ПАРАМЕТРИКС СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО
УРАВНЕНИЯ С НЕОДНОРОДНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Р. Г. Айрапетян, Г. Р. Александрян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, No 1, 1993

Настоящая работа посвящена построению параметрикса смешанной задачи для волнового уравнения в виде интегрального оператора Фурье. Описание канонического отношения основывается на известном законе геометрической оптики об отражении.

В работах [1 - 2] такое построение было осуществлено для смешанной задачи с однородным граничным условием. Естественно, неоднородное граничное условие более усложняет структуру канонического отношения, что, в свою очередь, усложняет построение главного символа.

1. Постановка задачи. Пусть X - область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей ∂X . Рассмотрим следующую смешанную задачу

$$\diamond u = u_{tt} - \sum_{j=1}^n u_{x_j x_j} = 0 \quad \text{в } X \times \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

$$u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = 0 \quad \text{на } X, \quad (2)$$

$$u(t, x) = g(t, x) \quad \text{на } \mathbb{R}_+ \times \partial X. \quad (3)$$

Введем следующие пространства распределений :

$$\mathcal{D}'_\delta(\mathbb{R}_+ \times \partial X) = \{g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \partial X) : \text{singsupp } g \subset [\delta, +\infty) \times \partial X\},$$

$$\mathcal{D}'_a(\mathbb{R}_+ \times X) = \{g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times X) : \exists \tilde{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}) \text{ такое, что}$$

$$\tilde{u}|_{\mathbb{R}_+ \times \partial X} = u \text{ и } WF(\tilde{u}) \cap [N_{0 \times \mathbb{R}^n} \mathbb{R}^{n+1} \cup N_{\mathbb{R}_+ \times \partial X} \mathbb{R}^{n+1}] = \emptyset\}.$$

Следовательно, определены следы распределений $\mathcal{D}'_a(\mathbb{R}_+ \times X)$ на границу $\mathbb{R}_+ \times \partial X$ и на начальную гиперплоскость $t = 0$.

Определение. Интегральный оператор Фурье E_δ называется параметриком смешанной задачи (1) – (3), если

$$E_\delta: \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \partial X) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times X)$$

и $E_\delta g = u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+ \times X})$, где u – точное решение задачи.

Предположим, что

Условие 1. Бихарактеристика, исходящая из T^*X пересекает границу области $\mathbb{R}_+ \times \partial X$ трансверсально, причем область X выпукла относительно характеристических лучей.

2. Каноническое отношение. Бихарактеристики, соответствующие корням $\pm|\xi|$ характеристического уравнения $\tau^2 - |\xi|^2 = 0$ и исходящие из точек $(y, \tau) \in T^*X$ задаются равенствами:

$$\tau = \pm|\xi|, \quad \xi = \eta, \quad x = -\frac{\xi}{\tau} \cdot t + y, \quad t \in [0, t_\pm^1(y, \eta)], \quad (4)$$

где $t_\pm^1(y, \eta)$ есть момент времени, в который проекция $x(t, y, \eta)$ бихарактеристики на базу впервые пересекает границу ∂X .

Мы используем следующую инволюцию ([2]) на $T^*(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)|_{\mathbb{R}_+ \times \partial X}$:

$$(t, \tau, x, \xi) \longmapsto (t, \tau, x, \xi),$$

где $|\xi| = |\xi|$, $\xi \neq \xi$ и $\xi - \xi = 0$ на $T^*\partial X$. Эта инволюция является гладким отображением ([2]). Отраженные бихарактеристики определим соотношениями

$$\begin{aligned} \tau &= \pm|\xi|, \quad x = -\frac{\xi}{\tau} (t - t_\pm^1(y, \eta)) + x(t_\pm^1(y, \eta), y, \eta), \\ \xi &= \eta, \quad t \in [t_\pm^1(y, \eta), t_\pm^2(y, \eta)], \end{aligned} \quad (5)$$

где $t_\pm^2(y, \eta)$ – момент времени, в который проекция отраженной бихарактеристики впервые пересекает границу ∂X . Продолжая эту процедуру, получаем последовательность точек $\{t_\pm^j(y, \eta)\}$ и ломаные бихарактеристики.

Начнем теперь с построения канонического отношения. Пусть $K^\pm(t, x, \xi)$ – число пересечений с границей проекций ломаной бихарактеристики, на которой лежит точка $(t, \pm|\xi|, x, \xi)$ до момента времени t . Предположим также выполненным

Условие 2. Для каждой точки $(t, \pm|\xi|, x, \xi) \in T^*(\mathbb{R}_+ \times X)$

$$K^\pm(t, x, \xi) < \infty.$$

Пусть $\Phi_t^\pm: T^*(X) \rightarrow T^*(\mathbb{R}_+ \times X)$ - отображение, переводящее точку $(y, \eta) \in T^*(X)$ в такую точку $(t, \pm|\xi|, x, \xi) \in T^*(\mathbb{R}_+ \times X)$, что точки $(0, \pm|\eta|, y, \eta)$ и $(t, \pm|\xi|, x, \xi)$ принадлежат некоторой ломаной бихарактеристике.

Пусть π - естественная проекция

$$\pi: T^*(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)|_{\mathbb{R}_+ \times \partial X} \rightarrow T^*(\mathbb{R}_+ \times \partial X).$$

Положим

$$C_{ij}^\pm = \{(t, \pm|\xi|, x, \xi, \tilde{t}, \pm|\xi|, \tilde{x}, \xi) \in \dot{T}^*(\mathbb{R}_+ \times X) \times \dot{T}^*(\mathbb{R}_+ \times \partial X) : \\ K^\pm(t, x, \xi) = \tilde{t} = t_\pm^j(y, \eta), (y, \eta) = (\Phi_t^\pm)^{-1}(t, \pm|\xi|, x, \xi), \\ (\tilde{t}, \pm|\xi|, \tilde{x}, \xi) = \pi\Phi_t^\pm(y, \eta)\}, C^\pm = \cup_{i \geq j \geq 1} C_{i,j}^\pm, C = C^+ \cup C^-.$$

Лемма 1. Отношение C есть замкнутое каноническое лагранжево подмногообразие в $\dot{T}^*(\mathbb{R}_+ \times X) \times \dot{T}^*(\mathbb{R}_+ \times \partial X)$ с канонической 2-формой $\sigma_{\mathbb{R}_+ \times X} - \sigma_{\mathbb{R}_+ \times \partial X}$ на пространстве произведения.

3. Построение оператора E_δ . Пусть ε достаточно малое положительное число

$$\mathbb{R}_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R} : t > -\varepsilon\}, \quad X_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, X) < \varepsilon\}.$$

Существует замкнутое каноническое лагранжево подмногообразие $\tilde{C}$ в $\dot{T}^*(\mathbb{R}_\varepsilon \times X_\varepsilon) \times \dot{T}^*(\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X)$ с канонической 2-формой $\sigma_{\mathbb{R}_\varepsilon \times X_\varepsilon} - \sigma_{\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X}$ на пространстве произведения такое, что

$$\tilde{C} = \cup_{i \geq j \geq 1} (\tilde{C}_{i,j}^+ \cup \tilde{C}_{i,j}^-),$$

$$\tilde{C}_{i,j}^\pm \cap (\dot{T}^*(\mathbb{R}_+ \times X) \times \dot{T}^*(\mathbb{R}_+ \times \partial X)) = C_{i,j}^\pm.$$

Пусть Γ и B - канонические отношения операторов ограничений на многообразия $O \times X_\varepsilon$ и $\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X$, соответственно. Обозначим через $\mathcal{F}_\Gamma$ и $\mathcal{F}_B$ соответствующие интегральные операторы Фурье.

Докажем следующую лемму.

Лемма 2. Пересечения канонических отношений $\tilde{C}$ с Γ и B являются собственными и трансверсальными.

Начнем с построения оператора $\tilde{\mathcal{F}}$ в виде асимптотического разложения

$$\tilde{\mathcal{F}} \sim \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{\mathcal{F}}_l$$

со следующими свойствами

$$\tilde{\mathcal{F}}_l \in I^{-\frac{1}{4}-l}(\mathbb{R}_\varepsilon \times X_\varepsilon, \mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X, \tilde{C}),$$

$$\diamond \sum_{j=0}^l \tilde{\mathcal{F}}_j \in I^{-\frac{1}{4}-l}(\mathbb{R}_\varepsilon \times X_\varepsilon, \mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X, \tilde{C}),$$

$$\mathcal{F}_B \circ \sum_{j=0}^l \mathcal{F}_j - \text{Id}_{(\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X)} \in I^{-1-l}(\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X, \mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X, B \circ \tilde{C}),$$

$$\mathcal{F}_\Gamma \sum_{j=0}^l \tilde{\mathcal{F}}_j \in I^{-1-l}(X_\varepsilon, \mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X, \Gamma \circ \tilde{C}),$$

$$\mathcal{F}_\Gamma \circ \mathcal{D}_l \circ \sum_{j=0}^l \mathcal{F}_j \in I^{-l}(X_\varepsilon, \mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X, \Gamma \circ \tilde{C}).$$

Обозначим через $\tilde{a}_l$ главный символ оператора $\tilde{\mathcal{F}}_l$. Поскольку существует стандартная полуплотность $|dt dx|^{1/2}$, имеющая естественное ограничение на $\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X$, то можно рассматривать $\tilde{a}_l$ как функцию. Обозначим $\tilde{a}_l^\pm = \tilde{a}_l|_{\tilde{C}_\pm}$. Символы $\tilde{a}_l$ будем искать удовлетворяющими следующим транспортным уравнениям

$$\frac{1}{i} H_{\tilde{p}} \tilde{a}_l = -\sigma \left(\diamond \sum_{j=0}^{l-1} \mathcal{F}_j \right) \quad \text{на } \tilde{C}, \quad (6)$$

где $\tilde{P}(t, \tau, x, \xi, \tilde{t}, \tilde{\tau}, \tilde{x}, \tilde{\xi}) = \tau^2 - |\xi|^2$ и $\sigma(J)$ - главный символ оператора J . Здесь $\tilde{a}_j^\pm$ - константа на $\tilde{C}_{i,j}^\pm$ для фиксированных $(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{\xi})$. Пусть

$$A_{i,j}^\pm = \{(t, \pm|\xi|, x, \xi, \tilde{t}, \pm|\xi|, \tilde{x}, \tilde{\xi}) \in T^*(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n) \Big|_{\mathbb{R}_+ \times \partial X} \times T^*(\mathbb{R}_+ \times \partial X) :$$

$$t = t_i^\pm(y, \tau), \quad \tilde{t} = t_j^\pm(y, \eta), \quad (y, \eta) \in T^*X, \quad (t, \pm|\xi|, x, \xi) = \Phi_{i-0}^\pm(y, \tau),$$

$$(\tilde{t}, \pm|\xi|, \tilde{x}, \tilde{\xi}) = \pi \Phi_{i+0}^\pm(y, \eta)\}.$$

Тогда

$$\tilde{a}_0^\pm|_{\tilde{C}_{i,j}} = a_0^\pm|_{A_{i,j}^\pm}.$$

Следовательно, достаточно определить $\bar{a}_0^\pm$ лишь на $A_{i,j}^\pm$. Положим

$$\bar{a}_0^\pm|_{A_{i,j}^\pm} = (-1)^{i-j}.$$

Согласно (6), значения $\bar{a}_l^\pm$, $l \geq 1$ на $C_{ij}^\pm$ определяются значениями на $A_{i,j}^\pm$.

Положим

$$\bar{a}_l^\pm|_{A_{i,i}^\pm} = \sigma \left(Id - \mathcal{F}_B \sum_{j=0}^{l-1} \mathcal{F}_j \right) \Big|_{A_{i,i}^\pm}.$$

Определим $\bar{a}_l^\pm$ ($l \geq 1$) на $A_{i,j}^\pm$ по индукции. Пусть $\bar{a}_l^\pm$ уже определены на $\cup_{j < k \leq i} A_{k,j}^\pm$. Отсюда следует, что $\bar{a}_l^\pm$ заданы и на $\cup_{j < k \leq i} \tilde{C}_{k,j}^\pm$.

Определим теперь $\bar{a}_l^\pm$ на $A_{i+1,j}^\pm$ следующим образом:

$$\bar{a}_l^\pm(i, \pm|\xi|, x, \tilde{t}, \pm|\xi|, \tilde{x}, \tilde{\xi}) = - \lim_{s \rightarrow t-0} \bar{a}_l^\pm(\Phi_s^\pm(y, \eta), \tilde{t}, \pm|\xi|, \tilde{x}, \tilde{\xi}), \quad (7)$$

где $(y, \eta) = (\Phi_t^\pm)^{-1}(t, \pm|\xi|, x, \xi)$. Правая часть в (7) задана, поскольку $(\Phi_s^\pm(y, \eta), \tilde{t}, \pm|\xi|, \tilde{x}, \tilde{\xi}) \in \tilde{C}_{i,j}^\pm$, при условии, что $|t - s|$ достаточно мало.

Обозначим $a_l = \bar{a}_l|_C$, и пусть $\mathcal{F}_l$ - интегральный оператор Фурье с каноническим отношением C и главным символом a_l . Пусть $\rho_\delta(t) \in C^\infty(0, \infty)$ такое, что $\rho_\delta(t) = 0$ при $t < \delta/4$ и $\rho_\delta(t) = 1$ при $t > \delta/2$. Определим E_δ в виде следующего асимптотического разложения

$$E_\delta \sim \rho_\delta(t) \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{F}_l.$$

4. Теорема *Предположим, что условия 1 и 2 выполнены. Интегральный оператор Фурье E_t , построенный выше, является параметриксом задачи (1 - 3).*

Приведем схему доказательства теоремы. Заметим, что для любой $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \partial X)$ ограничение $\tilde{\mathcal{F}}_l g$ на $\mathbb{R}_+ \times X$ совпадает с $\mathcal{F}_l g$ по модулю $C^\infty(\mathbb{R}_+ \times X)$. Из построения оператора E_δ следует, что

$$\diamond E_\delta g \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times X), \quad \diamond E_\delta g|_{t=0} \in C^\infty(X),$$

$$\mathcal{D}_t E_\delta g|_{t=0} \in C^\infty(X).$$

Покажем, что

$$E_\delta g|_{\mathbb{R}_+ \times \partial X} - g \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \partial X).$$

Для этого достаточно показать, что

$$\mathcal{F}_B \circ \sum_{l=0}^m \mathcal{F}_l - \text{Id} \in l^{-1-m} \left(\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X, \mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X, B \circ \tilde{C} \right). \quad (8)$$

Пусть

$$C = \tilde{C} \cap \left(T^*(\mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}^n) \right) \Big|_{\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X} \times T^*(\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X).$$

Рассмотрим отображение $\pi = (\pi_\varepsilon, \text{id}_\varepsilon)$:

$$\left(T^*(\mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}^n) \right) \Big|_{\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X} \times T^*(\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X) \longmapsto T^*(\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X) \times T^*(\mathbb{R}_\varepsilon \times \partial X),$$

где π_ε - естественная проекция, а id_ε - тождественное отображение. Заметим, что π - сюръективное отображение. Представим C в виде объединения двух непересекающихся множеств:

$$C = C^0 \cup C^1,$$

где

$$C^0 = \cup_{i \in N} (A_{i,i}^+ \cup A_{i,i}^-).$$

Для детального описания C^1 , рассмотрим следующие подмножества C^1 :

$$B_{i,j}^\pm = \left\{ (t, \pm|\xi|, x, \xi, \tilde{t}, \pm|\xi|, \tilde{x}, \tilde{\xi}) \in T^*(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n) \Big|_{\mathbb{R}_+ \times \partial X} \times T^*(\mathbb{R}_+ \times \partial X) : \right. \\ \left. t = t_i^\pm(y, \tau), \tilde{t} = t_j^\pm(y, \eta), (t, \pm|\xi|, x, \xi) = \Phi_{t=0}^\pm(y, \tau), \right. \\ \left. (\tilde{t}, \pm|\xi|, \tilde{x}, \tilde{\xi}) = \pi \Phi_{\tilde{t}=0}^\pm(y, \eta) \right\}.$$

Нетрудно показать, что

$$C^1 = \cup_{i,j} (A_{i,j}^+ \cup A_{i,j}^- \cup B_{i,j}^+ \cup B_{i,j}^-).$$

Имеет место представление

$$B \circ \tilde{C} = \pi C^0 \cup \pi C^1,$$

где $\pi|_{C^0}$ - биекция, а $\pi|_{C^1}$ - двулистное накрытие. Так как оператор $\mathcal{F}_B$ является оператором ограничения, для любых $l \in N$ и для произвольных $\alpha \in B \circ \tilde{C}$ имеем

$$\sigma \left(\mathcal{F}_B \circ \tilde{\mathcal{F}}_l \right) (\alpha) = \sum_{\beta \in \tilde{C}, \tilde{\pi}(\beta) = \alpha} \sigma(\mathcal{F}_l(\beta)).$$

Ясно, что если $\alpha \in \tilde{\pi}C^0$, то $\beta = \tilde{\pi}^{-1}(\alpha) \in \cup A_{i,j}^{\pm}$. Следовательно

$$\sigma(\mathcal{F}_B \circ \mathcal{F}_0)(\alpha) = \bar{a}_0(\beta) = 1,$$

$$\sigma(\mathcal{F}_B \circ \mathcal{F}_l)(\alpha) = \bar{a}_l(\beta) = \sigma \left(\text{Id} - \mathcal{F}_B \sum_{j=0}^{l-1} \mathcal{F}_j \right).$$

Если же $\alpha \in \pi C^1$, то $\tilde{\pi}^{-1}(\alpha) = \{\beta_1, \beta_2\}$, где $\beta_1 \in A_{i,j}^{\pm}$, $\beta_2 \in B_{i,j}^{\pm}$ для некоторых $i, j (i > j)$. Согласно (9), имеем

$$\bar{a}_l(\beta_1) = -\bar{a}_l(\beta_2).$$

Отсюда, для $\alpha \in \pi C^1$ имеем

$$\sigma(\mathcal{F}_B \circ \tilde{\mathcal{F}}_l)(\alpha) = 0$$

и (11) доказано.

Для завершения доказательства теоремы мы должны показать, что

$$E_\delta g - u \in C^\infty.$$

Для этого покажем сначала, что $\mathcal{F}g - E_\delta g \in C^\infty$. Действительно, при $l > \delta$ имеем

$$\mathcal{F}g - E_\delta g = (1 - \rho(t)) \mathcal{F}g = 0.$$

С другой стороны ясно, что

$$\mathcal{F}g \in C^\infty((0, \delta) \times X).$$

Поэтому $w = E_\delta g - u$ есть решение смешанной задачи с C^∞ данными, причем эти данные C^∞ -согласованы на $0 \times \partial X$.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Chazarain, "Construction de paramétrix du probleme mixte hyperbolique pour l'équation des ondes," C. R. Acad. Sci., vol. 276, no. 18, pp. 1213 - 1215, 1973.
2. J. Chazarain, "Paramétrix du probleme mixte pour l'équation des ondes a l'intérieur dun domaine convexe pour les bicharacteristiques," Asterisque, 34 - 35, pp. 165 - 181, 1976.
3. J. J. Duistermaat, Fourier Integral Operators, Courant Inst. of Math. Sciences, New York University, 1973.
4. Ф. Трев, Введение в Теорию Псевдодифференциальных Операторов и Интегральных Операторов Фурье, т. 1,2, Москва, Мир, 1984.

3 Июня 1992

Межвузовский научный центр по
прикладным проблемам математики,
Американский университет Армении (АУА)