О ФАКТОРИЗАЦИИ f-ЦИРКУЛЯНТНЫХ МАТРИЦ ФУНКЦИЙ

А. Г. Камалян, В. А. Оганян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, No. 1, 1993

В работе рассматривается задача Винера–Хопфа факторизации в винеровской алгебре для матриц–функций f–циркулянтного типа в случае, когда f - тригонометрический полином. Устанавливается, что факторизацию этих матриц функций можно свести к факторизации рациональных матриц–функций. При некоторых f построена мероморфная факторизация.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{T}$ - единичная окружность в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, W - винеровская алгебра всех функций, разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды Фурье

$$W = \left\{ a : \mathbb{T} \longmapsto \mathbb{C}, \quad a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k t^k, \quad \|a\|_W = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| < \infty \right\},$$

I - единичный оператор, а S - оператор сингулярного интегрирования вдоль $\mathbb{T}$, действующего в пространствах $L_2(\mathbb{T})$ и W :

$$(Sa)(t) = \frac{1}{i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{a(\tau)}{\tau - t} \, d\tau.$$

Рассмотрим следующие проекторы $P_\pm = 1/2(I \pm S)$, $\pi_m^\pm = t^m P_\pm t^{-m} (m \in \mathbb{Z})$, $\pi_{m,n} = I - (\pi_n^+ + \pi_m^-)$ $(m, n \in \mathbb{Z} : m < n)$. Легко видеть, что

$$\pi_m^+(a) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k t^k, \quad \pi_m^-(a) = \sum_{k=-\infty}^{m-1} a_k t^k, \quad \pi_{m,n}(a) = \sum_{k=m}^{n-1} a_k t^k,$$

где

$$a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k t^k \in L_2(\mathbb{T}).$$

Определим следующие классы функций : $W_+ = \pi_0^+(W)$, $W_- = \pi_1^-(W)$, $M_\pm =$

$= W_\pm + \mathcal{R}$, где $\mathcal{R}$ – алгебра рациональных функций с полюсами вне $\mathbb{T}$. Условимся в дальнейшем множество n – мерных векторов (матриц порядка $n \times n$) с элементами из класса L обозначать через L^n ($L^{n\times n}$).

Под факторизацией Винера-Хопфа (или просто факторизацией) матрицы-функции $G \in W^{n\times n}$ в винеровской алгебре W понимается следующее представление :

$$G(t) = G_+(t)\Lambda(t)G_-(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{1}$$

где $G_+^{\pm 1} \in W_+^{n\times n}$, $G_-^{\pm} \in W_-^{n\times n}$, $\Lambda(t) = \operatorname{diag}\left[t^{\kappa_1}, ..., t^{\kappa_n}\right]$ и $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \cdots \geq \kappa_n$ – целые числа, называемые *частными индексами* матрицы-функции G. В случае нулевых частных индексов факторизация называется *канонической*.

Для факторизуемости матрицы-функции $G \in W^{n\times n}$ необходимо и достаточно, чтобы $\det G(t) \neq 0$ всюду на $\mathbb{T}$ (см. [1]). Хорошо известно, что в скалярном случае ($n = 1$) факторы $G_\pm$ могут быть построены в явном виде посредством проекторов $P_\pm$. Однако в матричном случае ($n > 1$) эффективные методы факторизации известны только для частных классов (см. [1], [2]). Наиболее глубокие результаты в этом направлении получены для рациональных матриц-функций (см. [1] - [7]).

Под мероморфной факторизацией $G \in W^{n\times n}$ в пространстве W будем понимать представление

$$G(t) = A_+(t)A_-(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{2}$$

где $A_\pm^{\pm 1} \in M_\pm^{n\times n}$. Как известно, представление (1) можно получить из мероморфной факторизации с помощью конечного числа алгебраических операций (см. [2]). Представление (2) будем называть *функционально - теоретической факторизацией* матрицы-функции G, если $A_\pm^{\pm 1}$ определены почти всюду и допускают аналитическое продолжение, соответственно, в области $\mathbb{T}_\pm = \{z : |z| \lessgtr 1\}$.

В последние два десятилетия появилось большое количество работ, посвященных исследованию факторизации матриц-функций вида $\sum_{k=0}^{n-1} a_k Q^k$. Здесь

$a_k \in L_\infty(\mathbb{T})$, $Q \in \mathcal{R}^{n\times n}$, а $Q^n = fI_n$ (I_n – единичная матрица), $f \in \mathcal{R}$. Важным подклассом этих матриц-функций являются f- *циркулянтные матрицы-функции* :

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1}f & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2}f & a_{n-1}f & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 f & a_2 f & \cdots & a_0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Интерес к этим матрицам-функциям вызван в первую очередь многочисленными приложениями в математической физике (см., например, [8] – [11]). Функционально-теоретическая факторизация матриц-функций вида (3) построена в работах [8], [12] ($n = 2$), [13] ($n \geq 2$). В [14] (см. также [9]) предложена процедура преобразования функционально-теоретической факторизации в факторизацию Винер-Хопфа. Наибольший прогресс при исследовании этих матриц-функций достигнут в случае $f = g^n$, $g \in \mathcal{R}$. Так, в работах [15] ($n = 2$) и [16] ($n \geq 2$) предложены эффективные методы факторизации. А в [18] ($n = 2$) получены необходимые и достаточные условия канонической факторизации и найдены факторы. Случаи конкретных f рассмотрены в [18] – [20]. Так, например, в работе [20] (более подробно см. [1], глава 6, §1), полностью исследован случай $f = t^{-1}$. Матрицы-функции вида (3) рассмотрены также в [21], [22]. В [23] задача мероморфной факторизации более широкого класса матриц-функций сведена к последовательному решению нескольких задач Римана на некоторой римановой поверхности.

В настоящей работе предлагается процедура сведения проблемы факторизации матрицы-функции к проблеме вида (3) к факторизации рациональной матрицы-функции (Теоремы 6, 7). В отличие от [14], мы избегаем всякого рода аппроксимаций. Для частных случаев f построены явные формулу мероморфной факторизации (Теорема 8).

§1. КОММУТАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ

Пусть

$$f = \sum_{k=m_2}^{m_1} f_k z^k, \quad (z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, \quad m_2 \leq m_1),$$

$f(z) \neq 0$ на $\mathbb{T}$ и максимум функции $|f|$ на $\mathbb{T}$ достигается в точке $z_o = e^{i\theta_o}$ $(-\pi < \theta_o < \pi)$. Выберем некоторую ветвь функции $f^{1/n}$, голоморфную в области

$$U = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad |\arg z - \theta_o| < \pi\}.$$

В частности $f^{1/n}$ непрерывна на множестве $\mathbb{T} \setminus \{-z_o\}$. Мы воспользуемся этой специальной ветвью в §4.

Каждому $a = \operatorname{col}[a_i]_{i=0}^{n-1} \in L_2^n(\mathbb{T})$ сопоставим матрицу-функцию ω_a, определенную формулой (3). Ясно, что $\omega_a \omega_b = \omega_b \omega_a$ для любых $a, b \in L_2^n(\mathbb{T})$. Пусть $A \subset L_\infty(\mathbb{T})$ – некоторая банахова алгебра с единицей, содержащая f, с нормой $\|\cdot\|_A$. Нетрудно убедиться, что $\Omega_A(f) = \{\omega_a;\ a \in A^n\}$ – коммутативная банахова алгебра с нормой

$$\|\omega_a\|_\Omega = \sum_{k=0}^{n-1} \|f\|_A^{k/n} \|a_k\|_A, \quad a = \operatorname{col}[a_i]_{i=0}^{n-1} \in A^n.$$

Оператор $\omega : A^n \longmapsto \Omega_A(f)$ $(\omega(a) = \omega_a)$ естественным образом определяет произведение на A^n : $ab = \omega^{-1}(\omega_a \omega_b)$. Легко видеть, что если $c = ab = \operatorname{col}[c_i]_{i=0}^{n-1}$, где $a = \operatorname{col}[a_i]_{i=0}^{n-1}$, $b = \operatorname{col}[b_i]_{i=0}^{n-1}$, то

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} + f \sum_{j=i+1}^{n-1} a_j b_{n-j+i}. \tag{4}$$

Определенное таким образом произведение с нормой $\|a\|_{A^n} = \|\omega_a\|_\Omega$ превращает A^n в коммутативную банахову алгебру с единицей $e = \operatorname{col}[1, 0, \ldots, 0]$. Обозначим эту алгебру через $A^n(f)$. Очевидно, что ω является изометрическим изоморфизмом алгебр $A^n(f)$ и $\Omega_A(f)$. Условимся также группу обратимых элементов произвольной алгебры B обозначать через GB.

Сопоставим вектор-функции $a = \operatorname{col}[a_i]_{i=0}^{n-1} \in L_\infty^n(f)$ диагональную матрицу-функцию $\lambda_a = \operatorname{diag}[\lambda_0^a, \ldots, \lambda_{n-1}^a]$, где

$$\lambda_k^a = \sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon^{sk} a_s f^{s/n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \varepsilon = \exp(2i\pi/n). \tag{5}$$

Пусть $D_A = \{\lambda_a : a \in A^n(f)\}$. Введем матрицы-функции $F = \operatorname{diag}[1, f^{1/n}, \ldots, f^{(n-1)/n}]$ и $E = [\varepsilon^{ks}]_{k,s=0}^{n-1}$.

Лемма 1. *Для любого $a \in L^n_\infty(f)$ имеет место следующее равенство :*

$$\omega_a = FE\lambda_a E^{-1}F^{-1}. \tag{6}$$

Доказательство. Учитывая, что

$$E^{-1} = \frac{1}{n}[\varepsilon^{-ks}]_{k,s=0}^{n-1}$$

в справедливости этого утверждения можно убедиться непосредственной проверкой.

Следствие 1. *Множество собственных значений матрицы $\omega_a(t)$ совпадает с множеством $\{\lambda_k^a(t)\}_{k=0}^{n-1}$* и $\det \omega_a = \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k^a$.

Следствие 2. *Пусть D_∞ - множество всех диагональных матриц-функций из $L^{n\times n}_\infty(\mathbb{T})$. Тогда $D_\infty = D_{L_\infty}$. Отображение $\lambda : L^n_\infty(f) \longmapsto D_\infty$, действующее по правилу $\lambda(a) = \lambda_a$ является изоморфизмом этих алгебр. Если $\mu \in D_\infty$, $\mu = = diag\,[\mu_0, \mu_1, ..., \mu_{n-1}]$, $c = \lambda^{-1}(\mu) =$ $col\,[c_i]_{i=0}^{n-1}$, то*

$$c_k = \frac{1}{n} f^{-k/n} \sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon^{-sk}\mu_s, \quad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{7}$$

Следствие 3. *Для того чтобы $a \in GL^n_\infty(f)$ необходимо и достаточно, чтобы $\lambda_a \in GD_\infty$.*

Следствие 4. *Для $a \in L^n_\infty(f)$ справедливо равенство*

$$\exp(\omega_a) = FE\exp(\lambda_a)E^{-1}F^{-1}. \tag{8}$$

Из Следствия 3 вытекает, что $\ln \lambda_a \in D_\infty$ как только $a \in GL^n_\infty(f)$. Следовательно, в силу Следствия 2. мы можем определить отображение $\tau : GL^n_\infty(f) \longmapsto L^n_\infty(f)$ действующее следующим образом : $\tau(a) = \tau_a = \lambda^{-1}(\ln \lambda_a)$. Пусть $\tau_a = = \mathrm{col}\,[\tau_i^a]_{i=0}^{n-1}$.

Лемма 2. *Если $a \in GL^n_\infty(f)$, то τ_a является логарифмом a, и*

$$\tau_k^a = \frac{1}{n} f^{-k/n} \sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon^{-sk} \ln \lambda_s^a, \quad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{9}$$

Доказательство. Из определения τ_a и равенства (6) имеем

$$\omega_{\tau_a} = FE\ln(\lambda_a)E^{-1}F^{-1}.$$

В силу Следствия 4 получаем, что $\exp(\omega_{\tau_a}) = FE\lambda_a E^{-1}F^{-1} = \omega_a$, т.е. $\exp\tau_a = a$. Таким образом, (9) является следствием (7). Лемма 2 доказана.

§2 ФУНКЦИОНАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ

Пусть $m_- = \min(0;-m_1)$, $m_+ = \max(0;-m_2)$. При $m_+ - m_- \geq 1$ проекторы π_+, π_0, π_-, действующие на $L_2^n(\mathbb{T})$, определим следующим образом :

$$\pi_+ a = \operatorname{col}\,[\pi_0^+ a_0, \pi_{m_+}^+ a_1, ..., \pi_{m_+}^+ a_{n-1}],$$

$$\pi_- a = \operatorname{col}\,[\pi_0^- a_0, \pi_{m_-+1}^- a_1, ..., \pi_{m_-+1}^- a_{n-1}], \quad \pi_0 a = a - (\pi_+ a + \pi_- a),$$

где $a = \operatorname{col}\,[a_i]_{i=0}^{n-1}$. В случае $m_+ = m_-$, сохраняя определение π_+, будем считать, что $\pi_- a = a - \pi_+ a$ и $\pi_0 a = 0$.

Замечание 1. Если $m_+ - m_- \geq 2$, то $\pi_0 a = \operatorname{col}\,[0, \pi_{m_-+1,m_+} a_1, ..., \pi_{m_-+1,m_+} a_{n-1}]$; если $m_+ - m_- \leq 1$, $\pi_0 a \equiv 0$. Легко видеть, что $m_+ - m_- = 0$ эквивалентно $m_1 = m_2 = 0$, т.е. $f \equiv f_0$. Аналогично из $m_+ - m_- = 1$ следует, что либо $m_2 = -1, m_1 = 0$, либо $m_2 = 0, m_1 = 1$ (т.е. $f = f_{-1}t^{-1} + f_0$ или $f = f_0 + f_1 t$).

Теорема 1. *Для любого* $a \in GL_\infty^n(f)$

$$\omega_a = \exp[\omega(\pi_+\tau_a)]\exp[\omega(\pi_0\tau_a)]\exp[\omega(\pi_-\tau_a)]. \tag{10}$$

Доказательство. Из равенства $\tau_a = \pi_+\tau_a + \pi_0\tau_a + \pi_-\tau_a$ и Леммы 2 получаем $\omega_a = \exp[\omega(\pi_+\tau_a + \pi_0\tau_a + \pi_-\tau_a)]$. Откуда, из коммутативности матриц-функций $\omega(\pi_+\tau_a), \omega(\pi_0\tau_a), \omega(\pi_-\tau_a)$, следует равенство (10).

Замечание 2. Множители $\exp[\omega(\pi_\pm\tau_a)]$ в формуле (10) допускают непрерывное продолжение в $\mathbb{T}_\pm$, соответственно. Средний множитель аналитичен всюду в расширенной комплексной плоскости за исключением 0 и ∞, которые являются существенно особыми точками. Если средний множитель соединить с правым получится функционально-теоретическая факторизация матрицы-функции ω_a .

Записанная в такой форме формула (10) является точным аналогом формул, полученных в работах [8], [12], [13].

Замечание 3. Пусть $a \in GW^n(f)$. Вообще говоря, формула (10) не является факторизацией Винера-Хопфа матрицы-функции ω_a по двум причинам: 1) правый и левый крайние множители в (10) не обязаны принадлежать $W_\pm^{n\times n}$, 2) сингулярное поведение среднего множителя в точках 0 и ∞.

Следствие 5. *Пусть $a \in GW^n(f)$. Если $\tau_a \in W^n(f)$ и $\pi_0\tau_a \equiv 0$, то формула (10) представляет факторизацию Винера-Хопфа матрицы-функции ω_a.*

Наша дальнейшая цель - описание процедуры преобразования представления (10) в факторизацию ω_a в пространстве W, в случае $a \in W^n(f)$.

§3. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ $\tau_a \in W^n(f)$

Рассмотрим множество $W_{z_0}^n = \{a \in W^n(f) : a(-z_0) = e\}$. Очевидно, что $W_{z_0}^n$ является подалгеброй $W^n(f)$ и для $a \in W_{z_0}^n$ функции λ_k^a, $k = 0, 1, ..., n-1$ являются непрерывными. Вектор $\operatorname{col}[\lambda_i^a]_{i=0}^{n-1} \in \mathbb{Z}^n$ для $a \in GW_{z_0}^n$ назовем λ-*индексом* и обозначим его через $\operatorname{ind}_\lambda a$. Из мультипликативности λ следует, что $\operatorname{ind}_\lambda ab = \operatorname{ind}_\lambda a + \operatorname{ind}_\lambda b$. В частности, множество

$$\mathring{W}_{z_0}^n = \{a \in GW_{z_0}^n : \quad \operatorname{ind}_\lambda a = 0\}$$

является подгруппой $GW_{z_0}^n$. Множество рациональных матриц-функций из $W_{z_0}^n$ и $\mathring{W}_{z_0}^n$ будем обозначать через $\mathcal{R}W_{z_0}^n$ и $\mathcal{R}\mathring{W}_{z_0}^n$, соответственно.

Теорема 2. *Пусть $a \in \mathring{W}_{z_0}^n$. Тогда $\tau_a \in W^n(f)$.*

Доказательство. Пусть $a = \operatorname{col}[a_i]_{i=0}^{n-1} \in \mathring{W}_{z_0}^n$. Поскольку $a_i(-z_0) = 0$, $i = 1, 2, ..., n-1$, то из формул (5) и (6) следует, что τ_i^c, $i = 0, 1, ..., n-1$ непрерывна на $\mathbb{T}$. В силу теоремы Винера (см. [24]) достаточно доказать, что для каждой точки $z \in \mathbb{T}$ существуют некоторая окрестность и функция из W, совпадающая с τ_i^c в этой окрестности.

В силу теоремы Винера-Литкина (см. [24]), существует $v_\delta \in W$, принимающая значения в сегменте $[0, 1]$, равное нулю в $U_\delta = \{z \in \mathbb{T} : |z + z_0| \le \delta\}$ и равное единице вне $U_{2\delta} = \{z \in \mathbb{T} : |z + z_0| \le 2\delta\}$ такое, что a_k является пределом функций $b_{k,\delta} = a_k v_\delta$, $k = 1, 2, ..., n-1$. Положим $b_\delta = \operatorname{col}[b_{k,\delta}]_{k=0}^{n-1}$, где

$b_{0,\delta} = 1 + v_\delta(a_0 - 1)$. Для малых $\delta > 0$ $\mathrm{ind}_\lambda b_\delta = 0$, т.е. $b_\delta \in \overset{\circ}{W}{}^n_{z_0}$. Поскольку очевидно, что $v_\delta f^{k/n} \in W$, то $b_{k,\delta} f^{k/n} = a_k v_\delta f^{k/n} \in W$ т.е. $\lambda_k^{b_\delta} \in W$. В силу теоремы Винера–Леви $\ln \lambda_k^{b_\delta} \in W$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Учитывая, что $\ln \lambda_k^{b_\delta} \equiv 0$. на U_δ из равенства (9) получаем, что $\tau_k^{b_\delta} \in W$. Так как $\tau_c = \tau_{b_\delta}$ на $\mathbb{T} \setminus U_{2\delta}$, то τ_k^a, $k = 0, 1, \dots, n-1$ локально принадлежат W для всех $z \in \mathbb{T} \setminus \{-z_0\}$.

Исследуем теперь функции τ_k^a, $k = 0, 1, \dots, n-1$ в окрестности точки $\{-z_0\}$. Пусть

$$c_0 = (1 - v_\delta)(a_0 - 1), \quad c_k = (1 - v_\delta) a_k,$$

$$c = \operatorname{col}[c_0 + 1, c_1, \dots, c_{n-1}], \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Очевидно, что c совпадает с a на U_δ и если δ достаточно мало, то условие $|\lambda_k^c - 1| < 1$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ будет выполнено всюду на $\mathbb{T}$.

Пусть $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ – мультииндекс

$$|\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}, \quad \beta_\alpha = \sum m\alpha_m, \quad \gamma_{\alpha,k} = \frac{1}{n}(\beta_\alpha - k),$$

$$N_+ = \{i \in \mathbb{Z};\ i \geq 0\},\ k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Тогда

$$\ln \lambda_s^c = \ln(1 + \sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon^{ms} c_m f^{m/n}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \left(\sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon^{ms} c_m f^{m/n} \right)^l =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=l} \frac{(-1)^{l-1}(l-1)!}{\alpha_0! \alpha_1! \cdots \alpha_{n-1}!} c_0^{\alpha_0} c_1^{\alpha_1} \cdots c_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \varepsilon^{s\beta_\alpha} f^{\beta_\alpha/n}.$$

Учитывая, что

$$1/n \sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon^{sm} = \begin{cases} 1, & \text{при } m \equiv 0 \pmod{n}, \\ 0, & \text{при } m \not\equiv 0 \pmod{n}, \end{cases}$$

из равенства (9) получим

$$\tau_k^c = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=l} \frac{(-1)^{l-1}(l-1)!}{\alpha_0! \alpha_1! \cdots \alpha_{n-1}!} c_0^{\alpha_0} c_1^{\alpha_1} \cdots c_{n-1}^{\alpha_{n-1}} f^{\gamma_{\alpha,k}} \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon^{s(\beta_\alpha - k)} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=l,\ \gamma_{\alpha,k} \in N_+} \frac{(-1)^{l-1}(l-1)!}{\alpha_0! \alpha_1! \cdots \alpha_{n-1}!} c_0^{\alpha_0} c_1^{\alpha_1} \cdots c_{n-1}^{\alpha_{n-1}} f^{\gamma_{\alpha,k}}.$$

Последнее равенство означает, что $\tau_k^c \in W$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ и поскольку $\tau_c = \tau_a$ на U_δ, то Теорема 2 доказана.

§4. КОНСТРУКЦИЯ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ λ-ИНДЕКСОМ

Пусть $f^{1/n}(z_0) = Me^{i\beta}$ и

$$g_m(\theta) = e^{-i\theta} e^{\frac{im}{2}(\theta-\theta_o)} f^{1/n}(e^{i\theta}), \quad |\theta - \theta_o| \le \pi, \quad m = 1, 2, \dots$$

Легко видеть, что

$$(\operatorname{Im} g_m)'|_{\theta=\theta_o} = \frac{m-1}{2} M + (\operatorname{Im} g_1)'\Big|_{\theta=\theta_0}.$$

Следовательно, $(\operatorname{Im} g_k)'|_{\theta=\theta_o} > 0$ при некотором $m = k$.

Введем $u(z) = -\gamma e^{-i(k\theta_o+\beta)}(z + z_0)^k$, $(\gamma > 0)$ и $p_k = \mathrm{col}\,[1, \varepsilon^{-k}u, 0, \dots, 0]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Учитывая, что

$$z + z_0 = 2\cos\frac{\theta - \theta_o}{2} e^{i(\theta+\theta_o)/2},$$

получим

$$\lambda_m^{p_0}(e^{i\theta}) = 1 - 2^k \gamma \cos^k \frac{\theta - \theta_o}{2} \varepsilon^m g_k(\theta), \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Заметим, что

$$\operatorname{Im} \lambda_m^{p_0}(e^{i\theta_o}) = -2^k \gamma M \sin\frac{2m\pi}{n}, \quad m = 0, 1, \dots, n-1$$

и

$$(\operatorname{Im} \lambda_0^{p_0})'|_{\theta=\theta_o} = -2^k \gamma (\operatorname{Im} g_k)'\Big|_{\theta=\theta_o} < 0.$$

Следовательно, существует некоторое $\sigma > 0$ такое, что

$$\operatorname{Im} \lambda_m^{p_0}(e^{i\theta}) \ne 0, \quad m = 1, 2, \dots, n-1, \quad \text{при } |\theta - \theta_o| < \sigma,$$

$$\operatorname{Im} \lambda_0^{p_0}(e^{i\theta}) < 0, \quad \text{при } \theta_o < \theta < \theta_o + \sigma$$

и

$$\operatorname{Im} \lambda_0^{p_0}(e^{i\theta}) > 0, \quad \text{при } \theta_o - \sigma < \theta < \theta_o.$$

Лемма 3. *Пусть* $\delta = \cos^k \sigma/2$, $\gamma \in \left(\frac{1}{2^k M}; \frac{1}{2^k M\delta}\right)$. *Тогда* $\mathrm{ind}_\lambda p_0 = \mathrm{col}\,[1, 0, \dots, 0]$.

Доказательство. При $|\theta - \theta_o| < \sigma$ имеем

$$\mathrm{Re}\,\lambda_m^{p_o}(e^{i\theta}) = 1 - 2^k\gamma\cos^k\frac{\theta-\theta_o}{2}\mathrm{Re}\,[\varepsilon^m g_k(\theta)] > 1 - 2^k\gamma M\delta > 0, \quad m = 0, 1, ..., n-1.$$

Откуда в частности следует, что множество $\{\theta;\ |\theta - \theta_o| \le \pi\ ;\ \mathrm{Re}\,\lambda_m^{p_o}(e^{i\theta}) \le 0\ ;$ $\mathrm{Im}\,\lambda_m^{p_o}(e^{i\theta}) = 0\}$ - пустое при $m > 0$ и совпадает с $\{\theta_o\}$ при $m = 0$. Учитывая поведение $\mathrm{Im}\,\lambda_0^{p_o}(e^{i\theta})$ в точке $\theta = \theta_o$, легко видеть, что $\mathrm{ind}\,\lambda_0^{p_o} = 1$ и $\mathrm{ind}\,\lambda_m^{p_o} = 0$, $m = 1, 2, ..., n-1$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть* $\gamma \in (\frac{1}{2^k M}; \frac{1}{2^k M\sigma})$, $\chi =$ $col\,[\chi_i]_{i=0}^{n-1} \in \mathbb{Z}^n$, $p = p_0^{\chi_0}p_1^{\chi_1}\cdots p_{n-1}^{\chi_{n-1}}$. *Тогда* $ind_\lambda p = \chi$.

Доказательство. Так как $\lambda_m^{p_s} = \lambda_{m-s}^{p_o}$, $s = 0, 1, ..., n-1$ при $s \le m$ и $\lambda_m^{p_s} = \lambda_{n+m-s}^{p_o}$, $s = 1, 2, ..., n-1$ при $s > m$, то

$$\mathrm{ind}_\lambda p_s = \mathrm{col}\,\{\underbrace{0, \ldots, 0}_{s\ \text{раз}}, 1, 0, ..., 0\}, \quad s = 0, 1, ..., n-1,$$

откуда в силу мультипликативности λ получим

$$\mathrm{ind}\,\lambda_s^p = \mathrm{ind}\,[(\lambda_s^{p_o})^{\chi_0}\cdots(\lambda_s^{p_{n-1}})^{\chi_{n-1}}] = \sum_{m=0}^{n-1}\chi_m\,\mathrm{ind}\,\lambda_s^{p_m} = \chi_s, \quad s = 0, 1, ..., n-1.$$

Теорема доказана.

Замечание 4. При условии $(\mathrm{Im}\,g_k)'|_{\theta=\theta_o} \neq 0$, целое число k в функции g можно выбрать равным 1 или 2. В случае $(\mathrm{Im}\,g_k)'|_{\theta=\theta_o} < 0$ получим, что $\mathrm{ind}\,\lambda_0^{p_o} = -1$. Приведенная выше конструкция универсальна для всех f. При конкретных f ее можно упростить.

Замечание 5. Результаты этого параграфа отвечают на вопрос, поставленный в параграфе 6 работы [14].

§5. ОДНО СВОЙСТВО $\mathcal{R}W_{x_0}^n$

В этом параграфе мы докажем, что в случае $m_+ - m_- > 1$ для любого $b \in$ $\in \pi_0(W^n(f))$ существует некоторое $q \in \mathcal{R}\dot{W}_{x_0}^n$ такое, что $\pi_0 r_q = b$. Пусть

$$\Delta = \{(k, j) \in \mathbb{Z}^2 :\ \ 1 \le k \le n-1, \quad m_- + 1 \le j \le m_+ - 1\},$$

$$b = \ \mathrm{col}\,[b_i]_{i=0}^{n-1} \in \pi_0(W^n(f)),$$

где

$$b_0 \equiv 0, \quad b_k = \sum_{s=m_-+1}^{m_+-1} b_s^{(k)} t^s, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Сопоставим каждому $b \in \pi_0(W^n(f))$ вектор $\sigma_1 b \in \mathbf{C}^l (l = (n-1)(m_+ - m_- - 1))$:

$$\sigma_1 b = \operatorname{col}\,[b_{m_-+1}^{(1)}, \dots, b_{m_+-1}^{(1)}, b_{m_-+1}^{(2)}, \dots, b_{m_+-1}^{(n-1)}].$$

Очевидно, что σ_1 является изоморфизмом линейных пространств $\pi_0(W^n(f))$, $\mathbf{C}^l$. Предположим, что в $\mathbf{C}^l$ задана обычная евклидова метрика :

$$\|\sigma_1 b\|_2 = \left(\sum_{(k,j)\in\Delta} |b_j^{(k)}|^2 \right)^{1/2}.$$

Положим

$$\rho' = \min[\|f\|_W, 1], \quad \rho = \max[\|f\|_W, 1], \quad d = \operatorname{col}[t + z_o, 0, \dots, 0] \in W^n(f),$$

$$U = \left\{ \alpha \in \mathbf{C}^l : \|\alpha\|_2 \le \frac{1}{2\sqrt{n}\rho} \right\}.$$

Пусть V обозначает множество $c + d\sigma_1^{-1}(U) \subset W_{z_0}^n$. Определим отображение $\sigma_2 : U \longmapsto V$, действующее следующим образом : $\sigma_2(\alpha) = c + d\sigma_1^{-1}(\alpha)$.

Лемма 4. *Отображения σ_1, σ_2 являются гомеоморфизмами, $\mathcal{R}\dot{V}_{z_0}^n$ содержит V.*

Доказательство. Пусть $b = \operatorname{col}\,[b_i]_{i=0}^{n-1}$. В силу неравенства Гельдера

$$\|b\|_{W^n} = \sum_{k=1}^{n-1} \|f\|_W^{k/n} \sum_{s=m_-+1}^{m_+-1} |b_s^{(k)}| \le \rho\sqrt{n}\|\sigma_1 b\|_2.$$

[Д]ругой стороны

$$\|\sigma_1 b\|_2 \le \sum_{(k,j)\in\Delta} |b_j^{(k)}| \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\rho'} \|f\|_W^{k/n} \sum_{s=m_-+1}^{m_+-1} |b_s^{(k)}| = \frac{1}{\rho'} \|b\|_{W^n},$$

и поэтому

$$\rho'\|\sigma_1 b\|_2 \le \|b\|_{W^n} \le \rho\sqrt{n}\|\sigma_1 b\|_2. \tag{11}$$

Следовательно, σ_1 является гомеоморфизмом.

Единичная сфера $\{b \in \pi_0(W^n(f)) : \|b\|_{W^n} = 1\}$ пространства π_0 компактна. Поэтому, непрерывная относительно b функция $\|db\|_{\hat{W}^n}$ принимает на ней свое минимальное значение $\nu > 0$. Учитывая (11), получим

$$\|db\|_{W^n} \ge \nu\|b\|_{W^n} \ge \nu\rho'\|\sigma_1 b\|_2, \quad b \in \pi_0(W^n(f)). \tag{12}$$

Принимая во внимание (11) и (12), имеем

$$\|\sigma_2(\alpha)-\sigma_2(\beta)\|_{W^n} = \|d(\sigma_1^{-1}(\alpha)-\sigma_1^{-1}(\beta))\|_{W^n} \le 2\|\sigma_1^{-1}(\alpha-\beta)\|_{W^n} \le 2\rho\sqrt{n}\|\alpha-\beta\|_2$$

и

$$\|\sigma_2(\alpha)-\sigma_2(\beta)\|_{W^n} = \|d\sigma_1^{-1}(\alpha-\beta)\|_{W^n} \ge \nu\rho'\|\alpha-\beta\|_2.$$

Эти неравенства доказывают, что σ_2 является гомеоморфизмом. Пусть

$$a = \operatorname{col}[a_i]_{i=0}^{n-1} \in V, \quad \alpha = \sigma_2^{-1}(a) = \operatorname{col}[\alpha_{m_-+1}^{(1)},\dots,\alpha_{m_+-1}^{(1)},\alpha_{m_-+1}^{(2)},\dots,\alpha_{m_+-1}^{(n-1)}],$$

$$b = \sigma_1^{-1}(\alpha) = \operatorname{col}[b_i]_{i=0}^{n-1}.$$

Ясно, что

$$a = e + db, \quad a_0 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 0, \quad a_s = (t+z_0)b_s,$$

$$b_s = \sum_{k=m_-+1}^{m_+-1} \alpha_k^{(s)} t^k, \quad s = 1,2,\dots,n-1.$$

Пользуясь (11) и тем, что $\alpha \in U$, получим

$$|\lambda_j^a - 1| = \left|\sum_{s=1}^{n-1} \varepsilon^{sj} a_s f^{s/n}\right| \le 2\sum_{s=1}^{n-1} |b_s|\cdot|f|^{s/n} < 2\rho\sqrt{n}\|\alpha\|_2 < 1.$$

Из этой оценки следует, что $\operatorname{ind}_\lambda a = 0$. Лемма 4 доказана.

Рассмотрим отображение $\Psi = \sigma_1\pi_0\tau\sigma_2$ $(\Psi : U \longmapsto \mathbf{C}^r)$

Лемма 5. *Комплексный якобиан $J\Psi$ отображения Ψ в точке $0 \in U$ равен z_0^l.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in U$, $\alpha = \operatorname{col}[\alpha_{m_-+1}^{(1)},\dots,\alpha_{m_+-1}^{(1)},\alpha_{m_-+1}^{(2)},\dots,\alpha_{m_+-1}^{(n-1)}]$, $a = \operatorname{col}[a_i]_{i=0}^{n-1} = \sigma_2(\alpha)$. Следовательно

$$a_0 \equiv 1, \quad a_s = (t+z_0)^s \sum_{k=m_-+1}^{m_+-1} \alpha_k^{(s)} t^k, \quad s = 1,2,\dots,n-1$$

и $\Psi = \operatorname{col}[\Psi_{m_-+1}^{(1)},\dots,\Psi_{m_+-1}^{(1)},\Psi_{m_-+1}^{(2)},\dots,\Psi_{m_+-1}^{(n-1)}]$, где

$$\Psi_k^{(s)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \tau_s^a(t) t^{-k-1}\,dt, \quad (s,k) \in \Delta.$$

Пусть δ_{ij} — символ Кронеккера. Пользуясь тем, что

$$\frac{\partial a_s}{\partial \alpha_j^{(k)}} = (t+z_0)t^j\delta_{sk}, \quad s,k = 1,2,\dots,n-1; \qquad \lambda_k^a\big|_{\alpha=0} = 1, \quad k = 0,1,\dots,n-1$$

и $|k-s|<n-1$, получим

$$\left.\frac{\partial\tau_k^a}{\partial\alpha_j^{(s)}}\right|_{\alpha=0}=\frac{1}{n}f^{-k/n}\left.\left(\sum_{p=0}^{n-1}\varepsilon^{-pk}\frac{1}{\lambda_p^a}\frac{\partial}{\partial\alpha_j^{(s)}}\lambda_p^a\right)\right|_{\alpha=0}=$$

$$=\frac{1}{n}f^{\frac{s-k}{n}}(t+z_0)t^j\sum_{p=0}^{n-1}\varepsilon^{p(s-k)}=(t+z_0)t^j\delta_{ks}.$$

Следовательно

$$\left.\frac{\partial\Psi_i^{(k)}}{\partial\alpha_j^{(s)}}\right|_{\alpha=0}=\frac{\delta_{ks}}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}(t+z_0)t^{j-i-1}\,dt=\delta_{ks}(z_0\delta_{ij}+\delta_{i,j+1}).$$

Лемма 5 доказана.

Теорема 4.

$$\pi_0\tau(\mathcal{R}\mathring{W}_{z_0}^n)=\pi_0(W^n(f)).$$

Доказательство. Из теоремы об обратном отображении и Леммы 5 следует, что $\Psi(U)$ содержит открытую окрестность точки $0\in\mathbb{C}^l$. Так как в силу Леммы 4, σ_1,σ_2 являются гомеоморфизмами, а $\pi_0\tau=\sigma_1^{-1}\Psi\sigma_2^{-1}$, то существует открытая окрестность нуля $B\subset\pi_0(W^n(f))$ такая, что $B\subset\pi_0\tau(V)$. Пусть $m\in N$ и $V^m=\{a^m : a\in V\}$. Тогда, поскольку $\pi_0\tau(a^m)=m\pi_0\tau(a)$ и согласно Лемме 4 $V^m\subset\mathcal{R}\mathring{W}_{z_0}^n$, то

$$\pi_0(W^n(f))=\bigcup_{m\in N}mB\subset\pi_0\tau(\mathcal{R}\mathring{W}_{z_0}^n).$$

Замечание 6. Теорема 4 означает, что для любого $b\in\pi_0(W^n(f))$, $\sigma_1 b=\mathrm{col}\,[b_{m_-+1}^{(1)},\dots,b_{m_+-1}^{(1)},b_{m_-+1}^{(2)},\dots,b_{m_+-1}^{(n-1)}]$ существуют $m\in N$ и $q=\mathrm{col}\,[q_i]_{i=0}^{n-1}\in\mathcal{R}\mathring{W}_{z_0}^n$,

$$q_0\equiv 1,\quad q_k=(t+z_0)\sum_{j=m_-+1}^{m_+-1}q_j^{(k)}t^j,$$

$$\hat{q}=\mathrm{col}\,[q_{m_-+1}^{(1)},\dots,q_{m_+-1}^{(1)},q_{m_-+1}^{(2)},\dots,q_{m_+-1}^{(n-1)}]\in U$$

такие, что справедливо следующее равенство:

$$\frac{m}{2n\pi i}\int_{\mathbb{T}}f^{-k/n}t^{-j-1}\sum_{s=0}^{n-1}\varepsilon^{-sk}\ln\left(1+\sum_{p=1}^{n-1}\varepsilon^{ps}q_pf^{p/n}\right)dt=b_j^k,\quad (k,j)\in\Delta. \tag{13}$$

Как при доказательстве Теоремы 2, в силу условия $\hat{q}\in U$, левую часть уравнения (13) можно разложить в ряд от неизвестных $q_j^{(k)}$, $(k,j)\in\Delta$.

Замечание 7. Идея построения рациональных q такого типа принадлежит Данилю. Им же несколько в иной ситуации было доказано существование таких q при $n = 2$, см. [9].

§6. МЕРОМОРФНАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ

В этом параграфе мы построим мероморфную факторизацию матрицы-функции ω_a в случае, когда $a \in \exp \pi_0(W^n(f))$, а функция f удовлетворяет одному из следующих трех условий :

$$m_1 - m_2 = 0; \tag{14.1}$$

$$m_1 - m_2 = 1, \quad m_1 \equiv 0 \pmod n \text{ либо } m_1 \equiv 1 \pmod n; \tag{14.2}$$

$$m_1 - m_2 = 2, \quad n = 2, \quad m_1 \text{ -- четное }. \tag{14.3}$$

Пусть $\Delta_+ = \{(k,j) \in \Delta : km_2 + jn \geq 0\}$, $\Delta_- = \{(k,j) \in \Delta : km_1 + jn \leq 0\}$, $\Delta_0 = \Delta \setminus (\Delta_+ \cup \Delta_-)$.

Лемма 6. *Для того, чтобы множество Δ_0 было пустым, необходимо и достаточно, чтобы имело место одно из условий (14).*

Доказательство. Пусть $\tilde q = \mathbb{Z} \cap (-km_1/n; -km_2/n)$, $\Delta_k = \{(k,j) \in \mathbb{Z}^2 : j \in \tilde q\}$, $k = 1,2,...,n-1$. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что $\Delta_0 = \cup_{k=1}^{n-1} \Delta_k$ и поэтому $\Delta_0 = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\cup_{k=1}^{n-1} \tilde q = \emptyset$. Если $m_1 - m_2 = 0$, то очевидно $\tilde q = \emptyset$, $k = 1,2,...,n-1$. Пусть $m_1 - m_2 = 1$ и $m_1 \equiv p \pmod n$, где $p = 0,1,...,n-1$. Тогда $m_1 = nl + p$ $(l \geq 0, l \in \mathbb{Z})$ и при $p \geq 2$

$$\tilde\Delta_{n-1} = \mathbb{Z} \cap \left(-m_1 + l + \frac{p}{n}; -m_1 + l + 1 + \frac{p-1}{n}\right) = \{-m_1 + l + 1\} \neq \emptyset$$

В случае $p = 1$ имеем $\tilde q = \mathbb{Z} \cap (-kl - k/n; -kl) = \emptyset$, $k = 1,2,...,n-1$. Аналогично, при $p = 0$, $\tilde q = \mathbb{Z} \cap (-kl; -kl + k/n) = \emptyset$, $k = 1,2,...,n-1$. Пусть теперь либо $m_1 - m_2 > 2$, либо $m_1 - m_2 = 2$, но $n > 2$. Тогда $\frac{n-1}{n}(m_1 - m_2) > 1$ и очевидно $\tilde\Delta_{n-1} \neq \emptyset$.

Осталось рассмотреть случай, когда $n = 2$ и $m_1 - m_2 = 2$. Имеем $\Delta_0 = \Delta_1$ и поэтому $\Delta_0 = \emptyset$ тогда и только тогда, когда

$$\tilde\Delta_1 = \mathbb{Z} \cap \left(-\frac{m_1}{2}; -\frac{m_1}{2} + 1\right) = \emptyset.$$

Но это возможно лишь при четных m_1. Лемма доказана.

Пусть $b = \operatorname{col}[b_i]_{i=0}^{n-1} \in \pi_0(W^n(f))$ с $b_0 \equiv 0$ и

$$b_k = \sum_{j=m_-+1}^{m_+-1} b_j^{(k)} t^j, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

Обозначим через $e_j^{(k)}(b)$ $((k,j) \in \Delta)$ вектор $\operatorname{col}[0, \dots, 0, b_j^{(k)} t^j, 0, \dots, 0]$.

Лемма 7. *Пусть $b \in \pi_0(W^n(f))$ и $(k,j) \in \Delta_+$ $((k,j) \in \Delta_-)$. Тогда*

$$\exp e_j^{(k)}(b) \in (M_+)^n \quad \left(\exp e_j^{(k)}(b) \in (M_-)^n\right).$$

Доказательство. Пусть $\exp e_j^{(k)}(b) = \operatorname{col}[c_i]_{i=0}^{n-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} c_s &= \frac{1}{n} f^{-s/n} \sum_{p=0}^{n-1} \varepsilon^{-ps} \exp \lambda_p^{e_j^{(k)}(b)} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{jm}}{m!} \left(b_j^{(k)}\right)^m f^{(km-s)/n} \sum_{p=0}^{n-1} \varepsilon^{p(mk-s)}, \quad s = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{15}$$

Пусть $n = n_1 d$, $k = k_1 d$, где d – наибольший общий делитель чисел n и k. Очевидно, что если $s \neq s_1 d$, $s_1 \in \mathbb{Z}$, то

$$\sum_{p=0}^{n-1} \varepsilon^{p(mk-s)} = 0.$$

Следовательно, в силу (15) для таких s имеем $c_s \equiv 0$. В случае $s = s_1 d$, через l_0 обозначим наименьшее целое неотрицательное значение l, для которого число $(s_1 + n_1 l)/k_1$ – целое, а через σ_0 обозначим $(s_1 + n_1 l_0)/k_1$. Легко видеть, что для $s = s_1 d$

$$\frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \varepsilon^{p(mk-s)} = \begin{cases} 1, & \text{при } m \equiv \sigma_0 \pmod{n_1} \\ 0, & \text{при остальных значениях } m. \end{cases}$$

Из (15) получим

$$c_s = \left(b_j^{(k)}\right)^{\sigma_0} t^{j\sigma_0} f^{l_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(\sigma_0 + nl/d)!} \left(b_j^{(k)}\right)^{nl/d} (t^{jn} f^k)^{l/d}.$$

Остается заметить, что $t^{jn} f^k \in W_+$ $(\in W_-)$ при $(k,j) \in \Delta_+$ $(\in \Delta_-)$. Лемма доказана.

Теорема 5. *Предположим, что f удовлетворяет одному из условий (14) и*

$$b \in \pi_0(W^n(f)), \quad b_\pm = \sum_{(k,j) \in \Delta_\pm} e_j^{(k)}(b).$$

Тогда представление

$$\exp\omega_b = \exp\omega_{b_+}\exp\omega_{b_-} \tag{16}$$

является мероморфной факторизацией $\exp\omega_b$.

Доказательство. Из Леммы 6 следует, что $\Delta_0 = \emptyset$. Следовательно

$$b = \sum_{(k,j)\in\Delta_+} e_j^{(k)}(b) + \sum_{(k,j)\in\Delta_-} e_j^{(k)}(b),$$

откуда следует (16). Поскольку

$$\exp(b_\pm) = \prod_{(k,j)\in\Delta_\pm} \exp e_j^{(k)}(b), \qquad \exp(-b_\pm) = \prod_{(k,j)\in\Delta_\pm} \exp e_j^{(k)}(-b),$$

то согласно Лемме 7 $\exp(b_\pm), \exp(-b_\pm) \in (M_\pm)^n$. Теорема доказана.

Замечание 8. Если выполняется одно из условий (14), то $m_+m_- = 0$.

§7. ФАКТОРИЗАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ

Прежде, чем доказать основные результаты настоящей работы, введем следующее понятие. Пусть $a \in GW^n(f)$ и $\gamma = \operatorname{col}[\gamma_i]_{i=0}^{n-1}$ – некоторый логарифм $a^{-1}(-z_0)$ в алгебре $W^n(f(-z_0))$. Вектор-функцию $h = \exp\gamma \in W^n(f)$ (exp берется уже в алгебре $W^n(f)$) назовем *z_0-обратной* к a. Утверждение следующей леммы проверяется непосредственно.

Лемма 8. *Пусть $a \in GW^n(f)$, $h = \exp\gamma$ - z_0-обратная к a, $\gamma = \operatorname{col}[\gamma_i]_{i=0}^{n-1}$. Тогда $ah \in W^n_{z_0}$, $\pi_\pm(-\gamma) \in W^n_\pm$ и*

$$h^{-1} = \exp[\pi_+(-\gamma)]\exp[\pi_0(-\gamma)]\exp[\pi_-(-\gamma)]. \tag{17}$$

Более того, $h^{-1} = \exp[\pi_+(-\gamma)]$ для $m_+ = 0$, $h^{-1} = \exp[\pi_-(-\gamma)]$ при $m_- = 0$ $(m_+ \neq m_-)$ и $h^{-1} = \exp(-\gamma)\cdot \exp[\pi_0(\gamma_0 e - \gamma)]$ при $m_+m_- < 0$.

Теорема 6. *Пусть $m_+ - m_- \geq 2$, $a \in GW^n(f)$, $h = \exp\gamma$ является z_0-обратной к a, $\gamma = \operatorname{col}[\gamma_i]_{i=0}^{n-1}$ и вектор-функции $p \in \mathcal{R}W^n_{z_0}$, $q \in \mathcal{R}\overset{\circ}{W}{}^n_{z_0}$ удовлетворяют следующим условиям :*

$$ind_\lambda p = -\ ind_\lambda ah, \quad \pi_0\tau_q = -\pi_0(\tau_{ahp} - \gamma)$$

Если $\omega_{p^{-1}q^{-1}} = Q_+\Lambda Q_-$ - факторизация рациональной матрицы-функции $\omega_{p^{-1}q^{-1}}$ в пространстве W, то представление

$$\omega_a = \exp[\omega(\pi_+(\tau_{ahp} + \tau_q - \gamma))]Q_+\Lambda Q_- \exp[\omega(\pi_-(\tau_{ahp} + \tau_q - \gamma))] \tag{18}$$

является факторизацией матрицы-функции ω_a в пространстве W.

Доказательство. Представление (18) следует из равенства $a = h^{-1}p^{-1}q^{-1}aphq$, формулы (10), примененной к aph и q, соответственно, и (17). Из Леммы 8 следует, что $ah \in W^n_{z_0}$. Так как $\mathrm{ind}_\lambda ahp = 0$ (т.е. $aph \in \overset{\circ}{W}{}^n_{z_0}$), то в силу Теоремы 2, τ_{ahp} и τ_q принадлежат $W^n(f)$. Используя Лемму 8, получим

$$\exp[\pm\omega(\pi_+(\tau_{ahp} + \tau_q - \gamma))] \in W_+^{n\times n}, \quad \exp[\pm\omega(\pi_-(\tau_{ahp} + \tau_q - \gamma))] \in W_-^{n\times n}.$$

Теорема доказана.

При $m_+ - m_- \leq 1$ ситуация сильно упрощается. Учитывая, что $\pi_0(-\gamma) = 0$, аналогичными рассуждениями нетрудно убедиться, что справедлива

Теорема 7. *Пусть $m_+ - m_- \leq 1$, $a \in GW^n(f)$, $h = \exp\gamma$ - z_0-обратная к a, $p \in \mathcal{R}W^n_{z_0}$ и $\mathrm{ind}_\lambda p = -\mathrm{ind}_\lambda ah$. Если $\omega_{p^{-1}} = K_+\Lambda K_-$ — факторизация матрицы-функции $\omega_{p^{-1}}$ в пространстве W, то*

$$\omega_a = \exp[\omega(\pi_+(\tau_{ahp} - \gamma))]K_+\Lambda K_- \exp[\omega(\pi_-(\tau_{ahp} - \gamma))] \tag{19}$$

является факторизацией матрицы-функции ω_a в пространстве W.

Замечание 9. Как следует из Леммы 8 одна из вектор-функций $\pi_\pm(-\gamma)$ в равенствах (18), (19) равна нулю.

Замечание 10. Существование вектор-функций p и q с требуемыми свойствами обеспечивается Теоремами 3 и 4.

Таким образом, Теоремы 6 и 7 позволяют сводить факторизацию матрицы-функции ω_a к факторизации рациональной матрицы-функции. Но применение формулы (18) (в отличие от (19)) затруднено в связи с задачей построения вектор-функции q в явном виде. Результаты §6 позволяют в некоторых случаях избежать этого. Более точно, справедлива следующая

Теорема 8. *Предположим, что $m_+ - m_- \geq 2$, f удовлетворяет одному из условий (14), $a \in GW^n(f)$, $h = \exp\gamma$ - z_0-обратная к a, $p \in \mathcal{R}W^n_{z_0}$ и $\mathrm{ind}_\lambda p = -\mathrm{ind}_\lambda ah$. Тогда*

$$\omega_a = \exp[\omega(\pi_+(\tau_{ahp} - \gamma))]\omega_{p^{-1}}A_+A_- \exp[\omega(\pi_-(\tau_{ahp} - \gamma))], \tag{20}$$

где

$$A_{\pm} = \exp\left[\omega\left(\sum_{(k,j)\in\Delta_{\pm}} c_j^{(k)}(\pi_0 \tau_{ahp})\right)\right]$$

является мероморфной факторизацией матрицы-функции ω_a.

Доказательство. Из (10) следует, что

$$\omega_a = \omega_{h^{-1}}\omega_{p^{-1}} \exp[\omega(\pi_+ \tau_{ahp})] \exp[\omega(\pi_0 \tau_{ahp})] \exp[\omega(\pi_- \tau_{ahp})] \qquad (21)$$

Согласно Замечанию 8, одно из чисел m_+ и m_- равно нулю. Из Леммы 8 следует, что $\pi_0(-\gamma) \equiv 0$. Пользуясь равенством (17) и Теоремой 5, получим равенство (20). Принадлежность множителей правой части (20) к соответствующим классам, с учетом Теоремы 5, проверяется аналогично тому, как это было сделано при доказательстве Теоремы 6. Теорема 8 доказана.

ABSTRACT. In this paper the problem of the Wiener-Hopf factorization in the Wiener algebra of a class of matrix functions of f-circulant type is considered in the case f is trigonometric polynomial. It is proved, that the factorization of these matrix-functi ns is possible reduce to the factorization of rational matrix functions. For some f meromorphic factorization is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Clancey, I. Gohberg, "Factorization of matrix functions and singular integral operators", Operator Theory : Advances and Appl., vol. 3, Birkhäuser, Basel, 1981.
2. G. S. Litvinchuk, I. M. Spitkovski, Factorization of Matrix Functions, Akademie-Verlag, Berlin, 1987.
3. Н. Н. Векуа, Системы Сингулярных Интегральных Уравнений, М., Наука, 1970.
4. H. Bart, I. Gohberg, M. A. Kaashoek "Minimal factorizations of matrix and operator functions", Operator Theory : Advances and Appl., vol. 1, Birkhäuser, Basel, 1979.
5. H. Bart, I. Gohberg, M. A. Kaashoek "Explicit Wiener-Hopf factorization and realization", Operator Theory : Advances and Appl., vol. 21, Birkhäuser, Basel, 1986.
6. I. Gohberg, L. Lerer, L. Rodman, "Factorization indices for matrix polynomials", Bull. AMS, vol. 84, pp. 275 – 277, 1978.
7. J. A. Ball, K. F. Clancey, "An elementary description of partial indices of rational matrix functions", Integral Equations and Operator Theory, vol. 13, pp. 306 - -322, 1990.
8. А. А. Хрaпков, " Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил" Прикл. Мат. Мех., том 35, стр.. 677 – 689, 1971.
9. V. G. Daniele, "On the solution of two coupled Wiener-Hopf equations", SIAM J.

Appl. Math., vol. 44, pp. 667 – 679, 1984.
10. E. Meister, F.- O. Speck, "The explicit solution of elastodynamical diffraction problems by symbol factorization", Z. Anal. Anwendungen, vol. 8, no. 4, pp. 307 – 328.
11. A. F. des Santos. A. B. Lebre, F. S. Teixeire, "The diffraction problem for a half plane with different face impedances revisited", J. Math. Anal. and Appl. vol. 140, no. 2, pp. 485 – 509, 1989.
12. V. G. Daniele, "On the factorization of Wiener–Hopf matrices in problems solvable with Hurd's method", IEEE Trans. Autennes Propag., vol. AP-26, pp. 614 – 616, 1978.
13. D. S. Jones, "Commutative Wiener–Hopf factorization of a matrix", Proc. Roy. Soc., London, Ser. A393, pp. 185 – 192, 1984.
14. S. Prössdorf, F.- O. Speck, "A factorization procedure for two by two matrix functions on th circle with two rationally independent entries", Proc. Roy. Soc., Edinburgh, vol. 115, pp. 119 – 138, 1990.
15. E. Meister, F.- O. Speck, "Wiener–Hopf factorization of certain non-rational matrix functions in mathematical physics", The Gohberg Anniversery Collection, vol. 11, pp. 385 – 394, Birkhäuser, Basel, 1989.
16. А. Г. Камалян, "Эффективная факторизация некоторых классов матриц-функций", ДАН Армении, том 93, no. 3, стр. 99 – 104, 1992.
17. A. B. Lebre, "Factorization in the Wiener algebra of a class of 2 × 2 matrix functions", Integral Equations and Operator Theory, vol. 12, pp 408 – 423, 1989.
18. И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, "Об индексах кра ных расширений матриц-функций", Изв. АХ Молд, ССР, том 8, стр.76 – 80, 1967.
19. A. B. Lebre, A. F. des Santos, "Gene alized factorization for a class of non-rational 2 × 2 matrix functions", Integral Equations and Operator Theory, vol. 13, no. 5, pp. 671 – 700, 1990.
20. Г. Н. Чеботарев, " К решению в замкнутой форме краевой задачи Римана для системы n пар функций", Уч. Зап. Казан. Унив., том. 116, no. 4, стр. 31- 58, 1956.
21. В. Н. Гавдзинский, И. М. Спитковский, " Об одном способе эффективного построения факторизации", Укр. мат. журн., том 34, no. 1, стр. 15 - 19, 1982.
22. В. Н. Гордиенко, " Факторизация матриц-функций частного вида", Укр. мат журн., том 23, no. 1, стр. 81 – 88, 1971.
23. Н. Г. Моисеев, "О факторизации матриц-функций специального вида", ДАН СССР, том 305, no. 1, стр. 44 – 47, 1989.
Ж. П. Кахан, Абсолютно Сходящиеся Ряды Фурье, М., Мир, 1976.

13 Апреля 1992

Институт математики
АН Армении