*

(ii) $|B_{212}(\theta)|^2 \leq A_{21}(\theta) A_{22}(\theta)$, *почти всюду,*

(ii)′ $\mu(E_{212}) > 0$, *где* μ *- лебегова мера,*

следует, что $\dim \mathrm{Ker}\, \mathbf{T}_2 \leq p_1 + p_2$.

Доказательство. Функции A_{2k}, $k = 1, 2$ не могут быть тождественными нулями. В противном случае

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_{2k} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^{2} (|\psi_{mk}|^2 - |\psi_{mk}^{(p_k)}|^2) d\theta =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |a_l^{(1,k)}|^2 - \sum_{l=-\infty}^{-p_k-1} |a_l^{(1,k)}|^2 + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |a_l^{(2,k)}|^2 - \sum_{l=-\infty}^{-p_k-1} |a_l^{(2,k)}|^2 =$$

$$= \sum_{l=-p_k}^{+\infty} |a_l^{(1,k)}|^2 + \sum_{l=-p_k}^{+\infty} |a_l^{(2,k)}|^2,$$

и отсюда следует, что $a_l^{(1,k)} = 0$, $a_l^{(2,k)} = 0$, когда $-p_k \leq l < +\infty$. Следовательно, $\psi_{mk} = \psi_{mk}^{(p_k)}$, $m = 1, 2$, что невозможно.

Согласно условиям (ii), (ii)′ существуют функции $h_1(\theta)$, $h_2(\theta)$, удовлетворяющие условиям

$$h_1(\theta) h_2(\theta) = B_{212}(\theta) \quad |h_1(\theta)|^2 \leq A_{21}(\theta), \quad |h_2(\theta)|^2 \leq A_{22}(\theta) \tag{13}$$

и, по крайней мере одно из этих неравенств строгое на некотором множестве $F \subseteq E_{212}$ с $\mu(F) > 0$.

Неравенство (12) можно переписать следующим образом :

$$||\mathbf{T}_2\mathbf{x}_2||^2 \geq \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (A_{2j}(\theta) - |h_j(\theta)|^2 + |h_j(\theta)|^2) |u_{p_j}|^2\, d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\mathrm{Re}\,[h_1(\theta)h_2(\theta)u_{p_1}(\theta)\bar{u}_{p_2}(\theta)]d\theta =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|h_1u_{p_1}+h_2u_{p_2}|^2d\theta+\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(A_{2j}-|h_j|^2)|u_{p_j}|^2d\theta. \qquad (14)$$

Учитывая тот факт, что

$$\mu\{\theta:\ \varphi(\theta)\in H^2,\ |\varphi(\theta)|^2=0\}=0 \quad \text{и} \quad A_{2,k}(\theta)\not\equiv 0, \quad k=1,2,$$

заключаем, что правая часть неравенства (12) строго положительна, если одна из функций u_{p_k}, $k=1,2$ равна нулю. В случае, когда функции u_{p_1}, $u_{p_2}\neq 0$, согласно (13) получаем, что правая часть неравенства (14) строго положительна, чем и завершается доказательство Теоремы 1.

Замечание 2. Условия Теоремы 1 можно ослабить.

Пусть

$$\tilde{\psi}_{mn}(\theta)=\psi_{mn}(\theta)-\sum_{k=0}^{\infty}b_k^{(m,n)}e^{ik\theta}-\sum_{k=-p_n}^{-1}c_k^{(m,n)}e^{ik\theta},$$

где $\sum_{k=0}^{\infty}|b_k^{(m,n)}|^2<\infty$, $m,n=1,2$.

Тогда вместо (i), (ii), (ii)$'$ достаточно потребовать выполнения следующих условий :

(i$'$) $A'_{2k}(\theta)=\sum_{m=1}^{2}(|\psi_{mk}|^2-|\tilde{\psi}_{mk}|^2)\geq 0$, $k=1,2$, почти всюду.

(ii$'$) $|B'_{212}(\theta)|^2=|\sum_{m=1}^{2}(\psi_{m1}\psi_{m2}-\psi_{m1}\psi_{m2})|^2\leq A'_{21}(\theta)A'_{22}(\theta)$, почти всюду,

(ii$'$)$'$ $\mu(E'_{212})>0$, где $E'_{212}=\{\theta;\ |B'_{212}|^2<A'_{21}A'_{22}\}$,

так как символом оператора T^* является функция, сопряженная символу T и

$$\mathbf{T}_2^*=\begin{pmatrix}T_{11}^* & T_{21}^*\\ T_{12}^* & T_{22}^*\end{pmatrix}.$$

Теорема 1*. *Из условий*

(i*) $A_{2k}(\theta)\geq 0$, $k=1,2$, *почти всюду,*

(ii*) $|B_{212}^*(\theta)|^2\leq A_{21}^*(\theta)A_{22}^*(\theta)$, *почти всюду,*

(ii*)$'$ $\mu(E_{212}^*)>0$,

следует, что $\dim\mathrm{Coker}\,\mathbf{T}_2=\dim\mathrm{Ker}\,\mathbf{T}_2^*\leq p_1+p_2$.

Из Теорем 1 и 1*, получим достаточные условия для обратимости оператора $\mathbf{T}_2$.

Теорема 2. *Пусть условия Теорем 1 и 1* выполнены с* $p_1 = p_2 = 0$. *Тогда оператор* $\mathbf{T}_2$ *обратим.*

Приведем примеры символов, удовлетворяющих условиям Теоремы 1 и принадлежащих пространствам H^∞ и L^∞. Для этого воспользуемся следующей хорошо известной теоремой (см. [3], стр. 81) :

Если $h = |f|^2 \in L^1$, то $f \in H^2$ тогда и только тогда, когда $\log h \in L^1$.

Пример 1. Пусть неотрицательные функции h_{mn}, $m, n = 1, 2$ удовлетворяют условиям

$$0 < M \le h_{ii}(\theta) \le 2M, \quad \text{если} \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad i = 1, 2,$$

$$0 < N \le h_{ii}(\theta) \le 2N, \quad \text{если} \quad \pi < \theta \le 2\pi, \quad i = 1, 2,$$

$$M \le h_{ij}(\theta) \le 2M, \quad \text{если} \quad \pi < \theta \le 2\pi, \quad i \ne j,$$

$$N \le h_{ij}(\theta) \le 2N, \quad \text{если} \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad i \ne j.$$

Так как $\log h_{mn} \in L^1(0, 2\pi)$, $m, n = 1, 2$, то в силу приведенной теоремы из работы [3], существуют функции $\psi_{mn}(\theta) \in H^2$, $m, n = 1, 2$ такие, что $h_{mn}(\theta) =$ ю$|\psi_{mn}(\theta)|^2$. Более того, в силу принципа максимума модуля аналитической функции, $\psi_{mn}(\theta) \in H^\infty$. Если взять число M достаточно большим относительно N, то легко видеть, что функция ψ_{mn} удовлетворяет условиям (ii), (ii)$'$ Теоремы 1. Условие (i) выполняется автоматически.

Пример 2. Пусть

$$\varphi_{mn}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{-1} d_k^{(m,n)} e^{ik\theta}, \quad m, n = 1, 2$$

коаналитические функции, удовлетворяющие условиям $|\varphi_{mn}| < \delta$. Легко видеть, что при достаточно малом δ функции $\tilde{\psi}_{mn} = \psi_{mn} + \varphi_{mn}$, где ψ_{mn} функции, построенные в Примере 1, принадлежат пространству L^∞ и удовлетворяют условиям Теоремы 1.

Распространим теперь наш результат на n-мерный случай. Для $n \times n$ -мерной операторной матрицы $\mathbf{T}_n = (T_{rs})_{r,s=1}^n$ справедлива следующая

Теорема 3. *Из условий*

(i_k) $A_{nk}(\theta) \ge 0$ *п. в.*, $k = \overline{1, n}$,

(i_{kl}) $|B_{nkl}(\theta)|^2 \le A_{nk}(\theta)A_{nl}(\theta)$, *п. в.*, $k,l = \overline{1,n}$, $k \neq l$,

$(i_{kl})'$ $\mu(E_{nkl}) > 0$, $k,l = \overline{1,n}$, $k \neq l$,

следует, что $\dim \operatorname{Ker} \mathbf{T}_n \le p_1 + \cdots + p_n$.

Теорема 3*. *Из условий*

(i_k^*) $A_{nk}^*(\theta) \ge 0$ *п. в.*, $k = \overline{1,n}$,

(i_{kl}^*) $|B_{nkl}^*(\theta)|^2 \le A_{nk}^*(\theta)A_{nl}^*(\theta)$ *п. в.*, $k,l = \overline{1,n}$, $k \neq l$

$(i_{kl}^*)'$ $\mu(E_{nkl}^*) > 0$, $kl = \overline{1,n}$ $k \neq l$

следует, что $\dim \operatorname{Coker} \mathbf{T}_n = = \dim \operatorname{Ker} \mathbf{T}_n^* \le p_1 + \cdots + p_n$.

Доказательства Теорем 3 и 3* аналогичны двумерному случаю и поэтому мы их опускаем.

Как известно, теплицев оператор имеет следующее представление

$$T_\psi u = P_+ u\psi = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{\psi(\xi)u(\xi)}{\xi - z}d\xi, \tag{15}$$

где $\psi \in L^\infty$, $u \in H^2$.

В силу (15) уравнение

$$\mathbf{T}_n\mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n, \quad \text{где} \quad \mathbf{x}_n,\ \mathbf{y}_n \in \mathbf{H}_n^2$$

можно записать в виде системы интегральных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{\psi_{mk}(\xi)x_k(\xi)}{\xi - z}d\xi = y_m(z), \quad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

Для системы (16) имеем следующие аналоги Теорем 3 и 3*.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (i_k), (i_{kl}) *и* $(i_{kl})'$, $k,l = \overline{1,n}$, $k \neq l$. *Тогда размерность ядра системы (16) не превосходит* $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$.

Теорема 4*. *Пусть выполнены условия* (i_k^*), (i_{kl}^*) *и* $(i_{kl}^*)'$, $k,l = \overline{1,n}$, $k \neq l$. *Тогда размерность коядра системы (16) не превосходит* $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$.

4. В этом пункте рассмотрим бесконечномерный матричный оператор

$$\mathbf{T}_\infty = (T_{rs})_{r,s=1}^{\infty},$$

где T_{rs}, $r, s = 1, 2, \ldots$ - теплицевы операторы, определенные на H^2, с символами

$$\psi_{rs}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^{(r,s)} e^{ik\theta} \in L^\infty, \quad r, s = 1, 2, \ldots.$$

Предположим, что операторы T_{rs}, $r, s = 1, 2, \ldots$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{r=1}^{\infty} \|T_{rs}\|^2 < M, \; s = 1, 2, \ldots, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \|T_{rs}^*\|^2 < M, \; r = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

где M - положительные постоянные.

Так как $\|T_{rs}\|^2 = \operatorname{esssup} |\psi_{rs}(\theta)|^2$, условия (17) можно записать в виде

$$\sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{esssup} |\psi_{rs}(\theta)|^2 < M, \; s = 1, 2, \ldots, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \operatorname{esssup} |\psi_{rs}(\theta)|^2 < M, \; r = 1, 2, \ldots. \tag{18}$$

При выполнении условия (17), операторы $\mathbf{T}_\infty$ и $\mathbf{T}_\infty^*$ определены на пространстве

$$\mathbf{H}_\infty^2 = H^2 \oplus H^2 \oplus \cdots.$$

Норма и скалярное произведение в H_∞^2 определяются следующим образом :

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{H}_\infty^2}^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \|x^{(p)}\|_{H^2}^2, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathbf{H}_\infty^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (x^{(k)}, y^{(k)})_{H^2},$$

где

$$\mathbf{x} =^{tr} (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots), \quad x^{(i)} \in H^2 \;\; i = 1, 2, \ldots,$$

$$\mathbf{y} =^{tr} (y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}, \ldots), \quad y^{(i)} \in H^2 \;\; i = 1, 2, \ldots.$$

Легко видеть, что

$$\|\mathbf{T}_\infty \mathbf{x}\|_{\mathbf{H}_\infty^2}^2 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|T_{ks} x^{(s)}\|_{H^2}^2 + 2\operatorname{Re} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s,m=1 \; s \neq m}^{\infty} (T_{rs} x^{(s)}, T_{rm} x^{(m)})_{H^2}. \tag{19}$$

При $\mathbf{P} = (p_1, p_2, \ldots)$ определим подпространство $H_\mathbf{P}^2 \subset \mathbf{H}_\infty^2$ следующим образом :

$$H_\mathbf{P}^2 = \{\mathbf{x}_\mathbf{P} =^{tr} (x_{p_1}^{(1)}, x_{p_2}^{(2)}, \ldots, x_{p_n}^{(n)}, \ldots), \quad \text{где} \quad x_{p_k}^{(k)} \in H_{p_k}^2\}.$$

Принимая во внимание (9), (10) и (19), для $\mathbf{x}_\mathbf{P} \in H_\mathbf{P}^2$ получаем

$$\|\mathbf{T}_\infty \mathbf{x}_\mathbf{P}\|_{\mathbf{H}_\infty^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_{\infty,k}(\theta) |x_{p_k}^{(k)}|^2 \, d\theta +$$

$$+ \sum_{k,l=1 \; k \neq l}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\operatorname{Re} \, [B_{\infty,k,l} x_{p_k}^{(k)} \overline{x_{p_l}^{(l)}}] d\theta +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \|T_{mk}^{(p_k)} x_{p_k}^{(k)}\|^2 + \sum_{k,s=1 \; k \neq s}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \, (T_{mk}^{(p_k)} x_{p_k}^{(k)}, T_{ms}^{(p_s)} x_{p_s}^{(s)}), \tag{20}$$

где

$$A_{\infty,k}(\theta)=\sum_{m=1}^{\infty}(|\psi_{mk}|^2-|\psi_{mk}^{(p_k)}|^2),$$

$$B_{\infty,k,l}(\theta)=\sum_{m=1}^{\infty}(\psi_{mk}\bar{\psi}_{ml}-\psi_{mk}^{(p_k)}\bar{\psi}_{ml}^{(p_l)}).$$

Так как сумма последних двух слагаемых в правой части равенства (20) неотрицательна, то справедлива оценка

$$||\mathbf{T}_\infty \mathbf{x}_\mathbf{P}||^2\geq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}A_{\infty,k}(\theta)|x_{p_k}^{(k)}|^2\,d\theta+$$

$$+\sum_{k,l=1\ k\neq l}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}2\mathrm{Re}\,[B_{\infty,k,l}(\theta)x_{p_k}^{(k)}\bar{x}_{p_l}^{(l)}]d\theta. \tag{21}$$

Непосредственным следствием (21) является следующая

Теорема 5. *Из условий*

(j_k) $A_{\infty,k}(\theta)\geq 0$ п. в., $k=1,2,\ldots;$

(j_{kl}) $|B_{\infty,k,l}(\theta)|^2\leq A_{\infty,k}(\theta)A_{\infty,l}(\theta)$ п. в., $k\neq l$ $k,l=1,2,\ldots;$

$(j_{kl})'$ $\mu(E_{\infty,k,l})>0$, $k\neq l$ $k,l=1,2,\ldots,$

где $E_{\infty,k,l}=\{\theta;\ |B_{\infty,k,l}|^2<A_{\infty,k}A_{\infty,l},\ k\neq l\}$, следует, что $\dim\mathrm{Ker}\,\mathbf{T}_\infty\leq$ $\leq\sum_{k=1}^{\infty}p_k$.

Теорема 5*. *Из условий*

(j_k^*) $A_{\infty,k}^*(\theta)=\sum_{m=1}^{\infty}(|\psi_{km}|^2-|(\psi_{km})^{(p_k)}|^2)\geq 0$ п. в., $k=1,2,\ldots;$

(j_{kl}^*) $|B_{\infty,k,l}^*(\theta)|^2=|\sum_{m=1}^{\infty}(\psi_{km}\bar{\psi}_{lm}-(\psi_{km})^{(p_k)}\overline{(\psi_{lm})^{(p_l)}})|^2\leq A_{\infty,k}^*(\theta)A_{\infty,l}^*(\theta)$ п. в., $k\neq l$ $k,l=1,2,\ldots;$

$(j_{kl}^*)'$ $\mu(E_{\infty,k,l}^*)>0$, $k\neq l$ $k,l=1,2,\ldots,$

где $E_{\infty,k,l}^*=\{\theta;\ |B_{\infty,k,l}^*|^2<A_{\infty,k}^*A_{\infty,l}^*,\ k\neq l\}$, следует, что $\dim\mathrm{Coker}\,\mathbf{T}_\infty=$ $=\dim\mathrm{Ker}\,\mathbf{T}_\infty^*\leq\sum_{k=1}^{\infty}p_k$.

Доказательства Теорем 5 и 5* аналогичны двумерному случаю и поэтому мы их опускаем.

Замечание 3. Если среди чисел p_k, $k=1,2,\ldots$ имеется лишь конечное число отличных от нуля, то ядро и коядро оператора $\mathbf{T}_\infty$ конечномерны.

Уравнение $\mathbf{T}_\infty \mathbf{x} = \mathbf{y}$ можно представить в виде бесконечной системы интегральных уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{\psi_{mk}(\xi) x_k(\xi)}{\xi - z} d\xi = y_m(z), \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

где $\psi_{mk} \in L^\infty$, $m, k = 1, 2, \ldots$ и удовлетворяют условиям (18).

Для систем (22) имеют место следующие аналоги Теорем 5 и 5*.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (j_k), (j_{kl}) *и* $(j_{kl})'$, $k, l = 1, 2, \ldots$, $k \neq l$. *Тогда размерность ядра системы (22) не превосходит* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$.

Теорема 6*. *Пусть выполнены условия* (j_k^*), (j_{kl}^*) *и* $(j_{kl}^*)'$, $k, l = 1, 2, \ldots$, $k \neq l$. *Тогда размерность коядра системы (22) не превосходит* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$.

Обсудим теперь частный случай, когда $T_{rs} = T_{r-s}$. Положим

$$\tilde{T}_\infty = (T_{r-s})_{r,s=1}^{\infty},$$

и предположим, что операторы T_k, $k = 0, \pm 1, \ldots$ удовлетворяют оценке

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{esssup} |\psi_k(\theta)|^2 < M \tag{23}$$

для некоторого положительного M, $\psi_k(\theta) \in L^\infty$ - символ теплицева оператора T_k.

В этом случае Теорему 5 можно переформулироватьследующим образом :

Теорема 5. *Из условий*

$(\tilde{j}_p)$ $A_p(\theta) = \sum_{k=-p}^{\infty} (|\psi_k|^2 - |\psi_k^{(0)}|^2) \geq 0$ *п. в.*, $p = 1, 2, \ldots$;

$(\tilde{j}_{pj})$ $|B_{pj}(\theta)|^2 = |\sum_{k=-p}^{\infty} (\psi_k \psi_{k-j} - \psi_k^{(0)} \psi_{k-j}^{(0)})|^2 \leq A_p(\theta) A_j(\theta)$ *п. в.*, $p \neq j$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$;

$(\tilde{j}_{pj})'$ $\mu(E_{pj}) > 0$, $p \neq j$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$,

где $E_{pj} = \{\theta;\ |B_{pj}|^2 < A_p A_j,\ p \neq j\}$ *следует, что* $\dim \operatorname{Ker} \tilde{\mathbf{T}}_\infty = 0$.

5. В этом пункте рассматривается бесконечная операторная матрица

$$\mathbf{K} = (A_{i-j})_{i,j=1}^{\infty},$$

где $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^{n}$ и $a_{ij}^{(k)} \in \mathbf{C}^1$.

Предположим, что

$$\sum_{p,m=1}^{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{mp}^{(k)}|^2 < +\infty. \tag{24}$$

Оператор $\mathbf{K}$ определен на

$$\mathbf{C}_\infty^n = \mathbf{C}^n \oplus \mathbf{C}^n \oplus \cdots .$$

Положим

$$l_n^2 = l^2 \oplus l^2 \oplus \cdots \oplus l^2.$$

Рассмотрим операторную матрицу $\mathbf{K}' = (B_{kj})_{k,j=1}^n$, определенную на пространстве l_n^2, где $B_{kj} = (a_{kj}^{p-q})_{p,q=1}^{\infty}$ теплицевы матрицы с символами

$$B_{kj} \sim \psi_{kj}(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{kj}^{(m)} e^{im\theta}, \quad k,j = 1,n.$$

Из условий (24) следует $\psi_{kj} \in L^2$, $k,j = 1,n$.

При сильном предположении $\psi_{kj} \in L^\infty$, $k,j = 1,n$, операторы $\mathbf{K}'$ и $\mathbf{K}$ определены на l_n^2 и $\mathbf{C}_\infty^n$, соответственно, и одновременно обратимы (см. [4]).

Таким образом, принимая во внимание, что

$$\dim\ker\mathbf{K} = \dim\ker\mathbf{K}' \quad \text{и} \quad \dim\operatorname{coker}\mathbf{K} = \dim\operatorname{coker}\mathbf{K}'$$

и используя Теоремы 3 и 3*, получаем оценки размерностей ядер и коядер векторозначных теплицевых операторов $\mathbf{K}$.

ABSTRACT. Let $\mathbf{T}_n = (T_{ij})_{i,j=1}^n$ be an operator matrix, where T_{ij}, $i,j = 1,n$ are Toeplitz operators defined on Hardy space H^2. In this paper we obtain some sufficient conditions for invertibility of $\mathbf{T}_n$ which do not assume permutability of operators T_{ij}. We also obtain bounds for dimensions of kernel and cokernel of the operator matrices $\mathbf{T}_n$, as well as of vector-valued Toeplitz operator matrices.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Халмош, Гильбертово Пространство в Задачах, Мир, Москва, 1970.
2. D. R. Brown, "On the spectrum of operator matrices", Glas. Mat., vol 21, no.2, pp. 357–362, 1986.
3. К. Гофман, Банаховы Пространства Аналитических Функций, Москва, 1975.
4. Р. Мкртчян, "О размерностях ядра и коядра теплицевых операторов", Труды научной конференции, посвященной памяти академика Р. А. Александряна, Ереванский Государственный Университет, 1993.

9 Марта 1992

Армянский государственный инженерный университет