СМЕШАННЫЕ ОБЪЕМЫ НЕВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Г. Ю. Паника

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика.
том 28, No 1, 1993

Два тела K и K' в $\mathbb{R}^n$ имеют *одинаковое поведение относительно смешанных объемов*, если для всех выпуклых тел $K_2, ..., K_n$ имеем

$$V(K, K_2, ..., K_n) = V(K', K_2, ..., K_n).$$

В настоящей работе даны необходимые и достаточные условия того, чтобы два тела с кусочно гладкой поверхностью имели одинаковое поведение.

Будем говорить, что два тела K и K', лежащие в $\mathbb{R}^n$ имеют *одинаковое поведение относительно смешанных объемов*, если для всех выпуклых тел $K_2, ..., K_n$ имеем

$$V(K, K_2, ..., K_n) = V(K', K_2, ..., K_n).$$

Легко доказать, что два выпуклых тела с одинаковым поведением равны с точностью до параллельного переноса. Однако, это утверждение неверно для невыпуклых тел. В настоящей работе даны необходимые и достаточные условия (Теоремы 4.4 и 7.2) того, чтобы два тела с кусочно-гладкой поверхностью имели одинаковое поведение. В Теореме 4.4 рассматриваются тела с многогранной поверхностью, а условия формулируются в терминах "сетей". Теорема 7.2 относится к гладким телам и имеет простую формулировку.

Пусть тело $K \subset \mathbb{R}^n$ ограничено кусочно-гладкой поверхностью. Определим функцию

$$\{H\}(\omega) = \sum_{\text{по сетям}} H^j(\omega)\,(-1)^{k^j(\omega)},$$

где $H^j(\omega)$ – расстояние от O до j-той гиперплоскости с нормалью ω, касательной к K в точке $u^j(\omega)$, $k^j(\omega)$ – число отрицательных радиусов кривизны в точке $u^j(\omega)$

Два кусочно-гладких тела имеют одинаковое поведение относительно смешанных объемов тогда и только тогда, когда их $\{H\}$ функции совпадают.

Предварительные сведения

$\mathbb{R}^n$ – n-мерное пространство с началом в O;

E_n^o – пространство ориентированных гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$, содержащих O;

F_n – пространство *флагов* в $\mathbb{R}^n$ (флаг f определяется как пара $f =$ (прямая L, содержащая O; гиперплоскость e, содержащая L));

Ω^{n-1} – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ с центром в O;

S_{n-1} – площадь Ω^{n-1}.

Мы будем использовать *стандартное сферическое представление*, в котором гиперплоскости отображаются в точки на Ω^{n-1} (соответствующие их нормалям), прямые – большие $(n-2)$-мерные сферы и т.д.

Тело K называется *кусочно-гладким*, если оно имеет границу с почти всюду определенными и ограниченными вторыми производными.

Будем говорить, что ориентированная гиперплоскость e с нормалью ω касательна к K в $u \in \partial K$, если e локально касается ∂K в точке u и $u + \varepsilon\omega$ не лежит в K для малых ε.

Для заданного такого K построим многозначную *опорную функцию* H_K, определенную на Ω^{n-1}. Ее j-тое значение $H_K^j(\omega)$ определяется как расстояние от O до j-той локальной касательной гиперплоскости с нормалью ω.

Напомним определение *смешанных объемов* для невыпуклых тел (см. [3]).

Пусть $K_1, K_2, \dots, K_n \subset \mathbb{R}^n$-некоторые тела. Для $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ функция

$$F(K_1, \dots, K_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \int \dots \int I_1(x_1 - x_2 - \dots - x_n) I_2(x_2) \dots I_n(x_n) d\chi(x_n) \dots d\chi(x_2) dx_1,$$

где $d\chi$ обозначает интегрирование по эйлеровым характеристикам, является однородным полиномом от $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Коэффициент при $\lambda_1 \dots \lambda_n$ называется смешанным объемом $V(K_1, \dots, K_n)$.

§1. СЕТИ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Пусть K – выпуклый многогранник. Рассмотрим его ребра ν_i, лежащие на прямой L_i со смежными гранями $e_{1i}, ..., e_{mi}$. Сферические образы всех опорных гиперплоскостей, содержащих ν_i, формируют $(n-2)$-мерный сферический многогранник ω_{1i}. Этот многогранник лежит на большой сфере $\Omega^{n-2} \subset \Omega^{n+1}$, которая является сферическим образом прямой L_i. Вершины этого многогранника – сферические образы $e_{1i}, ..., e_{mi}$.

Образ всех ребер формирует сеть, т. е. производит разложение Ω^{n-1} в сферический многогранник. Вершины такого разложения являются образами всех гиперплоскостей граней K.

Определение 1.1. Предположим, что в этом разложении каждому $(n-2)$-мерному многограннику задан "вес", равный длине ν_i. Тогда имеем *сеть* для многогранника K.

Сеть каждого многогранника удовлетворяет свойствам A) и B) :

A) Каждый сферический многогранник в этом разложении является геодезически вып_клым

B) Свойство постоянства : пусть κ, κ' – два $(n-1)$-мерных многогранника этой сети. Пусть P – путь из $A \in \kappa$ в $B \in \kappa'$ (см Рис. 1.1). Пусть этот путь пересекает $(n-2)$-мерную грань сети, соответствующей ребрам $L_1, ..., L_r$. Тогда для каждого вектора ξ сумма $\sum_P |L_i| \cos(L_i, \xi)$ не зависит от всего пути P, а то[illegible] точек A и B.

Теорема 1.1. *Пусть имеется сеть с положительными весами на Ω^{n-1}, удовлетворяющим условиям A) и B). Тогда существует единственный (с точностью до параллельного переноса) выпуклый многогранник K в $\mathbb{R}^n$, обладающий такой сетью.*

§2. СЕТИ ДЛЯ НЕВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – многогранник, который необязательно выпуклый. Рассмотрим многозначную функцию s с ветвями s_i, определенными на E_n^o по следующему правилу :

$$s_i(e) = l(e)|\nu_i|[1 - \chi(e \cap K \cap U_{\{\nu_i\}})],$$

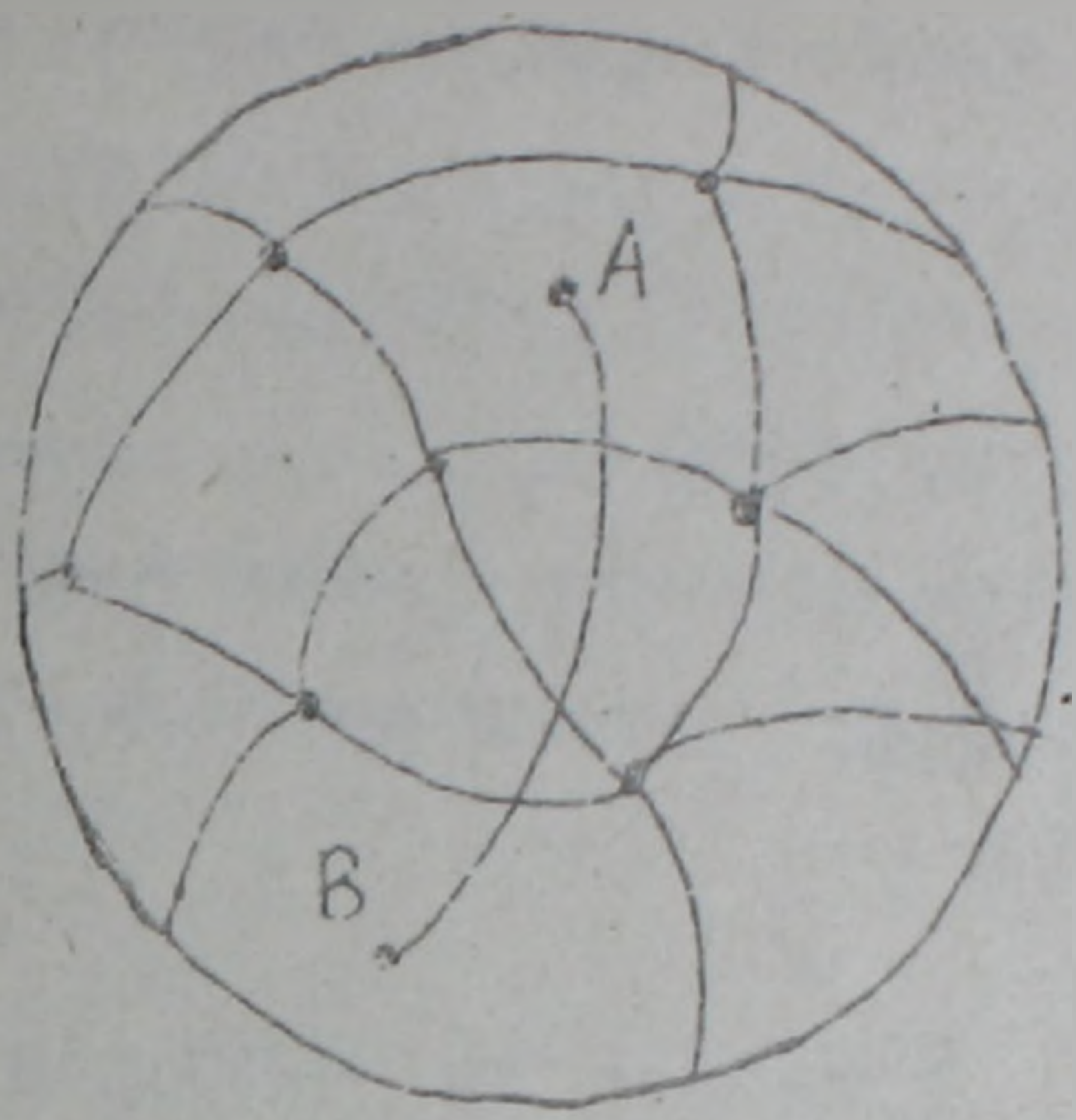

Рис. 1.1.

где

$$
I(e) = \begin{cases} 1, & \text{если, после определенного параллельного переноса,} \\ & e \text{ содержит ребро } \nu_i \text{ многогранника } K, \\ 0, & \text{в противном случае (т. е. почти всюду),} \end{cases}
$$

$|\nu_i|$ – длина ребра, χ – эйлерова характеристика, $U_{[\nu_i]}$ – полусфера с маленьким радиусом с центром во внутренней точке ребра ν_i и лежащая в гиперплоскости $\nu_i^{\perp}$. Полюс $U_{[\nu_i]}$ – конец нормали e.

Пример. Если K – выпуклый, тогда

$$
s(e) = \begin{cases} |\nu_i|, & \text{если, после параллельного переноса, } e \text{ - опорная плоскость} \\ & \text{многогранника } K \text{ и содержит } \nu_i \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}
$$

Определим

$$\{s\}(e) = \sum s_i(e)$$

Носитель $\{s\}$ является объединением сферических $(n-2)$ многогранников и формирует сеть $\sum_K$ на Ω^{n-1}. Его вес (возможно отрицательный) определяется как значение $\{s\}$. Верны следующие простые теоремы.

Теорема 2.1. *Сеть $\sum_K$ для невыпуклого многогранника K удовлетворяет свойству постоянства B (см. §1).*

Теорема 2.2. *Если вес $\sum_K$ (т. е. значение $\{s\}$) невыпуклого многогранника – неотрицательный, то $\{\sum\}$ удовлетворяет свойству A (см. §1), т. е. сферические многогранники соответствующем разложении выпуклы.*

Определение 2.1. Пусть свертка $\{s\}$ многогранника K неотрицательна. Тогда мы говорим, что поверхность K *квазивыпукла*. Согласно Теореме 1.1 существует выпуклый многогранник $\mathrm{Conv}(K)$, с сетью $\sum_K$. Этот многогранник называется выпуклой версией многогранника K.

Имеется простое условие существования выпуклой версии многогранника.

Теорема 2.3 *Полиэдр K - квазивыпуклый тогда и только тогда, если для каждого флага $f(L, e)$*

$$\sum |\nu_i| l(L)[1 - \chi(e \cap K \cap U_{[L]})] \geq 0,$$

где суммирование ведется по ребрам K, параллельным L.

§3. ПРИМЕРЫ КОМПЛЕКСНЫХ ВЕРСИЙ

Пример 3.1. Пусть $K = K_1 \cup K_2$, где K_1 и K_2 непересекающиеся выпуклые тела. Тогда K имеет выпуклую версию $\mathrm{Conv}(K) = K_1 \oplus K_2$.

Пример 3.2. Пусть $K_1 \subset K_2$ - выпуклые многогранники, $\partial K_1 \cap \partial K_2 = \emptyset$. Если n - четное , то $\mathrm{Conv}(K_2 \setminus K_1) = K_1 \oplus K_2$; если n - нечетное, то $\mathrm{Conv}(K_2 \setminus K_1) = = K_2 \ominus K_1$ (условное существование разности Минковского).

Пример 3.3. Каждый многоугольник имеет выпуклую версию, и множество его ребер равно множеству ребер его выпуклой версии.

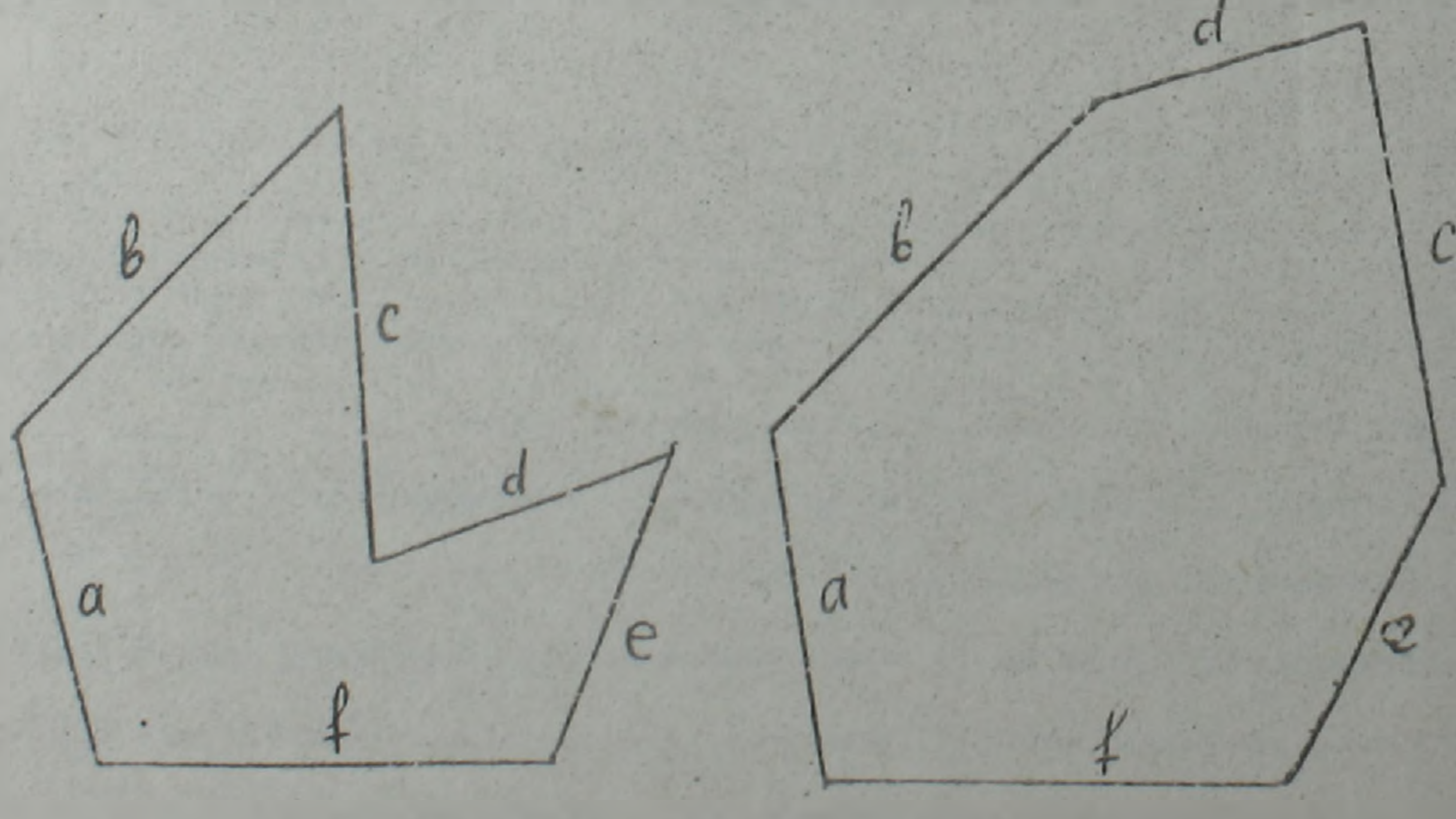

Рис. 3.1

§4. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПОЛИЭДРАХ

Следующее построение будет важным. Предположим, что K и Π – многогранники из $\mathbb{R}^n$, Π – выпуклый и содержит O. Пусть ν – ребро K; $Pr\,\Pi = Pr_\nu\Pi$ - проекция Π на гиперплоскость, ортогональную к ν. Определим функцию $T = T_W(X)$ на $Pr_\nu\Pi$ следующим образом : пусть прямая (O, X) пересекает границу $Pr\,\Pi$ в точке с нормалью $v(X)$. Пусть $e(X)$ – гиперплоскость, содержащая ребро ν, с нормалью $v(X)$.Тогда множество

$$T(X) = 1 - \chi(e(X) \cap K \cap U_{[\nu]}),$$

где χ – эйлерова характеристика, $U_{[\nu]}$ – сфера с малым радиусом вокруг некоторой внутренней точки ребра ν.

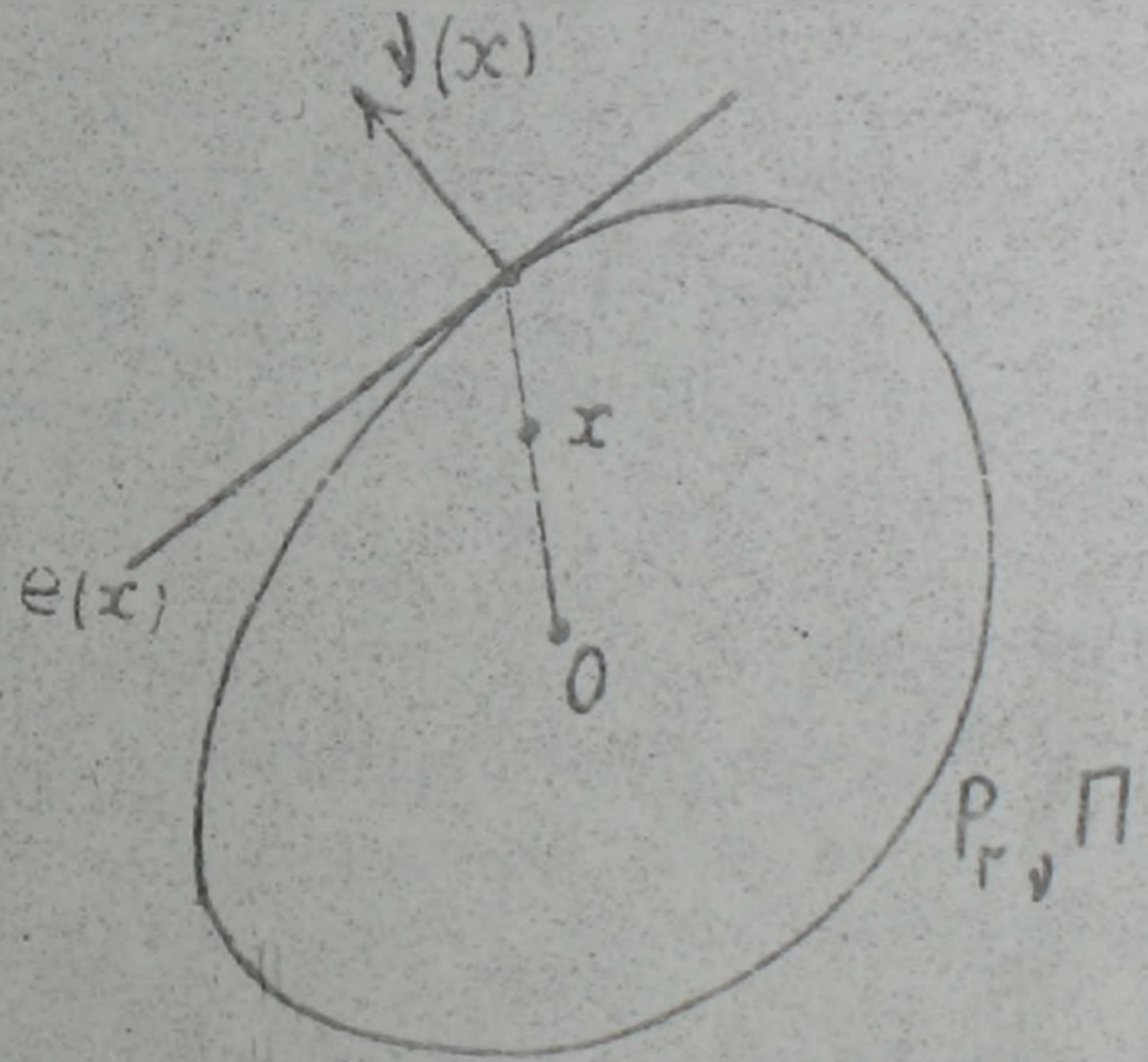

Рис. 4.1.

Теорема 4.1. *Для выпуклого многогранника K и положительного λ имеем*

$$V(\lambda K + \Pi) = V(\Pi) + \sum_{\nu_i - \text{ ребро } K} |\nu_i| \int_{Pr_{\nu_i}\Pi} T(X)\,dX + o(\lambda),$$

при $\lambda \to 0$.

Теорема 4.2. *Для произвольного многогранника K и любого положительного λ имеем*

$$\iint I_{\lambda K}(x-y) I_\Pi(y)\,d\chi(y)\,dx = V(\Pi) + \lambda \sum_{\nu_i - \text{ ребро } K} |\nu_i| \int_{Pr_{\nu_i}\Pi} T(X)\,dX + o(\lambda),$$

при $\lambda \to 0$. *Здесь* $d\chi(y)$ *означает интегрирование по эйлеровым характеристикам,* I *– характеристическая функция :*

$$I_{\lambda K}(X) = \begin{cases} 1, & \text{если } X \in \lambda K \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 4.3. *Пусть* $K, K_2, \ldots, K_n$ *– многогранники из* $\mathbb{R}^n$. *Тогда*

$$V(K, K_2, \ldots, K_n) = V(Conv(K), K_2, \ldots, K_n).$$

Теорема 4.4. *Пусть* $K, K' \subset \mathbb{R}^n$ *– многогранники с* $\sum_K = \sum_{K'}$. *Тогда для любых* $K_2, \ldots, K_n$

$$V(K, K_2, \ldots, K_n) = V(K', K_2, \ldots, K_n).$$

§5. СИЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ НЕВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Введем топологию сильной сходимости на множестве тел с кусочно гладкой границей, которая важна, так как смешанный объем (как функция от n тел) непрерывен относительно этой топологии.

Определение 5.1. Последовательность тел K_m с кусочно-гладкими границами *сильно сходится* к телу K, если для каждого m существует взаимно-однозначное непрерывное отображение $f_m : \partial K \to \partial K_m$ и подмножество B в ∂K с нулевой лебеговой мерой такой, что

1. $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{\partial K \setminus B} |f_m(x), x| = 0;$
2. $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{\partial K \setminus B} |\omega(f_m(x)), \omega(x)| = 0,$

где $\omega(f_m(x))$ – нормаль к поверхности K_m в точке $f_m(x)$ (должна существовать для почти всех m). $\omega(x)$ – нормаль в точке x поверхности K.

Теорема 5.1. *Пусть для* $j = 1, 2, \ldots, n$, $\lim_{m\to\infty} K^j_m = K^j$, *где* K^j_m *и* K^j *кусочно-гладкие тела в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда*

$$\lim V(K^1_m, \ldots, K^n_m) = V(K^1, \ldots, K^n).$$

§6. ЯДЕРНЫЕ МЕРЫ

Приведем вспомогательное построение. Пусть Π - выпуклое тело, содержащее O; f - флаг $f = f(\omega, L)$; $X(\omega) = X(\omega, L)$ - точка на границе проекции Π на $L^{\perp}$ с нормалью ω; $x(\omega) = |O, X(\omega)|$; $\phi(\omega) = \phi(\omega, L)$ - единичный вектор, параллельный $O\,X(\omega)$; $\Delta(\omega, L) = \dfrac{d\phi}{n\,d\omega}$.

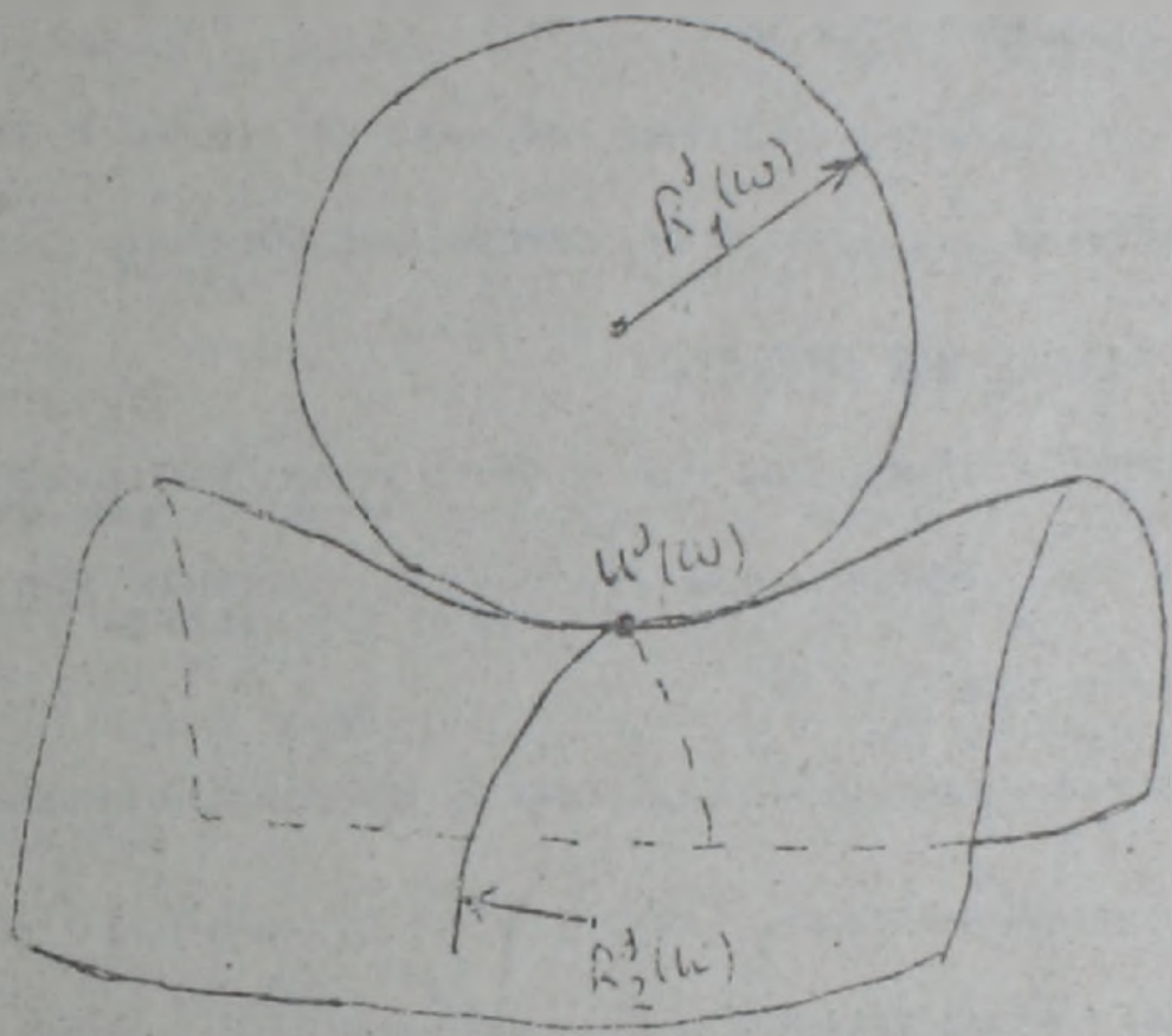

Рис. 6.1.

Определение 6.1. Мера μ, определенная на множестве флагов F_n, является ядерной мерой для тела $K \subset \mathbb{R}^n$, если для любого выпуклого Π

$$V(K, \underbrace{\Pi, ..., \Pi}) = \int_{F_n} x(\omega, L)\,\Delta(\omega, L)\,d\mu(f(\omega, L)).$$

Теорема 6.1. *Пусть тела K и K' имеют общую ядерную меру. Тогда для любых* $\Pi_2, ..., \Pi_n$

$$V(K, \Pi_2, ..., \Pi_n) = V(K', \Pi_2, ..., \Pi_n).$$

Оказывается, мы имеем уже вычисленные ядерные меры для многогранников.

Теорема 6.2. *Пусть K - многогранник в $\mathbb{R}^n$, $\{s\}$ - функция, введенная в §2. Рассмотрим меру μ_K такую, что для любой непрерывной функции, определенной на F_n*

$$\int_{F_n} A(f)\,d\mu_K(f) = \sum_{v_i} \int_{L_i \subset \omega} A(\omega, L_i)\{s\}(\omega)\,d\omega(L_i),$$

где ν_i – ребра K, L_i – прямая, параллельная ν_i, $d\omega(L_i)$ – обычная мера Лебега на множестве гиперплоскостей, содержащих L_i.

Такая мера является ядерной для K.

Доказательство. Это утверждение есть переформулировка Теоремы 1.2.

Определение 6.2. Пусть K и K' – тела. Предположим, что K' выпуклый, и что K и K' имеют одну и ту же ядерную меру. Тогда тело K' называется *выпуклой версией* K и обозначается через $\mathrm{Conv}(K)$.

Заметим, что основное свойство сохраняется : тело и его выпуклая версия взаимозаменяемы при вычислении смешанных объемов.

§7. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – C^2-гладкое тело с почти всюду неотрицательными главными кривизнами. Мы собираемся найти одну из ядерных мер для K и получить условие квазивыпуклости K.

Рассмотрим специальные приближения K многогранниками.

Локальное приближение. Для $\omega \in \Omega^{n-1}$, пусть $u^j(\omega)$ - точки на ∂K с нормалью ω, $R_i^j(\omega)$ – i-тый главный радиус кривизны ∂K в точке $u^j(\omega)$, L_i^j — прямая с i-тым главным направлением в точке $u^j(\omega)$, k^j – число неотрицательных чисел среди R_i^j.

Построим окружности O_i^j, касающиеся L_i^j в точке $u^j(\omega)$, с радиусами $R_i^j(\omega)$, приблизим каждую O_i^j многоугольником K_i^j и рассмотрим сумму $S^j = \oplus_i K_i^j$. После определенной трансляции, S^j даст локальное приближение ∂K около точки $u^j(\omega)$.

Глобальное приближение. Пусть Φ_t - покрытие Ω^{n-1} непокрывающими множествами Φ_l с кусочно-гладкими границами и с радиусами, не превосходящими t. Отметим в каждом Φ_l внутреннюю точку ω_l, так что главные кривизны в этой точке не равны 0. Теперь приблизим ∂K следующим образом : в окрестности точки $u^j(\omega_l)$ приблизим ∂K с помощью части S^j, тогда, транслируя грани каждой S^j, отметим их касательную к ∂K. Таким образом, мы получим приближение $K_{t,m}$ тела K. Используя это приближение, можно получить следующую теорему :

Теорема 7.1. *Пусть K - C^2-гладкое тело с почти всюду ненулевыми главными кривизнами. Тогда мера μ_K, определенная соотношением*

$$\int_{F_n} \Lambda(f)\, d\mu_K(f) = \int_{\Omega^{n-1}} \sum_j \sum_i R_i^j(\omega)\, k^j(\omega)\, \Lambda(f(\omega, L_i^j))\, d\omega,$$

- ядерная мера для тела K.

Эта теорема следует из нашего основного результата :

Теорема 7.2. *Пусть K - гладкое тело. Пусть H_K - многозначная опорная функция K и*

$$\{H_K\}(\omega) = \sum_{\text{по ветьям}} H_K^j(\omega)\,(-1)^{k^j(\omega)}.$$

Тогда

1. K - квазивыпукло тогда и только тогда, когда $\{H_K\}$ - выпуклая функция, и опорная функция его выпуклой версии равна $\{H_K\}$.

2. Для гладких тел K и M, $\{H_K\} = \{H_M\}$ тогда и только тогда, когда для всех тел $K_2, ..., K_n$

$$V(K, K_2, ..., K_n) = V(M, K_2, ..., K_n).$$

ABSTRACT. **We say that two bodies K and K' in $\mathbb{R}^n$ have** ***the same behavior with respect to mixed volumes*** **if for all convex bodies $K_2, ..., K_n$, we have**

$$V(K, K_2, ..., K_n) = V(K', K_2, ..., K_n).$$

The present paper gives necessary and sufficient conditions for two bodies with piecewise smooth surface to have the same behavior.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. A. Santalo, Integral Geometry and Geometric Probability, Addison--Wesley, Reading, Mass., 1976.
2. K. Leichtweiss, Konvexe Mengen, VEB, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980.
3. H. Groemer, "Minkowski addition and mixed volumes", Geom. Ded., vol. 6, no. 2, pp. 141–163, 1977.
4. Ю. Бураго, Б. Залгаллер, Геометрические Неравенства, Ленинград, Наука, 1980.

5 Сентября 1992

Санкт-Петербург
Л. О. М. И.