ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТИПА ГОЛУЗИНА-КРЫЛОВА ДЛЯ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ ДЖРБАШЯНА $H_p(\alpha)$ И H_p ХАРДИ

С. С. Степанян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, No. 1, 1993

Цель настоящей работы – получение представлений для функций из классов Джрбашяна $H_p(\alpha)$ $(0 < p < \infty,\ \alpha > -1)$ и Харди $H_p(0 \le p \le 2)$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Класс функций $H_p(\alpha)$, $(p > 0, \alpha > -1)$ - аналитических в единичном круге, был введен М.М.Джрбашяном в 1945 году. Этот класс обобщает классы Харди H_p и определяется следующим образом (см. [1] и [2]) :

Класс $H_p(\alpha)(p > 0,\ \alpha > -1)$ состоит из всех функций $f(z)$, голоморфных в единичном круге $|z| < 1$, для которых существует интеграл

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha|f(\rho e^{i\theta})|^p\,\rho\,d\rho\,d\theta.$$

Нетрудно убедиться, что $H_p \subset H_p(\alpha)$ для любых $p > 0$ и $\alpha > -1$, где H_p - класс Харди.

Для $f(z) \in H_2(\alpha)$ имеет место следующее интегральное представление :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}\frac{\varphi(t)}{(1-\bar{t}z)^{\frac{\alpha+3}{2}}}\,dt,\ |z| < 1, \tag{1}$$

где

$$\varphi(z) = \frac{\alpha+1}{2}\int_0^1(1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{2}}f(\rho z)\,d\rho$$

принадлежит классу Харди H_2 и, следовательно, $\varphi(t) \in \mathcal{L}_2$ (см. [2], Теорема 5).

Если $f(z) \in H_p(\alpha)$ $(0 < p \le 2,\ \alpha > -1)$, то имеет место следующее интегральное представление :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}\frac{\varphi(t)}{(1-\bar{t}z)^{\frac{\alpha+2}{p}+\frac{1}{2}}}\,dt,\ |z| < 1, \tag{2}$$

где $\varphi(t) \in \mathcal{L}_2$, а если $f(z) \in H_p(\alpha)$ $(2 \leq p < \infty,\ \alpha > -1)$, то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \frac{\varphi(t)}{(1 - \bar{t}z)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}}\, dt, \quad |z| < 1, \tag{3}$$

где опять $\varphi(t) \in \mathcal{L}_2$

Интегральные представления подобного типа имеют место для функций класса Харди H_p $(0 < p \leq 2)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \frac{\varphi(t)}{(1 - \bar{t}z)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}}\, dt, \quad |z| < 1, \tag{4}$$

где $\varphi(t) \in \mathcal{L}_2$

Г. В. Голузин и В. И. Крылов [3] дали представление функции $f(z) \in H_1$ по угловым граничным значениям $f(z)$, заданным на множестве точек единичной окружности, имеющем положительную меру. Это представление имеет вид

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n\psi(z)}}{2\pi i} \int_E \frac{f(t)\, e^{n\psi(t)}}{t - z}\, dt, \quad |z| < 1, \tag{5}$$

где $\psi(z) = U(z) + iV(z)$ - аналитическая функция в круге

$$U(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_E(e^{i\theta}) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)}\, d\theta.$$

Здесь E – множество положительной меры по Лебегу, принадлежащее единичному кругу: $mE > 0$, $E \subset \Gamma = \{t:\ |t| = 1\}$, $I_E(e^{i\theta})$ - характеристическая функция этого множества, $0 \leq r < 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ и n - натуральное число.

Цель настоящей работы - получение представлений типа (5) для функций из $H_p(\alpha)$ $(0 < p < \infty,\ \alpha > -1)$ и H_p $(0 < p \leq 2)$, с помощью интегральных представлений типа (1) - (4).

Результаты в этом направлении были получены в [4] (стр. 74) в случае, когда показатели экспонент $\frac{\alpha+3}{2}$, $\frac{\alpha+2}{p} + \frac{1}{2}$, $\frac{\alpha+1}{p} + 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{2}$ в представлениях (1) - (4) являются натуральными числами, большими единицы.

Теперь же представления типа (5) даны для произвольных показателей, больших единицы.

Лемма 1. *Для $f(z) \in H_p(\alpha)$ $(0 < p < \infty)$ или $f(z) \in H_p$ $(0 < p \leq 2)$ имеет место следующее представление:*

$$f(z) = \mathcal{D}^{\beta}\left\{\frac{r^{\beta}\varphi(z)}{\Gamma(1+\beta)}\right\}, \quad z = re^{i\theta}, 0 \leq r < 1, \tag{6}$$

где $\beta = \dfrac{\alpha+2}{p} - \dfrac{1}{2}$ $(0 < p \leq 2, \alpha > -1)$, $\beta = \dfrac{\alpha+1}{p}$ $(2 \leq p < \infty, \alpha > -1)$, $\beta = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2}$ $(0 < p \leq 2)$, *функция* $\varphi(z)$ *взята из представлений* (2), (3) *и* (4), *соответственно, а* $\mathcal{D}^{\beta}$ *– интегро- дифференциальный оператор в смысле Римана-*

-Лиувилля.

Доказательство. В представлениях (2), (3) и (4) $\varphi(z) \in H_2 \subset H_1$, следовательно ,согласно теореме Фихтенгольца ([5], стр. 97), имеем

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{\varphi(t)}{t-z}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \ |z| < 1, \tag{7}$$

где a_k – коэффициенты разложения в ряд Тейлора функции $\varphi(z)$.

Воспользовавшись разложением

$$\frac{1}{(1-z)^{1+\beta}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\beta+k)}{\Gamma(1+\beta)\,\Gamma(1+k)} z^k, \ |z| < 1,$$

и представлениями (2), (3), (4), заключаем, что

$$\varphi(\ ) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{\varphi(t)}{t-z}\, |dt| = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(1+\beta+k)}{\Gamma(1+\beta)\,\Gamma(1+k)} z^k, \tag{8}$$

где β – один из показателей, указанных в Лемме 1. Тогда

$$\frac{r^{\beta} \varphi(z)}{\Gamma(1+\beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{r^{k+\beta} e^{ik\theta}}{\Gamma(1+\beta)}, \ z = re^{i\theta}. \tag{9}$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{D}^{\beta} \left\{ \frac{r^{\beta} \varphi(z)}{\Gamma(1+\beta)} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k e^{ik\theta}}{\Gamma(1+\beta)} \mathcal{D}^{\beta} \left(r^{k+\beta} \right). \tag{10}$$

Используя формулу (см. [6], стр. 569) , получим что

$$\mathcal{D}^{\beta} \left\{ \frac{r^{k+\beta}}{\Gamma(1+\beta+k)} \right\} = \frac{r^k}{\Gamma(1+k)}. \tag{11}$$

Теперь (6) следует из формул (8), (9) и (11). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если* $f(z) \in H_p(\alpha)$ $(0 < p < \infty, \alpha > -1)$ *или* $f(z) \in H_p$ $(0 < p \leq 2)$, *то имеет место следующее представление :*

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^r (r-x)^{m-\beta-1} \mathcal{D}^m \left\{ \frac{x^{\beta} \varphi(xe^{i\theta})}{\Gamma(1+\beta)} \right\} dx, \tag{12}$$

причем $\beta = \frac{\alpha+2}{p} - \frac{1}{2}$ $(0 < p \le 2, \alpha > -1$, $\beta = \frac{\alpha+1}{p}$ $(2 \le p < \infty, \alpha > -1)$, $\beta = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ $(0 < p \le 2)$. $z = re^{i\theta}$, $0 \le r < 1$, *функция* $\varphi(z)$ *взята из представлений (2), (3) и (4), соответственно.* m *- натуральное число.* $m \ge 1$, $m-1 < \beta < m$.

Доказательство. Для доказательства Леммы 2 воспользуемся представлением (6). Пусть

$$F(r) = \frac{r^{\beta}\,\varphi(re^{i\theta})}{\Gamma(1+\beta)},$$

тогда $f(r) = \mathcal{D}^{\beta}F(r)$, $0 \le r < 1$. Функция $F(r)$ вместе со своими производными до $(m-1)$ порядка включительно непрерывна в промежутке $(0,l)$, $l < 1$ и $F^{(m)}(r) \in \mathcal{L}(0,l)$. Поэтому

$$F^{(m-1)}(r) = \frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^{k} \left[\varphi(re^{i\theta})\right]^{(m-1-k)} \left(r^{\beta}\right)^{(k)}. \qquad (13)$$

где функции $F(r), F'(r), \ldots, F^{(m-1)}(r)$ непрерывны на $[0,l]$, $l < 1$, при условии $\beta > m-1$. Используя (13), получим

$$\int_0^l |F^{(m)}(r)|\,dr \le \frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \sum_{k=0}^{m} C_m^k \int_0^l \left|\left[\varphi(re^{i\theta})\right]^{(m-k)}\right| \cdot \left|\left(r^{\beta}\right)^{(k)}\right| dr. \qquad (14)$$

Так как $\varphi(z)$ аналитична в единичном круге $|z| < 1$, то при $0 \le r \le l < 1$ имеет место следующая оценка :

$$\left|\left[\varphi(re^{i\theta})\right]^{(m-k)}\right| \le M_{l,k}, \; k = 0, 1, .., m.$$

где $M_{l,m}$ - постоянная, зависящая от l и m. Из (14) следует, что

$$\int_0^l |F^{(m)}(r)|\,dr \le \frac{M_{l,m}}{\Gamma(1+\beta)} \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-k+1)}{\beta-k+1}\, l^{\beta-k+1}. \qquad (15)$$

Из (15) имеем, что $F^{(m)} \in \mathcal{L}(0,l)$. Учитывая (13), (15) и свойство интегро-дифференциальных операторов (см. [6], стр. 572. Свойство 6) , можем написать

$$\mathcal{D}^{\beta}F(r) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{F^{(k)}(0)\, r^{k-\beta}}{\Gamma(1+k-\beta)} + \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^r (r-x)^{m-\beta-1} \mathcal{D}^m F(x)\,dx. \qquad (16)$$

Так как $\beta > m-1$, из (13) получим, что $F^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, (m-1)$. Следовательно, представление (12) следует из (16). Лемма 2 доказана.

Используя эти леммы, докажем несколько теорем.

Теорема 1. *Пусть* $f(z) \in H_p(\alpha)$ $(0 < p < \infty\,, \alpha > -1)$ *или* $f(z) \in H_p$ $(0 < p \leq 2)$. *Для любого подмножества* E *положительной меры на единичной окружности* $|t| = 1$ *существует функция* $\varphi(z) \in H_2$ *такая, что*

$$f(z) = D^{\beta}\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{r^{\beta}\, e^{-n\psi(z)}}{\Gamma(1+\beta)\, 2\pi i} \int_E \frac{\varphi(t)\, e^{n\psi(t)}}{t-z}\, dt\right\},\ |z| < 1 \tag{17}$$

где $\psi(t)$ *известна из представления (5),* $\varphi(t) \in \mathcal{L}_2$ *, а* $\beta = \dfrac{\alpha+2}{p} - \dfrac{1}{2}\,(0 < p \leq$ $\leq 2, \alpha > -1$, $\beta = \dfrac{\alpha+1}{p}\,(2 \leq p < \infty, \alpha > -1)$, $\beta = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2}\,(0 < p \leq 2)$.

Доказательство. Если $f(z) \in H_p(\alpha)$, то $\varphi(z) \in H_2 \subset H_1$. Следовательно, в силу представления (5) имеем

$$\varphi(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n\psi(z)}}{2\pi i} \int_E \frac{\varphi(t)\, e^{n\psi(t)}}{t-z}\, dt,\ |z| < 1. \tag{18}$$

Из Леммы 1 и формулы (18), получаем представление (17). Теорема доказана.

Подставляя $p = 2$ и $\beta = 0$ в представление (17), получим представление (5). Но из (4) следует, что $f(t) = \varphi(t)$ $(|t| = 1)$ почти всюду..

Следующая теорема дает интегральное представление функции $f(z)$ без оператора дифференцирования.

Теорема 2. *Пусть* $f(z) \in H_p(\alpha)$ $(0 < p < \infty\,, \alpha > -1)$ *или* $f(z) \in H_p$ $(0 < p \leq 2)$. *Для каждого подмножества* E *единичной окружности* $|t| = 1$ *положительной меры существует функция* $\varphi(z) \in H_2$ *такая, что*

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_E \int_0^r \frac{\varphi(t)\, e^{n\psi(t)}\, e^{-n\psi(xe^{i\theta})}\, Q_n(t,x)}{(t - x\,e^{i\theta})^{m+1}}\, dt\, dx, \tag{19}$$

где $\beta = \dfrac{\alpha+2}{p} - \dfrac{1}{2}\,(0 < p \leq 2, \alpha > -1)$, $\beta = \dfrac{\alpha+1}{p}\,(2 \leq p < \infty, \alpha > -1)$, $\beta = = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2}\,(0 < p \leq 2)$, $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$, $m \geq 1$ – *натуральное число,* $m - 1 < \beta < m$, *а*

$$Q_n(t,x) = \frac{(t - x\,e^{i\theta})^{m+1}\, e^{n\psi(xe^{i\theta})}}{\Gamma(1+\beta)\,\Gamma(m-\beta)\,(r-x)^{1+\beta-m}}\, D^{m}\left\{\frac{x^{\beta}\, e^{-n\psi(xe^{i\theta})}}{t - xe^{i\theta}}\right\}. \tag{20}$$

Доказательство. Так как в представлениях (2) – (4), $\varphi(z) \in H_2$, то $\varphi(z)\, e^{n\psi(z)} \in H_2 \subset H_1$. Согласно теореме Г. М. Фихтенгольца ([5], стр. 97) эта функция представляется интегралом через свои граничные значения :

$$\varphi(xe^{i\theta})\, e^{n\psi(xe^{i\theta})} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{\varphi(t)\, e^{n\psi(t)}}{t - x\,e^{i\theta}}\, dt,\ 0 \leq x < 1. \tag{21}$$

Из формулы (21) и Леммы 2 следует, что

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\int_0^r \frac{\varphi(t)\,e^{n\psi(t)}}{(r-x)^{1+\beta-m}}\left\{\frac{x^{\beta}\,e^{-n\psi(xe^{i\theta})}}{t-xe^{i\theta}}\right\}^{(m)}\frac{dt\,dx}{\Gamma(1+\beta)\,\Gamma(m-\beta)}. \quad (22)$$

Принимая во внимание (20) и (22), можем записать

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\int_0^r \frac{\varphi(t)\,e^{n\psi(t)}\,e^{-n\psi(xe^{i\theta})}\,Q_n(t,x)}{(t-x\,e^{i\theta})^{m+1}}\,dt\,dx \quad (23)$$

Разобьем теперь интеграл (23) на два интеграла J_1 и J_2, где

$$J_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\setminus E}\int_0^r \frac{\varphi(t)\,e^{n\psi(t)}\,e^{-n\psi(xe^{i\theta})}\,Q_n(t,x)}{(t-x\,e^{i\theta})^{m+1}}\,dt\,dx,$$

а J_1 тот же интеграл, но рассматриваемый на множестве E. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} J_2=0$. Согласно свойству интеграла Пуассона – Стилтьеса (см. [5], стр. 52), если $t\in\Gamma\setminus E$, то

$$|\exp(n\,\psi(t))|=1 \quad \text{и} \quad |\exp(-n\psi(xe^{i\theta}))|=$$

$$=\exp\left(-\frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi} I_E(e^{i\omega})\,\frac{(1-x^2)\,d\omega}{1+x^2-2x\cos(\omega-\theta)}\right)\leq \quad (24)$$

$$\leq\exp\left\{-\frac{n}{2\pi}\,\frac{1-x}{1+x}\,mE\right\}\leq\exp\left(-\frac{n}{2\pi}\,\frac{1-r}{1+r}\,mE\right\},\quad 0\leq x\leq r<1.$$

Так как $|t|=1$, $|xe^{i\theta}|=x\leq r\leq t<1$, $|\psi^{(k)}(xe^{i\theta})|\leq R_k(r)$, $k=1,2,\ldots$, где $R_k(r)$ ограниченные величины, зависящие от r, то нетрудно убедиться, что

$$|Q_n(t,x)|\leq\frac{P_m(n)}{x^{m-\beta}\,(r-x)^{1+\beta-m}}, \quad (25)$$

где $P_m(n)$ – многочлен m-ой степени относительно n с ограниченными положительными коэффициентами, зависящими от r.

Теперь из (24) и (25) получим

$$|J_2|\leq\frac{P_m(n)\,\exp\left\{-\frac{n}{2\pi}\,\frac{1-r}{1+r}\,mE\right\}}{2\pi\,(1-r)^{m+1}}\int_{\Gamma\setminus E}\int_0^r|\varphi(t)|\,\frac{|dt|\,dx}{x^{m-\beta}\,(r-x)^{1+\beta-m}}. \quad (26)$$

Так как $\varphi(t)\in\mathcal{L}_1$, $\int_{\Gamma\setminus E}|\varphi(t)|\,|dt|=A$, то из неравенства (26) следует, что

$$|J_2|\leq\frac{A\,P_m(n)\,\exp\left\{-\frac{n}{2\pi}\,\frac{1-r}{1+r}\,mE\right\}}{2\pi\,(1-r)^{m+1}}\int_0^r x^{\beta-m}\,(r-x)^{m-\beta-1}\,dx. \quad (27)$$

Подставляя $x = ry$ в (27), получим

$$\int_0^r x^{\beta-m}(r-x)^{m-\beta-1}\,dx = B(m-\beta, 1+\beta-m), \tag{28}$$

где B – функция Эйлера. Так как $m-\beta>0$ и $1+\beta-m>0$, то

$$|J_2| \le \frac{A\,P_m(n)\,B(m-\beta, 1+\beta-m)}{2\pi(1-r)^{m+1}} \exp\left\{-\frac{n}{2\pi}\frac{1-r}{1+r}mE\right\}. \tag{29}$$

Из (29) следует, что $\lim_{n\to\infty} J_2 = 0$. Теорема 2 доказана.

Теперь получим интегральное представление без знака предела. Согласно формуле Карлемана

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{F(t)}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty d\sigma \int_E \frac{F(t)}{t-z}\left[\frac{\gamma(t)}{\gamma(z)}\right]^\sigma \ln\left(\frac{\gamma(t)}{\gamma(z)}\right) dt,$$

где $F(z)\in H_1$, $mE>0$, $|\gamma(t)|=1$, $t\in\Gamma\setminus E$, $|\gamma(z)|>1$, $|z|<1$. Мы можем положить $\gamma(z)=\exp(\psi(z))$, $\varphi(z)$ вместо $F(z)$ и в представлениях (2) – (4) взять β равным $\beta = \frac{\alpha+2}{p}-\frac{1}{2}$, $\frac{\alpha+1}{p}$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{2}$.

Теорема 3. *Пусть $f(z)\in H_p(\alpha)$ $(0<p<\infty\, c>-1)$ или $f(z)\in H_p$ $(0<p\le 2)$. Для любого подмножества E единичной окружности $|t|=1$ с положительной мерой существует функция $\varphi(z)\in H_2$ такая, что*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{\varphi(t)}{(1-tz)^{1+\beta}}\frac{dt}{t} +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \int_E \int_0^r \frac{\varphi(t)\,e^{\sigma\psi(t)}\,e^{-\sigma\psi(xe^{i\theta})}N_\sigma(t,x)}{(t-xe^{i\theta})^{m+1}}\,d\sigma\,dt\,dx,$$

где $\beta = \frac{\alpha+2}{p}-\frac{1}{2}$ $(0<p\le 2, \alpha>-1)$, $\beta=\frac{\alpha+1}{p}$ $(2\le p<\infty, \alpha>-1)$, $\beta = \frac{1}{p}-\frac{1}{2}$ $(0<p\le 2)$, $z=re^{i\theta}$, $0\le r<1$, $m\ge 1$ – *натуральное число* $m-1<\beta<m$, *а* $N_\sigma(t,x)$ *определяется из равенства*

$$\frac{(r-x)^{m-\beta-1}}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(m-\beta)}D^m\left\{\frac{x^\beta(\psi(t)-\psi(xe^{i\theta}))\,e^{-\sigma\psi(xe^{i\theta})}}{t-xe^{i\theta}}\right\} = \frac{N_\sigma(t,x)\,e^{-\sigma\psi(xe^{i\theta})}}{(t-xe^{i\theta})^{m+1}}. \tag{30}$$

Доказательство. Так как $\varphi(z)\in H_2\subset H_1$, то согласно формуле Карлемана

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty d\sigma\int_E \frac{\varphi(t)}{t-z}\left[\frac{e^{\psi(t)}}{e^{\psi(z)}}\right]^\sigma \ln\left[\frac{e^{\psi(t)}}{e^{\psi(z)}}\right] dt.$$

Умножая обе части этого равенства на $\frac{r^\beta}{\Gamma(1+\beta)}$ и используя Лемму 1, получим

$$
\begin{aligned}
f(z) = \mathcal{D}^\beta \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{\varphi(t)}{t-z} \frac{r^\beta}{\Gamma(1+\beta)}\, dt \right\} + \\
+ \mathcal{D}^\beta \left\{ \frac{r^\beta}{\Gamma(1+\beta)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty d\sigma \int_E \frac{\varphi(t)}{t-z} \left[\frac{e^{\psi(t)}}{e^{\psi(z)}} \right]^\sigma (\psi(t) - \psi(z))\, dt \right\}.
\end{aligned} \tag{31}
$$

Прежде всего покажем, что

$$
\mathcal{D}^\beta \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{\varphi(t)}{t-z} \frac{r^\beta}{\Gamma(1+\beta)}\, dt \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{\varphi(t)}{(1-\bar{t}z)^{1+\beta}} \cdot \frac{dt}{t}. \tag{32}
$$

Имеем

$$
\mathcal{D}^\beta \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{\varphi(t)}{t-z} \frac{r^\beta}{\Gamma(1+\beta)}\, dt \right\} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{\varphi(t)}{t^{n+1}} \mathcal{D}^\beta \left\{ \frac{r^{n+\beta}\, e^{in\theta}\, dt}{\Gamma(1+\beta)} \right\}. \tag{33}
$$

Согласно формуле (11)

$$
\mathcal{D}^\beta \left\{ \frac{r^{n+\beta}}{\Gamma(1+\beta)} \right\} e^{in\theta} = \frac{\Gamma(1+\beta+n)}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1+n)} z^n. \tag{34}
$$

Теперь (32) следует из (7), (33) и (34).

Тем же способом получим, что

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^\beta \left\{ \frac{r^\beta}{\Gamma(1+\beta)\, 2\pi i} \int_0^\infty d\sigma \int_E \frac{\varphi(t)}{t-z} \left[\frac{e^{\psi(t)}}{e^{\psi(z)}} \right]^\sigma (\psi(t) - \psi(z))\, dt \right\} = \\
= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty d\sigma \int_E \varphi(t)\, e^{\sigma\psi(t)} \mathcal{D}^\beta \left\{ \frac{r^\beta (\psi(t) - \psi(re^{i\theta}))\, e^{-\sigma\psi(re^{i\theta})}}{\Gamma(1+\beta)\,(t - re^{i\theta})}\, dt \right\}.
\end{aligned} \tag{35}
$$

Согласно (16)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^\beta \left\{ \frac{r^\beta (\psi(t) - \psi(re^{i\theta})\, e^{-\sigma\psi(re^{i\theta})}}{\Gamma(1+\beta)\,(t - re^{i\theta})} \right\} = \\
= \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^r (r-x)^{m-\beta-1} \mathcal{D}^m \left\{ \frac{x^\beta (\psi(t) - \psi(xe^{i\theta}))\, e^{-\sigma\psi(xe^{i\theta})}}{\Gamma(1+\beta)(t - xe^{i\theta})} \right\} dx.
\end{aligned} \tag{36}
$$

Теорема 3 теперь следует из формул (30) – (32), (35) и (36). Дифференцирование под знаком интеграла здесь допустимо, в силу хорошо известной теоремы анализа (см. [7], стр. 218).

ABSTRACT. The aim of the present paper is to obtain representations of some type for functions from the Djrbashian $H_p(\alpha)$ $(0 < p < \infty,\ \alpha > -1)$ and the Hardy $H_p(0 \le p < 2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, "О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций," ДАН Арм.ССР, том 3, no. 1, стр. 3 - 9, 1945.
2. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций," Сообщения Института математики и механики АН Арм.ССР, no. 2, стр. 3 - 40, 1948.
3. Г. М. Голузин, В. И. Крылов, "Обобщение формулы Карлемана и приложение ее к аналитическому продолжению функций," Матем. сборник, том 40, no. 2, 1933.
4. С. С. Степанян, "Об интегральном представлении функций класса М. М. Джрбашяна $H_p(\alpha)$," ДАН Арм.ССР, том 19, no. 2, стр. 74 - 81, 1979.
5. И. И. Привалов, Граничные Свойства Аналитических Функций, М. - Л., 1950.
6. М. М. Джрбашян, Интегральные Преобразования и Представления Функций в Комплексной Области, М., 1966.
7. Г. М. Фихтенгольц, О Простых Кратных Интегралах, Зависящих от Параметра, 1918.

21 Апреля 1992

Армянский педагогический институт