

ОБЩАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА В ДВУГРАННОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А. А. Андриян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, №2, 1993

Пусть M - класс вектор-функций $u(x, t) \in C^\infty(R^n \times \Pi_\alpha)$, аналитических в $t \in \Pi_\alpha = \{t | 0 < \arg t < \alpha < \pi\}$ и имеющих полиномиальный рост по (x, t) . Пусть $A(\xi)$, $\xi \in R^n$ - квадратная матрица порядка m с полиномиальными элементами. Для системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(i \frac{\partial}{\partial x})u, \quad u \in M, \quad (x, t) \in R^n \times \Pi_\alpha \quad (1)$$

определим строго регулярные и регулярные случаи. Пусть r обозначает порядок регулярности системы (1), а $B(\xi)$ - полиномиальная матрица размерности $r \times m$. Поставим граничное условие :

$$B(i \frac{\partial}{\partial x})u(x, 0) = f(x), \quad f(x) \in M. \quad (2)$$

Получены условия корректности задачи (1), (2) в строго регулярном случае. В регулярном случае аналогичные условия гарантируют существование решения.

Также изучена однородная ($f \equiv 0$) задача.

0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Pi_\alpha = \{t | 0 < \arg t < \alpha < \pi\}$, $\Pi_\alpha^* = \{\lambda | \frac{\pi}{2} \leq \arg \lambda \leq \frac{3}{2}\pi - \alpha\}$ - угловые области в комплексной плоскости Π , а $A(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n$ - квадратная матрица порядка m , элементы которой полиномы с постоянными коэффициентами.

Обозначим через M_γ , $\gamma \in R$, класс вектор-функций $u(x, t) \in C^\infty(R^n \times \Pi_\alpha)$, аналитических по $t \in \Pi_\alpha$ и удовлетворяющих неравенствам

$$|(i \frac{\partial}{\partial x})^k u(x, t)| \leq c_k (1 + |x|)^\gamma (1 + |t|)^\beta, \quad (x, t) \in R^n \times \Pi_\alpha, \quad (1)$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$ - мультииндекс, $(i \frac{\partial}{\partial x})^k = i^{|k|} \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$,

$i = \sqrt{-1}$, $\beta \in R$, $c_k \geq 0$.

Положим

$$M = \bigcup_{\gamma \in R} M_\gamma.$$

Рассмотрим систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(i \frac{\partial}{\partial x})u, \quad (x, t) \in R^n \times \Pi_\alpha, \quad (2)$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$ - мультииндекс, $(i \frac{\partial}{\partial x})^k = \frac{i^{|k|} \partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$, $|k| = \sum_{i=1}^n k_i$ и $u = (u_1, \dots, u_m) \in M$.

Обозначим через $\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_m(\xi)$ корни (с учетом их кратности) характеристического уравнения

$$P_m(\xi, \lambda) = \det(\lambda E_m - A(\xi)) = 0, \quad (3)$$

соответствующие системе (2), где E_m - единичная матрица порядка m .

Пусть $\rho(\xi)$ - число корней уравнения (3), принадлежащих Π_α^* . Система (2) называется *строго регулярной*, если

$$a) \rho(\xi) = \text{const} = r \quad \text{для любых } \xi \in R^n$$

и *регулярной*, если

$$b) \rho(\xi) = \text{const} = r \quad \text{за исключением быть может конечного числа точек.}$$

Для определенности предположим, что $\rho(\xi) = r$ для любых $\xi \in R^n \setminus \{O\}$, $\rho(0) > r$, тогда система (2) является регулярной (это не ограничивает общности).

Пусть $B(\xi)$ - полиномиальная матрица с постоянными коэффициентами размерности $r \times m$. Для решения u системы (2) рассматривается граничная

Задача А.

$$B(i \frac{\partial}{\partial x})u(x, 0) = f(x), \quad x \in R^n, \quad (4)$$

где $f = (f_1, \dots, f_r) \in M$.

Введем матрицу-функцию

$$P^+(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+(\xi)} (\lambda E_m - A(\xi))^{-1} d\lambda, \quad (5)$$

где замкнутый контур $\gamma^+(\xi)$ содержит только те корни характеристического уравнения (3), которые принадлежат области $S\Pi_\alpha^* = \Pi \setminus \Pi_\alpha^*$.

Основной результат работы следующий.

Теорема 1. Пусть система (2) строго регулярна. Тогда условие

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} P^+(\xi) \\ B(\xi) \end{pmatrix} = m \quad \text{для любых } \xi \in R^n \quad (6)$$

является необходимым и достаточным для существования и единственности решения Задачи А. Если $f \in M_\gamma$, то $u \in M_\gamma$. Если система (2) регулярна ($\rho(0) > \tau$) и условие (6) нарушается только в конечном числе точек, то неоднородная Задача А разрешима для любых f , а однородная Задача А имеет бесконечное число линейно независимых решений.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} - \lambda u(t) = f(t), \quad (1.1)$$

где $\lambda \in \Pi$, $f \in M$ и $u \in M$ - искомая функция.

Имест место

Лемма 1.1. Уравнение (1.1) разрешимо для любой функции $f(t)$. Если $\lambda \in \Pi_\alpha^*$, то однородное уравнение имеет одно нетривиальное решение; если же $\lambda \in C\Pi_\alpha^*$, то однородное уравнение имеет только нулевое решение.

Доказательство. Утверждение леммы относительно однородного уравнения очевидно. Пусть $\lambda \in \Pi_\alpha^*$. Решение уравнения (1.1) имеет вид

$$u(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau \in M,$$

где интегрирование производится по отрезку $[0, t]$.

Пусть теперь $\lambda \in C\Pi_\alpha^*$. Введем новых функций $v(t) = u(\frac{t}{\lambda})$, $g(t) = \frac{1}{\lambda} f(\frac{t}{\lambda})$ уравнение (1.1) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial v(t)}{\partial t} - v(t) = g(t), \quad t \in \lambda\Pi_\alpha = \Pi_\alpha^\lambda = \{z | z = \lambda t, \quad t \in \Pi_\alpha\}. \quad (1.2)$$

Так как $-\frac{\pi}{2} - \alpha < \arg \lambda < \frac{\pi}{2}$, то по крайней мере одна сторона угла Π_α^λ будет находиться в правой полуплоскости. Пусть это $L_0 = \{z | z = \lambda t, \quad \arg t = 0\}$. Тогда, очевидно, что функция

$$v(t) = - \int_t^\infty e^{t-\tau} g(\tau) d\tau = - \int_{L_0} e^{-\eta} g(t + \eta) d\eta \in M,$$

где интегрирование производится по лучу $[t, \infty) \cap L_\alpha$, является требуемым решением. Аналогично поступаем и в случае $L_1 = \{z | z = \lambda t, \arg t = \alpha\}$. Лемма 1.1 доказана.

Рассмотрим теперь систему

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} - A u(t) = f(t), \quad t \in \Pi_\alpha, \quad (1.3)$$

где A - постоянная квадратная матрица порядка n и $u(t), f(t) \in M$. Используя жорданову форму матрицы A и Лемму 1.1 легко установить разрешимость системы (1.3) и подсчитать число линейно независимых решений однородной системы.

II. В произвольной точке $\xi \neq 0$ корни уравнения (3) будем нумеровать так, чтобы $\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_r(\xi) \in \Pi_\alpha^*$ и $\lambda_{r+1}(\xi), \dots, \lambda_m(\xi) \in C\Pi_\alpha^*$. Очевидно

$$|\lambda_j(\xi)| \leq c_0(1 + |\xi|^2)^{m_0}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.4)$$

Пусть Γ_α обозначает границу угла Π_α^* .

Лемма 1.2. В случае а) справедлива оценка

$$\text{dist}(\lambda_j(\xi), \Gamma_\alpha) \geq c(1 + |\xi|^2)^{s_0}, \quad \xi \in R^n, \quad (1.5)$$

а в случае б)

$$\text{dist}(\lambda_j(\xi), \Gamma_\alpha) \geq c|\xi|^{s_1}(1 + |\xi|^2)^{s_2}, \quad \xi \in R^n \setminus \{O\}, \quad (1.6)$$

$j = r + 1, \dots, m$.

Доказательство. Начнем со случая а). Введем множество

$$E_1 = \{(x, y, \xi, \dots) | x = 1 + |\xi|^2, y = |\lambda - \lambda_j(\xi)|^2, P_m(\xi, \lambda_j(\xi)) = 0,$$

$$j = r + 1, \dots, m, \lambda = i\rho \text{ или } \lambda = \rho e^{i\alpha}, \rho \geq 0\},$$

которое очевидно является полуалгебраическим и рассмотрим полуалгебраическую функцию одной переменной x :

$$f(x) = \inf\{y | (x, y, \xi, \dots) \in E_1\}.$$

Поскольку при больших x функция $f(x)$ принимает только конечные положительные значения, то имеем представление [1]

$$f(x) = Ax^a(1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty, \quad A > 0.$$

Это означает, что $y \geq \frac{A}{2}x^a$ при $x \gg 1$, следовательно неравенство (1.5) имеет место при $|\xi| \gg 1$. Воспользовавшись непрерывностью корня $\lambda_j(\xi)$, легко получаем оценку (1.5) для ограниченных $|\xi|$.

В случае регулярной системы (2) введем множества

$$E_2 = \{(x, y, \xi, \dots) | x|\xi|^2 = 1, \quad y = |\lambda - \lambda_j(\xi)|^2, \quad P_m(\xi, \lambda_j(\xi)) = 0,$$

$$j = r + 1, \dots, m, \quad \lambda = i\rho \quad \text{or} \quad \lambda = \rho e^{i\alpha}, \quad \rho \geq 0\}$$

и установим неравенство (1.6) в окрестности точки $\xi = 0$. Остальные ξ рассматривались выше. Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. Элементы $p_{ij}^+(\xi)$ матрицы $P^+(\xi)$ принадлежат $C^\infty(R^n)$ в случае а), а в случае б) принадлежат $C^\infty(R^n \setminus \{O\})$ и удовлетворяют, соответственно, оценкам :

$$a) \quad \left| \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} p_{ij}^+(\xi) \right| \leq c_k(1 + |\xi|)^{m_k}, \quad \xi \in R^n, \quad (1.7)$$

$$b) \quad \left| \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} p_{ij}^+(\xi) \right| \leq c_k |\xi|^{n_k} (1 + |\xi|)^{p_k}, \quad \xi \neq 0, \quad n_k \geq 0. \quad (1.8)$$

Доказательство. Гладкость элементов матрицы $P^+(\xi)$ следует из формулы (5) и из того, что множества $\{\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_r(\xi)\}$, $\{\lambda_{r+1}(\xi), \dots, \lambda_m(\xi)\}$ разьединены для любых $\xi \in R^n$ в случае а) и для $\forall \xi \in R^n \setminus \{O\}$ в случае б). Введем полиномы :

$$Q(\xi, \lambda) = \prod_{j=1}^r (\lambda - \lambda_j(\xi)) = \lambda^r + \sum_{k=1}^r q_k(\xi) \lambda^{m-k}; \quad (1.9)$$

$$R(\xi, \lambda) = \prod_{j=r+1}^m (\lambda - \lambda_j(\xi)) = \lambda^{m-r} + \sum_{k=1}^{m-r} r_k(\xi) \lambda^{m-r-k}.$$

Имеем

$$R(\xi, \lambda) + R_1(\xi, \lambda)(\lambda - \lambda_1(\xi)) = R(\xi, \lambda_1(\xi)), \quad (1.10)$$

где $R_1(\xi, \lambda)$ - некоторый полином от λ .

Применяя (1.10), получим

$$\begin{aligned}
 P^+(\xi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+(\xi)} \frac{a(\xi, \lambda)}{P_m(\xi, \lambda)} d\lambda = \\
 &= \frac{1}{2\pi i R(\xi, \lambda_1(\xi))} \times \int_{\gamma^+(\xi)} a(\xi, \lambda) \frac{R(\xi, \lambda) + R_1(\xi, \lambda)(\lambda - \lambda_1(\xi))}{R(\xi, \lambda)(\lambda - \lambda_1(\xi)) \cdots (\lambda - \lambda_r(\xi))} d\lambda = \\
 &= \frac{1}{2\pi i R(\xi, \lambda_1(\xi))} \int_{\gamma^+(\xi)} \frac{a(\xi, \lambda)}{Q(\xi, \lambda)} d\lambda + \\
 &+ \frac{1}{2\pi i R(\xi, \lambda_1(\xi))} \int_{\gamma^+(\xi)} a(\xi, \lambda) \frac{R_1(\xi, \lambda)}{R(\xi, \lambda)(\lambda - \lambda_2(\xi)) \cdots (\lambda - \lambda_r(\xi))} d\lambda = \quad (1.11) \\
 &= \frac{1}{2\pi i R(\xi, \lambda_1(\xi))} \int_{\gamma^+(\xi)} \frac{a(\xi, \lambda) R_1(\xi, \lambda)}{R(\xi, \lambda)(\lambda - \lambda_2(\xi)) \cdots (\lambda - \lambda_r(\xi))} d\lambda, \\
 a(\xi, \lambda) &= (\lambda E_m - A(\xi))^{-1} P_m(\xi, \lambda)
 \end{aligned}$$

Преобразовывая интеграл (1.11) таким же образом, получим

$$P^+(\xi) = \frac{1}{2\pi i \omega(\xi)} \int_{\gamma^+(\xi)} \frac{a(\xi, \lambda) r(\xi, \lambda)}{R(\xi, \lambda)} d\lambda, \quad (1.12)$$

где $r(\xi, \lambda)$ - вполне определенный полином от λ с коэффициентами, имеющими степенной рост, а

$$\omega(\xi) = \prod_{j=1}^r R(\xi, \lambda_j(\xi)). \quad (1.13)$$

Используя Лемму 1.2 для оценки функции $\omega(\xi)$ и вычисляя интеграл в (1.12) по теореме о вычетах в точке $\lambda = \infty$, легко получим оценки (1.7), (1.8) при $k = 0$.

Производные оцениваются аналогично. Лемма 1.3 доказана.

Введем матрицы-функции

$$V^-(\xi, t) = e^{A(\xi)t} P^-(\xi), \quad V^+(\xi) = e^{A(\xi)t} P^+(\xi), \quad t \in \Pi_\omega,$$

$$P^-(\xi) = E_m - P^+(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-(\xi)} (\lambda E_m - A(\xi))^{-1} d\lambda, \quad (1.14)$$

где замкнутый контур $\gamma^-(\xi)$ окружает только те корни уравнения (3), которые принадлежат Π_α^* . Из представления $V^-(\xi, t) = e^{P^-(\xi)A(\xi)t} P^-(\xi)$, оценок (1.7), (1.8) и того, что все характеристические корни матрицы $P^-(\xi)A(\xi)$ принадлежат области Π_α^* , непосредственно следует

Лемма 1.4. Матрица-функция $V^-(\xi, t)$ удовлетворяет, соответственно, в случаях а) и б) оценкам:

$$a) \quad \left| \frac{\partial^k V^-(\xi, t)}{\partial \xi^k} \right| \leq c_k (1 + |\xi|^2)^{m_k} (1 + |t|)^{n_k}, \quad (1.15)$$

$$b) \quad \left| \frac{\partial^k V^-(\xi, t)}{\partial \xi^k} \right| \leq c_k |\xi|^{-p_k} (1 + |\xi|^2)^{q_k} (1 + |t|)^{r_k}, \quad p_k \geq 0. \quad (1.16)$$

Обозначим через S и S' , соответственно, пространство Шварца и ему сопряженнос. Включение $M(R^n \times \Pi_\alpha) \subset S'(R^n)$ при каждом фиксированном $t \in \Pi_\alpha$ и очевидно имеет место оценка

$$| \langle u(x, t), \varphi(x) \rangle | \leq c \|\varphi\|_{p(\gamma)} (1 + |t|)^\beta, \quad \varphi \in S, \quad (1.17)$$

где $\|\cdot\|_{p(\gamma)}$ - p -ая полунорма в $S(R^n)$.

Обозначим через $u(\xi, t)$ или $F[u(x, t)](\xi, t)$ преобразование Фурье в x функции $u(x, t) \in M(R^n \times \Pi_\alpha)$, рассматривая ее как обобщенную функцию. Образ Фурье системы (2) имеет вид

$$\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} = A(\xi)u(\xi, t), \quad t \in \Pi_\alpha. \quad (1.18)$$

Произвольное решение системы (1.18) задается формулой

$$u(\xi, t) = e^{A(\xi)t} u(\xi, 0), \quad t \in \Pi_\alpha. \quad (1.19)$$

Нас интересуют только те решения, которые удовлетворяют оценке (1.17). Имеет место

Лемма 1.5. Пусть $u(\xi, t)$, определенная формулой (1.19), удовлетворяет оценке (1.17). Тогда

$$P^+(\xi)u(\xi, 0) = 0 \quad \text{в} \quad R^n, \quad (1.20)$$

в случае а) и

$$P^+(\xi)u(\xi, 0) = 0 \quad \text{в} \quad R^n \setminus \{0\}, \quad (1.21)$$

в случае б).

Доказательство. Доказательства формул (1.20), (1.21) идентичны, (они носят локальный характер). Поэтому докажем только формулу (1.20). Перепишем (1.19) в виде

$$u(\xi, t) = V^-(\xi, t)P^-(\xi)u(\xi, 0) + V^+(\xi, t)P^+(\xi)u(\xi, 0), \quad t \in \Pi_\alpha. \quad (1.22)$$

В силу Леммы 1.4 первое слагаемое в (1.22) удовлетворяет неравенству (1.17). В произвольной точке $\xi_0 \in R^n$ пусть $\operatorname{Re} \lambda_{r+j}(\xi_0) > 0$, $j = 1, \dots, k$ (k зависит от ξ_0) и $\operatorname{Re} \lambda_{r+j}(\xi_0) \leq 0$, $j = k+1, \dots, m-r$. Очевидно существуют числа $\delta > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что

$$\operatorname{Re} \lambda_{r+j}(\xi) > \varepsilon_0, \quad j = 1, \dots, k, \quad |\xi - \xi_0| < \delta, \quad (1.23)$$

$$\operatorname{Re} \lambda_{r+j}(\xi) < \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad \operatorname{Re} (e^{i\alpha} \lambda_{r+j}(\xi)) > \varepsilon_0, \quad j = k+1, \dots, m-r, \quad |\xi - \xi_0| < \delta. \quad (1.24)$$

Матрицу $P^+(\xi)$ представим в виде

$$P^+(\xi) = P_1^+(\xi) + P_2^+(\xi),$$

где $P_1^+(\xi)$ и $P_2^+(\xi)$ соответствуют корням $\lambda_{r+1}(\xi_0), \dots, \lambda_{r+k}(\xi_0)$ и $\lambda_{r+k+1}(\xi_0), \dots, \lambda_m(\xi_0)$, соответственно.

Имеют место следующие оценки :

$$|e^{-A(\xi)t} P_1^+(\xi)| \leq c e^{-\varepsilon_0 t}, \quad \arg t = 0, \quad |\xi - \xi_0| < \delta,$$

$$|e^{A(\xi)t} P_2^+(\xi)| \leq c e^{\frac{\varepsilon_0}{2} t}, \quad \arg t = 0, \quad |\xi - \xi_0| < \delta, \quad (1.25)$$

$$|e^{-A(\xi)t} P_2^+(\xi)| \leq c e^{-\varepsilon_0 |t|}, \quad \arg t = \alpha, \quad |\xi - \xi_0| < \delta.$$

При $\arg t = 0$ и $|\xi - \xi_0| < \delta$ перепишем (1.22) в виде

$$u(\xi, t) = V^-(\xi, t)P^-(\xi)u(\xi, 0) + e^{A(\xi)t} P_1^+(\xi)u(\xi, 0) + e^{A(\xi)t} P_2^+(\xi)u(\xi, 0). \quad (1.26)$$

Из (1.25) имеем

$$| \langle P_1^+(\xi)u(\xi, 0), \varphi(\xi) \rangle | \leq c(1+t)^\beta e^{-\frac{\varepsilon_0}{2} t} \|\varphi\|_p \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(|\xi - \xi_0| < \delta).$$

Отсюда при $t \rightarrow +\infty$ получаем

$$P_1^+(\xi)u(\xi, 0) = 0, \quad |\xi - \xi_0| < \delta. \quad (1.27)$$

Принимая во внимание аналитичность по $t \in \Pi_\alpha$ и (1.27), получаем

$$u(\xi, t) = V^-(\xi, t)P^-(\xi)u(\xi, 0) + e^{\Lambda(\xi)t}P_2^+(\xi)u(\xi, 0). \quad (1.28)$$

Рассматривая (1.28) при $\arg t = \alpha$, $|\xi - \xi_0| < \delta$ имеем

$$P_2^+(\xi)u(\xi, 0) = 0, \quad |\xi - \xi_0| < \delta. \quad (1.29)$$

Соотношение (1.20) следует из (1.27), (1.29). Лемма 1.5 доказана.

В силу Леммы 1.5 из (1.22) следует

$$u(\xi, t) = V^-(\xi, t)P^-(\xi)u(\xi, 0) = V^-(\xi, t)u(\xi, 0). \quad (1.30)$$

III. Пусть система (2) строго регулярна и имеет место условие (6). Рассмотрим алгебраическую систему уравнений

$$P^+(\xi)v_j(\xi) = 0, \quad B(\xi)v_j(\xi) = e_j, \quad e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad (1.31)$$

Лемма 1.6. Система (1.31) имеет единственное решение, которое принадлежит $C^\infty(R^n)$ и удовлетворяет оценке

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} v_j(\xi) \right| \leq c_k (1 + |\xi|^2)^{m_k}. \quad (1.32)$$

Доказательство. Единственность очевидна. Заметим, что

$$P^+(\xi) = \frac{\mu(\xi, \lambda_1(\xi), \dots, \lambda_m(\xi))}{\omega(\xi)}, \quad (1.33)$$

где элементы $\mu(\dots)$ - полиномы от своих аргументов, а $\omega(\xi)$ определена формулой (1.13) (см. доказательство Леммы 1.3). Пусть l - число миноров $\alpha_k(\xi)$ порядка m матрицы в (6). Положим

$$\alpha(\xi) = \sum_{k=1}^l |\alpha_k(\xi)|^2. \quad (1.34)$$

В силу (6), $\alpha(\xi) > 0$, $\xi \in R^n$. Используя представление (1.33), оценку функции $\omega(\xi)$ по Лемме 1.2 и теорему Зайденберга-Тарского, легко показать, что [2]

$$\alpha(\xi) > c(1 + |\xi|^2)^s, \quad c > 0, \quad s \in R. \quad (1.35)$$

Очевидно, что наибольший по модулю минор $\alpha_{k_0}(\xi)$ (порядка m) удовлетворяет неравенству (1.35) с некоторой постоянной c , не зависящей от ξ . Заметим также, что [3]

$$\text{rank } P^+(\xi) = m - r \quad \forall \xi \in R^n, \quad (1.36)$$

и поэтому система (1.31) эквивалентна системе

$$A_{k_0}(\xi)v_j(\xi) = b_j, \quad b_j = (0, \dots, 0, e_j), \quad (1.37)$$

где $\det A_{k_0}(\xi) = \alpha_{k_0}(\xi) \neq 0$ в некоторой окрестности ξ . Из (1.37) следует, что $v_j(\xi) = A_{k_0}^{-1}(\xi)b_j \in C^\infty$ и удовлетворяет оценке (1.32) при $k = 0$. Для оценки производных $v_j(\xi)$ дифференцируем (1.31) по ξ_k , получим

$$P^+(\xi) \frac{\partial v_j}{\partial \xi_k} = -\frac{\partial P^+}{\partial \xi_k} v_j, \quad B(\xi) \frac{\partial v_j}{\partial \xi_k} = -\frac{\partial B}{\partial \xi_k} v_j.$$

Учитывая, что правая часть системы удовлетворяет неравенству (1.32), аналогично проверяется неравенство (1.32) для $\frac{\partial v_j}{\partial \xi_k}$. Лемма 1.6 доказана.

Замечание 1.1. Если предположим, что условие (6) нарушается в единственной точке $\xi = 0$, то, поступая аналогично, получим оценку

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} v_j(\xi) \right| \leq c_k |\xi|^{m_k} (1 + |\xi|^2)^{n_k}, \quad m_k \leq 0. \quad (1.38)$$

Пусть теперь система (2) регулярна (напомним, что $\rho(\xi) = r$, $\xi \neq 0$, $\rho(0) > r$). Очевидно условие (6) не выполнено в точке $\xi = 0$, так как $\text{rank } P^+(0) = m - \rho(0) < m - r$. Условие (6) все еще предполагается для точек $\xi \neq 0$. Тогда ясно, что оценка (1.32) для решения системы (1.31) в этом случае принимает вид (1.38).

IV. Введем матрицу-функцию

$$P_\mu^+(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\mu(\xi)} (\lambda E_m - A(\xi))^{-1} d\lambda, \quad |\xi| < \delta, \quad (1.39)$$

где замкнутый контур $\gamma_\delta(\xi)$ содержит те и только те корни характеристического уравнения (3), которые при $\xi = 0$ принадлежат области $C\Pi_\alpha^*$, $\delta > 0$ достаточно мало. Очевидно, что

$$P_o^+(\xi) \in C^\infty(|\xi| < \delta) \text{ и } \text{rank } P_o^+(\xi) = m - \rho(0),$$

$$\text{rank}(P^+(\xi) - P_o^+(\xi)) = \rho(0) - r \text{ при } |\xi| < \delta.$$

Справедлива [4]

Лемма 1.7. *Имеет место следующая формула :*

$$\text{rank} \begin{pmatrix} P_o^+(\xi) \\ B(\xi) \end{pmatrix} = m - \rho(0) + r, \quad 0 < |\xi| < \delta. \quad (1.40)$$

Доказательство. При $0 < |\xi| < \delta$ имеем

$$\begin{aligned} m = \text{rank} \begin{pmatrix} P^+(\xi) \\ P_o^+(\xi) \\ B(\xi) \end{pmatrix} &= \text{rank} \begin{pmatrix} P^+(\xi) - P_o^+(\xi) \\ P_o^+(\xi) \\ B(\xi) \end{pmatrix} \leq \\ &\leq \text{rank}(P^+(\xi) - P_o^+(\xi)) + \text{rank} \begin{pmatrix} P_o^+(\xi) \\ B(\xi) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

следовательно

$$\text{rank} \begin{pmatrix} P_o^+(\xi) \\ B(\xi) \end{pmatrix} \geq m - \rho(0) + r.$$

Заметим, что

$$\text{rank} \begin{pmatrix} P_o^+(\xi) \\ B(\xi) \end{pmatrix} \leq \text{rank } P_o^+(\xi) + \text{rank } B(\xi) \leq m - \rho(0) + r,$$

поэтому формула (1.40) верна. Лемма 1.7 доказана.

Рассмотрим теперь систему

$$P^+(\xi)v(\xi) = 0, \quad B(\xi)v(\xi) = \alpha(\xi), \quad (1.41)$$

где $\alpha(\xi)$ - заданный функционал, сосредоточенный в точке $\xi = 0$. Из условия (6) (напомним, что (6) предполагается для любых $\xi \neq 0$, а система (2) - строго регулярна) следует, что решение системы (1.41) сосредоточено в точке $\xi = 0$.

Покажем существование решения системы (1.41). В некоторой окрестности точки $\xi = 0$ система (1.41) эквивалентна системе (см. (1.37))

$$C(\xi)v(\xi) = \beta(\xi), \quad (1.42)$$

где $\beta(\xi) = (0, \alpha(\xi))$ - m -мерный вектор-функционал, сосредоточенный в точке $\xi = 0$ и $\det C(\xi) \neq 0$ для любых $\xi \neq 0$.

Предположим вначале, что $n = 1$. Тогда согласно [5] имеем представление

$$C(\xi) = R(\xi)D(\xi)C_0(\xi), \quad (1.43)$$

где $R(\xi)$ - рациональная матрица с $\det R(\xi) = 1$, $\det C_0(\xi) \neq 0$ для $|\xi| < \epsilon$, $C_0(\xi) \in C^\infty(|\xi| < \epsilon)$ а $D(\xi) = \{\delta_j^l \xi^{k_j}\}$ - диагональная матрица (δ_j^l - символ Кронеккера).

Вводя обозначения $C_0(\xi)v(\xi) = w(\xi)$, $\beta_1(\xi) = R^{-1}(\xi)\beta(\xi)$, сведем систему (1.42) к разрешимой системе

$$\xi^{k_j} w_j(\xi) = \beta_{1j}(\xi), \quad (w_1, \dots, w_m) = w, \quad (\beta_{11}(\xi), \dots, \beta_{1m}(\xi)) = \beta_1(\xi). \quad (1.44)$$

Однородная ($\alpha(\xi) \equiv 0$) система (1.41) имеет $k_1 + \dots + k_m \geq 1$ линейно независимых решений.

Пусть теперь $n \geq 2$, $\xi = (\xi_1, \xi')$, $\xi' = (\xi_2, \dots, \xi_n)$. Представим функционал $\beta(\xi)$ из (1.42) следующим образом:

$$\beta(\xi) = \sum_{j_2 \leq \nu_2, \dots, j_n \leq \nu_n} a_{j_2, \dots, j_n}(\xi_1) \delta^{(j_2)}(\xi_2) \otimes \dots \otimes \delta^{(j_n)}(\xi_n), \quad (1.45)$$

где $\delta^{(j)}$ обозначает производную порядка j функционала Дирака $\delta(\cdot)$. Решение (1.42) будем искать в виде (1.45)

$$v(\xi) = \sum_{j_2 \leq \nu_2, \dots, j_n \leq \nu_n} c_{j_2, \dots, j_n}(\xi_1) \delta^{(j_2)}(\xi_2) \otimes \dots \otimes \delta^{(j_n)}(\xi_n) \quad (1.46)$$

с неизвестными $c_{j_2, \dots, j_n}(\xi_1)$.

Подставляя $v(\xi)$ из (1.46) в (1.42) и используя линейную независимость системы функционалов $\{\delta^{(j_2)}(\xi_2) \otimes \dots \otimes \delta^{(j_n)}(\xi_n)\}$, получим систему для определения вектор-функционалов $c_{\nu_2, \dots, \nu_n}(\xi_1)$:

$$C(\xi_1, 0, \dots, 0) c_{\nu_2, \dots, \nu_n}(\xi_1) = a_{\nu_2, \dots, \nu_n}(\xi_1),$$

которая исследована выше. Остальные функционалы $c_{j_2, \dots, j_n}(\xi_1)$ находятся аналогичным образом. Следовательно, система (1.41) имеет решение для любых $\alpha(\xi)$.

Рассмотрим теперь однородную ($\beta(\xi) \equiv 0$) систему (1.42) при $n = 2$. Решение будем искать в виде

$$v(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j \leq \nu_2} c_j(\xi_1) \delta^{(j)}(\xi_2), \quad (1.47)$$

подставляя которое в (1.42), получим

$$C(\xi_1, 0)c_{\nu_2}(\xi_1) = 0, \quad C(\xi_1, 0)c_j(\xi_1) + B_j(c_{j+1}(\xi_1), \dots, c_{\nu_2}(\xi_1)) = 0, \quad j \leq \nu_2 - 1,$$

где $B_j(\dots)$ - вполне определенные линейные выражения. Очевидно, что эта система допускает ненулевое решение ($c_{\nu_2}(\xi_1) \neq 0$) и так как целое ν_2 можно взять произвольным, то заключаем, что при $n = 2$ однородная система (1.42) имеет бесконечно много линейно независимых решений. Если $n \geq 3$, то решение однородной системы (1.42) ищем в виде

$$v(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \sum_{j_2 \leq \nu_2} c_{j_2}(\xi_1) \delta^{(j_2)}(\xi_2) \otimes \delta(\xi_3) \otimes \dots \otimes \delta(\xi_n).$$

Окончательно, получаем следующий результат

Лемма 1.8. Пусть система (2) строго регулярна и условие (6) выполнено за исключением конечного числа точек. Тогда система (1.41) всегда разрешима. Однородная система (1.41) имеет конечное число линейно независимых решений при $n = 1$ и бесконечно много линейно независимых решений при $n \geq 2$.

Замечание 1.2. Альтернатива получения разрешимости системы (1.41) основывается на подготовительной теореме Мальгранжа. Обозначим $\Delta(\xi) = \det C(\xi)$. Имеем $\Delta(\xi) \in C^\infty(|\xi| < \varepsilon)$ и поскольку $\Delta(\xi_1, 0)$ - аналитична относительно ξ_1 можно найти натуральное j такое, что $\Delta(0) = \dots = \frac{\partial^{j-1} \Delta(0)}{\partial \xi_1^{j-1}} = 0$, однако $\frac{\partial^j \Delta(0)}{\partial \xi_1^j} \neq 0$. Согласно упомянутой теореме имеем представление [1]

$$\Delta(\xi_1, \xi') = a(\xi_1, \xi')(\xi_1^j + a_{j-1}(\xi')\xi_1^{j-1} + \dots + a_0(\xi')), \quad (1.48)$$

где $a_j \in C^\infty(|\xi'| < \varepsilon)$, $a(\xi_1, \xi') \in C^\infty(|\xi| < \varepsilon)$ и $a(0, 0) \neq 0$, $a_j(0) = 0$. Представим функционал $\beta(\xi)$ в виде

$$\beta(\xi) = \sum a_{j_1, \dots, j_n}(\xi_1) \delta^{(j_1)}(\xi_1) \otimes \dots \otimes \delta^{(j_n)}(\xi_n).$$

Пусть $C_1(\xi_1, \xi')$ - матрица, транспонированная к матрице, составленной из алгебраических дополнений элементов матрицы $C(\xi)$, а $k_0 \gg 1$ - целое. Тогда функционал

$$\begin{aligned} \langle v(\xi_1, \xi'), \varphi(\xi_1, \xi') \rangle = & \sum_{j_1 \leq \nu_1, \dots, j_n \leq \nu_n} a_{j_1, \dots, j_n} \langle \delta^{(j_1 + k_0)}(\xi_1) \\ & \langle \delta^{(j_2)}(\xi_2) \otimes \dots \otimes \delta^{(j_n)}(\xi_n), \frac{\xi_1^{k_0} C_1(\xi_1, \xi') \varphi(\xi_1, \xi')}{a(\xi_1, \xi')(\xi_1^j + a_{j-1}(\xi') \xi_1^{j-1} + \dots + a_0(\xi'))} \rangle, \\ & \forall \varphi \in C_0^\infty(|\xi| < \varepsilon) \end{aligned}$$

является решением системы (1.41).

Предположим теперь, что система (2) регулярна ($\rho(0) > r$), и рассмотрим следующую алгебраическую систему:

$$P_0^+(\xi)v(\xi) = 0, \quad B(\xi)v(\xi) = \alpha(\xi), \quad |\xi| < \delta, \quad (1.49)$$

где $P_0^+(\xi)$ определена формулой (1.39), а $\alpha(\xi)$ - функционал, сосредоточенный в точке $\xi = 0$. Пусть $n = 1$, тогда система (1.49) эквивалентна системе

$$C_0(\xi)v(\xi) = \beta(\xi), \quad (1.50)$$

где $C_0(\xi) \in C^\infty(|\xi| < \varepsilon)$ - матрица размерности $(m - \rho(0) + r) \times m$ такая, что $\text{rank} C_0(\xi) = m - \rho(0) + r$ при $\xi \neq 0$, а $\beta(\xi) = (0, \alpha(\xi))$. Так как элементы матрицы $C_0(\xi)$ аналитические функции от ξ , то существует постоянная матрица C_1 размерности $(\rho(0) - r) \times m$ такая, что

$$\text{rank} \begin{pmatrix} C_0(\xi) \\ C_1 \end{pmatrix} = m, \quad 0 < |\xi| < \delta.$$

Система

$$C_1 v(\xi) = 0, \quad C_0(\xi)v(\xi) = \beta(\xi)$$

имеет решение (см. (1.42)). Следовательно, система (1.50) также разрешима.

Как и выше, случай $n \geq 2$ сводится к случаю $n = 1$. Таким образом, справедлива

Лемма 1.9. Пусть система (2) регулярна и имеет место условие (б) за исключением конечного числа точек. Тогда система (1.49) имеет решение и однородная система (1.49) имеет бесконечно много линейно независимых решений.

В предположении, что условие (6) нарушено в единственной точке $\xi = 0$ рассмотрим следующую вспомогательную задачу :

Задача В. Найти решение $u(x, t) \in M$ системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(i \frac{\partial}{\partial x})u + \sum_{|j| \leq \nu_0} a_j(t)x^j, \quad j = (j_1, \dots, j_n), \quad x^j = x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}, \quad (1.51)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$B(i \frac{\partial}{\partial x})u(x, 0) = \sum_{|j| \leq \nu_0} b_j x^j, \quad (1.52)$$

где $a_j(t) \in M$, $b_j \in R^r$.

Заметим сначала, что система (1.51) имеет решение

$$u_0(x, t) = \sum_{|j| \leq \nu_0} c_j(t)x^j.$$

Действительно, подставляя $u_0(x, t)$ в (1.51) и воспользовавшись линейной независимостью полиномов $\{x^j, |j| \leq \nu_0\}$, получим для $c_j(t)$ систему в виде (1.3) для $c_j(t)$, которая разрешима. Это означает, что правую часть системы (1.51) считаем равной нулю.

Пусть вначале система (2) строго регулярна. Пусть также $v(\xi)$ - решение системы (1.41) с $\alpha(\xi) = F[\sum_{|j| \leq \nu_0} b_j x^j](\xi)$. Тогда можно проверить, что прообраз Фурье функционала $u(\xi, t) = V^-(\xi, t)v(\xi)$, где $V^-(\xi, t)$ определен формулой (1.14), есть искомое решение задачи В.

Теперь предположим, что система (2) регулярна, и пусть $v(\xi)$ - решение системы (1.49) с $\alpha(\xi) = F[\sum_{|j| \leq \nu_0} b_j x^j](\xi)$, а $P_o^-(\xi) = (P_m - P_o^+(\xi)) \in C^\infty(|\xi| < \delta)$.

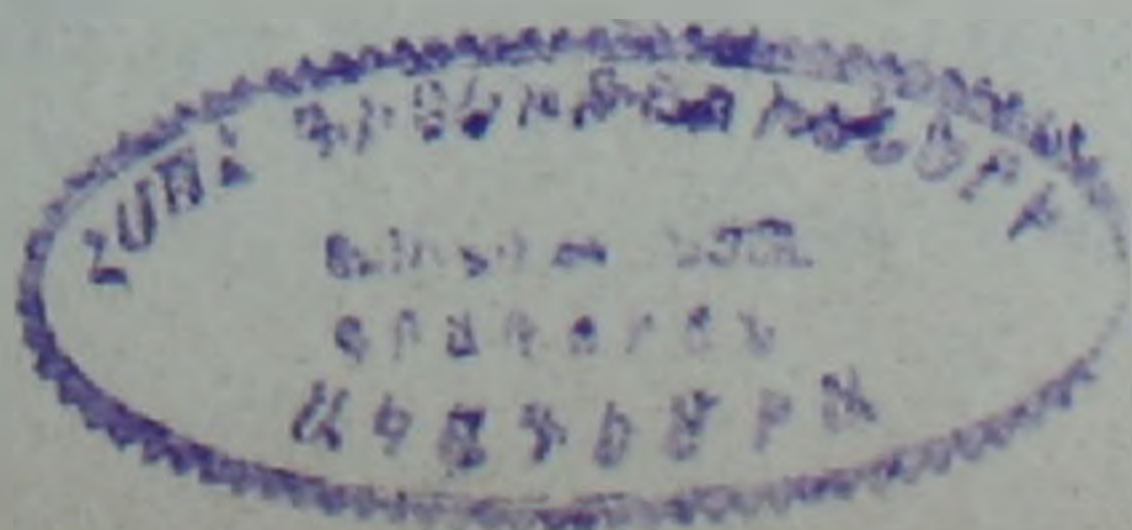
Прообраз Фурье функционала

$$u(\xi, t) = e^{A(\xi)t} P_o^-(\xi) v(\xi) = e^{P_o^-(0)A(0)t} \sum_{j \leq \nu_0} t^j \alpha_j(\xi), \quad t \in \Pi_\alpha,$$

где $\alpha_j(\xi)$ - вполне определенные функционалы, сосредоточенные в точке $\xi = 0$, будет решением задачи В. Так как все собственные значения матрицы $P_o^-(0)A(0)$ принадлежат области Π_α^* , то прообраз $u(\xi, t)$ принадлежит классу M .

Таким образом, доказана

Лемма 1.10. *Задача В всегда разрешима.*



§2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ А

Вначале предположим, что система (2) строго регулярна и что условие (6) имеет место для любых $\xi \in R^n$. Покажем, что прообраз Фурье $u(x, t)$ функционала

$$u(\xi, t) = \sum_{j=1}^r V^-(\xi, t) v_j(\xi) f_j(\xi), \quad (2.1)$$

где $v_j(\xi)$ обозначает решение системы (1.31), является решением задачи А.

Выберем $k_0(l) \gg 1$ таким образом, чтобы для любых натуральных l

$$\left| \frac{\partial^q}{\partial t^q} \left(\frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \frac{V^-(\xi, t) v_j(\xi)}{(1 + |\xi|^2)^{k_0}} \right) \right| \leq c \frac{(1 + |t|)^s}{(1 + |\xi|)^{n+1}} \quad \forall |k| \leq l; \quad q = 0, 1.$$

Очевидно, что обратное преобразование Фурье

$$K_j(x, t) = F_\xi^{-1} \left[\frac{V^-(\xi, t) v_j(\xi)}{(1 + |\xi|^2)^{k_0}} \right] (x, t)$$

удовлетворяет оценке

$$\left| \frac{\partial^q}{\partial t^q} K_j(x, t) \right| \leq c \frac{(1 + |t|)^s}{(1 + |x|)^l}, \quad q = 0, 1.$$

Применяя неравенство Питре $(1 + |x - \tau|)^{-|\eta|} \leq (1 + |x|)^{\eta} (1 + |\tau|)^{-\eta}$ легко показать, что

$$M \ni u(x, t) = \sum_{j=1}^r K_j(x, t) * (1 - \Delta_x)^{k_0} f_j(x), \quad \Delta_x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Заметим также, что если $f_j \in M_\gamma$, то $u \in M_\gamma$.

Случаи, когда система (2) строго регулярна и условие (6) нарушено или система (2) регулярна, будут рассмотрены одновременно. Отметим вновь, что условие (6) не выполняется только в точке $\xi = 0$. Заметим также, что уравнение $\Delta_x u(x, t) = f(x, t)$ разрешимо в M . При $n = 1$ это очевидно. Заменяя f на $\frac{\partial^{\nu_1} f(x, t)}{\partial x_1^{\nu_1}}$, $\nu_1 \gg 1$, случай $n \geq 2$ сводим к случаю $n = 1$ и так далее.

Для заданного $f(x)$ заменим граничное условие (4) на следующее

$$B(i \frac{\partial}{\partial x}) u(x, 0) = \Delta_x^\nu f(x), \quad (2.2)$$

где $\nu \gg 1$ - целое.

Заметим, что если доказать разрешимость задачи (2), (2.2), то разрешимость задачи (2), (4) сведется к рассмотрению задачи В (см. (1.51), (1.52)). Действительно, пусть $u_0(x, t)$ - решение задачи (2), (2.2) и $u_1(x, t) \in M$ такое, что $\Delta_x^\nu u_1 = u_0$. Подставляя $u_0(x, t)$ в (2), (2.2), получим

$$\Delta_x^\nu \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - A(i \frac{\partial}{\partial x}) u_1 \right) = 0, \quad \Delta_x^\nu B(i \frac{\partial}{\partial x}) u_1(x, 0) = \Delta_x^\nu f(x)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - A(i \frac{\partial}{\partial x}) u_1 &= \sum_{|j| \leq 2\nu} a_j(t) x^j, \\ B(i \frac{\partial}{\partial x}) u_1(x, 0) &= f(x) + \sum_{|j| \leq 2\nu} b_j x^j, \end{aligned}$$

где $a_j(t) \in M$ и $b_j \in R^r$ вполне определены.

Теперь, если $u(x, t)$ - решение задачи (2), (4), то замена $w = u_1 - u$ приведет к задаче В для w . Таким образом, мы ограничимся исследованием задачи (2), (2.2).

Формула (2.1) в этом случае примет вид

$$u(\xi, t) = \sum_{j=1}^r V^-(\xi, t) v_j(\xi) |\xi|^{2\nu} f_j(\xi), \quad \xi \neq 0,$$

где $V^-(\xi, t)$, $v_j(\xi)$ удовлетворяют неравенствам (1.16), (1.38), соответственно.

Выбором ν можем добиться любой, наперед заданной гладкости в R^n вектор-функций $V^-(\xi, t) v_j(\xi) |\xi|^{2\nu}$, а затем как и выше показать, что прообраз Фурье $u(\xi, t)$ принадлежит классу M и является решением задачи (2), (2.2). Таким образом, разрешимость задачи А при выполнении условия (6) доказана для любого $\xi \neq 0$.

Рассмотрим теперь однородную ($f \equiv 0$) задачу А.

Пусть система (2) строго регулярна и условие (6) выполняется за исключением конечного числа точек. Тогда в силу Леммы 1.8 однородная задача А имеет только конечное число линейно независимых решений при $n = 1$ и бесконечно много линейно-независимых решений при $n \geq 2$.

В случае же регулярной системы (2) ($\rho(0) > r$) однородная задача А имеет бесконечно много линейно-независимых решений при любых $n \geq 1$ (следует из Леммы 1.9).

Таким образом, Теорема 1, сформулированная во введении, доказана.

В заключение, рассмотрим несколько простых примеров.

1. В $R \times R^+$ рассмотрим оператор Гельмгольца (эллиптический)

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad k \in R \setminus \{0\} \quad (2.3)$$

с характеристическими корнями $\lambda_1(\xi) = \sqrt{\xi^2 - k^2}$, $\lambda_2(\xi) = -\sqrt{\xi^2 - k^2}$. Это уравнение не является α -регулярным для любых $\alpha \in R$ (определение см. [6]).

Однако легко видеть, что в $R \times \Pi_\alpha$, $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, уравнение (2.3) регулярно с порядком регулярности $r = 1$. Исключительными точками являются $\xi = \pm k$. В соответствии с полученными результатами, для уравнения (2.3) ставится задача Дирихле

$$u(x, 0) = f(x).$$

2. Для уравнения Клейна-Гордона

$$(\Diamond + m_o^2)u = 0, \quad \Diamond = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta, \quad m_o \neq 0, \quad (2.4)$$

имеем $\lambda_{1,2}(\xi) = \pm i\omega(\xi)$, $\omega(\xi) = \sqrt{a^2|\xi|^2 + m_o^2}$.

Уравнение (2.4) - α регулярно для любых $\alpha \geq 0$ с $r = 2$ и задача Коши корректна.

Рассмотрим уравнение (2.4) в $R^n \times \Pi_\alpha$, $0 < \alpha < \pi$. Ясно, что уравнение (2.4) теперь строго регулярно с порядком регулярности $r = 1$ и задача Дирихле (2.3) корректна.

3. Наконец, рассмотрим систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (x, t) \in R \times \Pi_\alpha, \quad 0 < \alpha < \pi, \quad (2.5)$$

где A - постоянная квадратная матрица порядка $2n$.

Предположим, что собственные значения A действительны. Пусть n из них неположительны. Система (2.5) является регулярной с порядком регулярности $r = n$ ($\xi = 0$ одна изолированная точка). Соответствующая матрица $P^+(\xi)$ имеет вид

$$P^+(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma+(\xi)} (\lambda E_{2n} - i\xi A)^{-1} d\lambda,$$

и, очевидно, кусочно-постоянна

$$P^+(\xi) = \begin{cases} P_1, & \text{при } \xi > 0 \\ P_2, & \text{при } \xi < 0, \end{cases}$$

где P_j - постоянные матрицы и $\text{rank } P_j = n$.

Пусть C_j - постоянные матрицы размерности $n \times 2n$ такие, что

$$\text{rank} \begin{pmatrix} P_j \\ C_j \end{pmatrix} = 2n.$$

Среди матриц $B_\tau = \tau C_1 + (1 - \tau)C_2$, $0 \leq \tau \leq 1$, существует B_{τ_0} , для которой

$$\text{rank} \begin{pmatrix} P_j \\ B_{\tau_0} \end{pmatrix} = 2n, \quad j = 1, 2.$$

Для системы (2.5) можно поставить граничную задачу

$$B_{\tau_0} u(x, 0) = f(x). \quad (2.6)$$

Эта задача корректна, так как

$$\text{rank} \begin{pmatrix} P^+(\xi) \\ B_{\tau_0} \end{pmatrix} = 2n, \quad \text{для } \xi \neq 0,$$

т.е. условие (6) нарушается лишь в точке $\xi = 0$.

ABSTRACT. Let M be the class of vector-functions $u(x, t) \in C^\infty(R^n \times \Pi_\alpha)$ analytic in $t \in \Pi_\alpha = \{t | 0 < \arg t < \alpha < \pi\}$ and having polynomial growth in (x, t) . Let $A(\xi)$, $\xi \in R^n$ be a square matrix of order m with polynomial elements. For the system

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(i \frac{\partial}{\partial x}) u, \quad u \in M, \quad (x, t) \in R^n \times \Pi_\alpha \quad (1)$$

we define the strictly regular and regular cases. Let r denote the order of regularity of (1) and $B(\xi)$ let be a polynomial matrix of dimension $r \times m$. We impose the boundary condition :

$$B(i \frac{\partial}{\partial x}) u(x, 0) = f(x), \quad f(x) \in M, \quad (2)$$

For strictly regular case a condition of correctness of problem (1), (2) is obtained. For regular case an analogous condition guarantees the existence of solution.

The homogeneous ($f \equiv 0$) problem is studied too.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Хермандер, Анализ Линейных Дифференциальных Операторов с Частными Производными, том 2, М., Мир, 1986.
2. А. Л. Павлов, "Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве", Мат. сборник, том 103 (145), №3 (7), стр. 367-391, 1977.
3. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, Устойчивость Решения Дифференциальных Уравнений в Банаховом Пространстве, М., Наука, 1970.
4. Н. Е. Товмасян, "Красовые задачи для нерегулярных систем дифференциальных уравнений на полуплоскости в классе обобщенных функций и функций полиномиального роста, Мат. сборник, том 131 (173), №2 (10), стр. 185-212, 1986.
5. З. Пресдорф, Некоторые Классы Сингулярных Уравнений, М., Мир, 1979.
6. А. И. Комеч, "Линейные дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами", Современные проблемы математики. Фундаментальные исследования, том 31, Москва, 1988.

27 Мая 1992

Армянский государственный
инженерный университет