О ПРИБЛИЖЕНИИ СЛУЧАЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СРЕДНИХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ СРЕДНИМИ ЧАСТНЫХ СУММ ИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Н. А. Талалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика. том 28, No. 1, 1993

В статье доказаны теоремы о приближении интегральных средних периодическими функциями нескольких переменных интегральными средними частных сумм их рядов Фурье. Интегральные средние берутся по ячейкам случайного разбиения пространства.

§1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Обозначим через $\mathbb{R}^m$ – m-мерное вещественное евклидово пространство. Для $x, y \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, ..., x_m)$ и $y = (y_1, ..., y_m)$ положим

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_m + y_m), \quad xy = \sum_{j=1}^{m} x_j y_j. \tag{1}$$

Через $n = (n_1, n_2, ..., n_m)$ обозначим вектор с целочисленными координатами. Будем рассматривать m – кратную тригонометрическую систему

$$e^{inx} = e^{i(n_1x_1 + \cdots + n_mx_m)} = e^{in_1x_1} e^{in_2x_2} \cdots e^{in_mx_m}, \tag{2}$$

где $x \in T_m$, $T_m = [0, 2\pi] \times \cdots (m \text{ раз}) \times [0, 2\pi]$. Пусть $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$ – периодическая по каждой переменной функция, с периодом 2π, которая принимает действительные значения и интегрируема по Лебегу на T_m. Тогда

$$\sum_n c_n e^{inx} = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} c_{n_1n_2...n_m} e^{in_1x_1} e^{in_2x_2} \cdots e^{in_mx_m} \tag{3}$$

– ряд Фурье функции $f(x)$. Здесь

$$c_n = c_{n_1...n_m} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T_m} f(x) e^{-inx}\, dx =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(x_1, ..., x_m) e^{-in_1x_1} \cdots e^{-in_mx_m}\, dx_1 \cdots dx_m. \tag{4}$$

Через $S_N(t,x)$ обозначим кубические частные ряда Фурье функции $f(t+x)$, где $x \in T_m$, а $t \in T_m$ рассматривается как параметр. Через $S_N(x)$ обозначим кубические частные ряда Фурье функции $f(x)$. Тогда

$$S_N(t,x) = \sum_{|n|\le N} c_n e^{in(t+x)} = S_N(t+x) =$$
$$= \sum_{|n_1|\le N} \cdots \sum_{|n_m|\le N} c_{n_1\ldots n_m} e^{in_1t_1} \cdots e^{in_mt_m} e^{in_1x_1} \cdots e^{in_mx_m}. \tag{5}$$

Здесь и в дальнейшем запись $|n| \le N$ означает $|n_j| \le N$, $1 \le j \le m$. Равенства (5) верны, так как

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T_m} f(t+x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^m} e^{int} \int_{T_m} f(x)e^{-inx}\,dx = e^{int} c_n. \tag{6}$$

Для натурального числа k и вектора $\nu = (\nu_1, ..., \nu_m)$, где $1 \le \nu_j \le k$ - натуральные числа, $1 \le j \le m$, обозначим через Δ_k^ν m-мерный интервал

$$\Delta_k^\nu = \left[\frac{2\pi(\nu_1 - 1)}{k}, \frac{2\pi\nu_1}{k}\right) \times \cdots \times \left[\frac{2\pi(\nu_m - 1)}{k}, \frac{2\pi\nu_m}{k}\right). \tag{7}$$

Через $\Delta_k^\nu(t)$ обозначим интервал, полученный из интервала Δ_k^ν сдвигом по вектору $t = (t_1, ..., t_m)$;

$$\Delta_k^\nu(t) = \left[t_1 + \frac{2\pi(\nu_1 - 1)}{k}, t_1 + \frac{2\pi\nu_1}{k}\right) \times \cdots \times \left[t_m + \frac{2\pi(\nu_m - 1)}{k}, t_m + \frac{2\pi\nu_m}{k}\right). \tag{8}$$

Через $\mu(E)$ обозначается m-мерная мера Лебега множества $E \subset \mathbb{R}^m$. Для интервалов Δ_k^ν и $\Delta_k^\nu(t)$ имеем

$$\mu(\Delta_k^\nu) = \mu(\Delta_k^\nu(t)) = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^m. \tag{9}$$

Рассмотрим две функции, которые постоянны на интервалах Δ_k^ν. Они определяются как значения соответствующих интегральных средних :

$$\Phi_k(t,x) = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-m} \int_{\Delta_k^\nu} f(t+\varphi)\,d\varphi, \quad x \in \Delta_k^\nu, \tag{10}$$

$$\Psi_N(t,x) = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-m} \int_{\Delta_k^\nu} S_N(t+\varphi)\,d\varphi, \quad x \in \Delta_k^\nu. \tag{11}$$

Мы собираемся изучить величины

$$\max_{x\in T_m} |\Phi_k(t,x) - \Psi_N(t,x)|, \tag{12}$$

$$\int_{T_m} |\Phi_k(l,x) - \Psi_N(l,x)|^2\,dx \tag{13}$$

при значениях N, зависящих от k. Рассмотрим параметр сдвига l как случайную величину, имеющую однородное распределение на T_m, и нашей целью будет получение определенных вероятностных оценок для (12) и (13). Обозначим через $\mathbb{E}$ соответствующее математическое ожидание, т.е. интеграл по нормированной мере Лебега

$$P(dl) = \frac{1}{(2\pi)^m}\,dl$$

на T_m.

Обозначим

$$\varepsilon_N = \max_{1\le j\le m}\left(\max_{|n_j|>N} |c_n|\right) = \max_{1\le j\le m}\left(\max_{|n_j|>N} |c_{n_1\ldots n_j\ldots n_m}|\right). \tag{14}$$

В случае $N = k^{2m}$ и $N = k^{3m}$ мы докажем следующие две теоремы.

Теорема 1. *При* $k \geq 7$

$$\mathbb{E}\left(\int_{T_m} |\Phi_k(l,x) - \Psi_{k^{2m}}(l,x)|^2\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{T_m}\left(\int_{T_m} |\Phi_k(l,x) - \Psi_{k^{2m}}(l,x)|^2\,dx\right)dl \leq \frac{1}{2}m\left(\frac{16}{\pi}\right)^m \varepsilon^2_{k^{2m}}. \tag{15}$$

Теорема 2.

$$\begin{aligned} &P\left\{l \in T_m : \max_{x\in T_m} |\Phi_k(l,x) - \Psi_{k^{3m}}(l,x)| < \sqrt{\varepsilon_{k^{3m}}}\right\} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m}\mu\left\{l \in T_m : \max_{x\in T_m} |\Phi_k(l,x) - \Psi_{k^{3m}}(l,x)| < \sqrt{\varepsilon_{k^{3m}}}\right\} > \\ &> 1 - \frac{1}{2}m(8/9)^m \varepsilon_{k^{3m}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Из теории рядов Фурье известно, что ε_N стремится к нулю при $N \to \infty$. Поэтому из Теорем 1 и 2 следует, что величины (13) и (14) стремятся к нулю по вероятности относительно параметра l, при $k \to \infty$.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $B \subseteq (1, 2, \ldots, m)$, $B \neq \emptyset$. Если $B = \{j_1, j_2, \ldots, j_q\}$, $1 \leq q \leq m$, $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_q \leq m$, то через $Q(B)$ обозначим множество векторов n, удовлетворяющих условию

$$\begin{cases} n_j = 0 & \text{при } j \notin B, \\ n_j \neq 0 & \text{при } j \in B. \end{cases} \tag{17}$$

Пусть

$$\alpha_{n(B)}(\Delta_k^\nu) = \prod_{p=1}^{|B|} \left(e^{in_{j_p}k^{-1}\nu_{j_p}2\pi} - e^{in_{j_p}k^{-1}(\nu_{j_p}-1)2\pi} \right), \tag{18}$$

где $|B| = q$ - число элементов множества B.

Тогда имеем

$$\int_{\Delta_k^\nu} S_N(t,x)\,dx = c_0 \left(\frac{2\pi}{k}\right)^m +$$
$$+\sum_B \Big(\sum_{n\in Q(B), |n|\le N} c_n\alpha_{n(B)}(\Delta_k^\nu)e^{int} \prod_{p=1}^{|B|}(in_{j_p})^{-1} \Big) \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{m-|B|}, \tag{19}$$

$$\frac{1}{\mu(\Delta_k^\nu)} \int_{\Delta_k^\nu} S_N(t,x)\,dx = c_0+$$
$$+\sum_B \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-|B|} \sum_{n\in Q(B), |n|\le N} c_n\alpha_{n(B)}(\Delta_k^\nu)e^{int} \prod_{p=1}^{|B|}(in_{j_p})^{-1}, \tag{20}$$

где c_0 - значение коэффициента c_n, когда n - нулевой вектор. Здесь внешняя сумма $\sum_B$ распространяется на непустые множества $B \subseteq (1,2,...,m)$.

Лемма 2.1. *Пусть $f(x) = f(x_1,...,x_m)$ - интегрируемая на T_m и 2π-периодическая по каждой переменной функция. Тогда для каждого интервала Δ_k^ν, определенного равенством (7), имеем*

$$\frac{1}{\mu(\Delta_k^\nu)} \int_{\Delta_k^\nu} f(t+x)\,dx = \frac{1}{\mu(\Delta_k^\nu(t))} \int_{\Delta_k^\nu(t)} f(x)\,dx =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\mu(\Delta_k^\nu)} \int_{\Delta_k^\nu} S_N(t,x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\mu(\Delta_k^\nu(t))} \int_{\Delta_k^\nu(t)} S_N(x)\,dx. \tag{21}$$

Доказательство. Достаточно показать, что для любого m-мерного интервала $\Delta = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_m,b_m]$, $\Delta\subset T_m$ имеет место следующее равенство

$$\int_\Delta f(t+x)\,dx = \int_{\Delta(t)} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_\Delta S_N(t,x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_{\Delta(t)} S_N(x)\,dx, \tag{22}$$

где

$$\Delta(t) = [a_1+t_1, b_1+t_1]\times\cdots\times[a_m+t_m, b_m+t_m], \quad t=(t_1,\ldots,t_m). \tag{23}$$

Заметим, что если интегрируемая на T_m функция $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = \varphi(x_1,x_2,...,x_m) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\cdots\varphi_m(x_m),$$

где каждая функция φ_i интегрируема на $[0,2\pi]$ и имеет период 2π, то кубическая сумма $S_N(\varphi,x)$ ее ряда Фурье имеет вид

$$S_N(\varphi,x)=S_N(\varphi,x_1,\dots,x_m)=\prod_{i=1}^{m}S_N(\varphi_i,x_i), \tag{24}$$

где $S_N(\varphi_i,x_i)$ – частная сумма ряда Фурье функции $\varphi_i(x_i)$.

Положим

$$\varphi_i(x_i)=\begin{cases}1, & x\in[a_i,b_i],\\ 0, & x\in[0,2\pi)\setminus[a_i,b_i].\end{cases} \tag{25}$$

Тогда

$$\varphi(x)=\prod_{i=1}^{m}\varphi_i(x_i)=\begin{cases}1, & x\in\Delta,\\ 0, & x\in T_m\setminus\Delta.\end{cases} \tag{26}$$

Известно, что если $[\alpha,\beta]\subset[0,2\pi)$ и $\chi(u)$ - характеристическая функция интервала $[\alpha,\beta]$, то частные суммы ее ряда Фурье $S_N(\chi,u)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{N\to\infty}S_N(\chi,u)=\begin{cases}1, & u\in(\alpha,\beta),\\ \frac{1}{2}, & u=\alpha \text{ или } u=\beta,\\ 0, & u\in[0,2\pi)\setminus[\alpha,\beta];\end{cases} \tag{27}$$

$$|S_N(\chi,u)|\le M,\quad \forall\varphi\in[0,2\pi), \tag{28}$$

где M - абсолютная постоянная.

Поэтому согласно (24) – (26) при любом фиксированном t и для почти всех $x\in T_m$

$$\lim_{N\to\infty}f(t+x)S_N(\varphi,x)=f(t+x)\varphi(x), \tag{29}$$

$$|f(t+x)S_N(\varphi,x)|\le M^m|f(t+x)|. \tag{30}$$

Так как для фиксированного t функция $|f(t+x)|$ интегрируема, то согласно (29) и (30) можно перейти к пределу под знаком интеграла. Получим

$$\lim_{N\to\infty}\int_{T_m}f(t+x)S_N(\varphi,x)\,dx=\int_{T_m}f(t+x)\varphi(x)\,dx=\int_{\Delta}f(t+x)\,dx. \tag{31}$$

Пусть

$$a_n=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{T_m}\varphi(x)e^{inx}\,dx,\quad b_n=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{T_m}f(t+x)e^{-inx}\,dx, \tag{32}$$

тогда

$$\int_{T_m} S_N(\varphi,x)f(t+x)\,dx = \int_{T_m}\left(\sum_{|n|\le N} a_n e^{inx}\right) f(t+x)\,dx = \\ = \sum_{|n|\le N} a_n \int_{T_m} f(t+x)e^{inx}\,dx = (2\pi)^m \sum_{|n|\le N} a_n b_{-n}. \tag{33}$$

Аналогично

$$\int_{T_m} S_N(f(t+x),x)\varphi(x)\,dx = (2\pi)^m \sum_{|n|\le N} a_{-n} b_n. \tag{34}$$

Так как правые части равенств (33) и (34) действительные числа и a_n, a_{-n}; b_n, b_{-n} комплексно сопряжены, то получаем

$$\sum_{|n|\le N} a_n b_{-n} = \overline{\sum_{|n|\le N} a_n b_{-n}} = \sum_{|n|\le N} \overline{a_n}\,\overline{b_{-n}} = \sum_{|n|\le N} a_{-n} b_n. \tag{35}$$

Из (33) - (35) следует, что

$$\int_{T_m} S_N(\varphi,x)f(t+x)\,dx = \int_{T_m} S_N(f(t+x),x)\varphi(x)\,dx = \\ = \int_{T_m} S_N(t,x)\varphi(x)\,dx = \int_{\Delta} S_N(t,x)\,dx. \tag{36}$$

С другой стороны, согласно (31)

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\Delta} S_N(t,x)\,dx = \int_{\Delta} f(t+x)\,dx. \tag{37}$$

Так как $S_N(t,x) = S_N(t+x)$,то из (37) следуют равенства (22). Лемма 2.1 доказана.

Для натуральных чисел N, k и вектора $\nu = (\nu_1, ..., \nu_m)$, $1 \le \nu_j \le k$, положим

$$R_N(\Delta_k^\nu, t) = \frac{1}{\mu(\Delta_k^\nu)} \int_{\Delta_k^\nu} f(t+x)\,dx - \frac{1}{\mu(\Delta_k^\nu)} \int_{\Delta_k^\nu} S_N(t+x)\,dx. \tag{38}$$

Заметим, что согласно Лемме 2.1 и (20) имеем

$$\lim_{N\to\infty} \left(c_0 + \sum_B \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-|B|} \sum_{n\in Q(B),|n|\le N} c_n \alpha_{n(B)}(\Delta_k^\nu) e^{int} \prod_{p=1}^{|B|} (in_{j_p})^{-1}\right) = \\ = \frac{1}{\mu(\Delta_k^\nu)} \int_{\Delta_k^\nu} f(t+x)\,dx \tag{39}$$

для всех $t \in T_m$.

Нам понадобится также следующая

Лемма 2.2 *При фиксированных N и k, $k \geq 7$ и для любого интервала Δ_k^ν, $\nu = (\nu_1, ..., \nu_m)$, $1 \leq \nu_j \leq k$ имеет место следующее неравенство :*

$$\int_{T_m} |R_N(\Delta_k^\nu, t)|^2 \, dt \leq \frac{1}{2} m (16/\pi)^m k^{2m} \frac{\varepsilon_N^2}{N}. \tag{40}$$

Доказательство. Для $B = (j_1, ..., j_q)$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq m$, $q = |B|$ через $Q_N(B)$ обозначим

$$Q_N(B) = \{n = (n_1, ..., n_m) \in Q(B): \text{ хотя бы}$$
$$\text{для одного } p, \quad 1 \leq p \leq q, \quad |n_{j_p}| > N\}.$$

Из (39)следует, что в метрике $L^2(T_m)$ верно равенство

$$R_N(\Delta_k^\nu, t) = c_0 + \sum_B \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-|B|} \sum_{n \in Q(B)} c_n \alpha_{n(B)}(\Delta_k^\nu) e^{int} \prod_{p=1}^{|B|} (in_{j_p})^{-1} -$$
$$- \left(c_0 + \sum_B \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-|B|} \sum_{n \in Q(B), |n| \leq N} c_n \alpha_{n(B)}(\Delta_k^\nu) e^{int} \prod_{p=1}^{|B|} (in_{j_p})^{-1}\right) = \tag{41}$$
$$= \sum_B \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-|B|} \sum_{n \in Q_N(B)} c_n \alpha_{n(B)}(\Delta_k^\nu) e^{int} \prod_{p=1}^{|B|} (in_{j_p})^{-1}.$$

Тогда согласно (20), (38), (39), (41) и ограниченности $|\alpha_{n(B)}(\Delta_k^\nu)| \leq 2^{|B|}$, имеем

$$\int_{T_m} |R_N(\Delta_k^\nu, t)|^2 \, dt = \sum_B \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-2|B|} (2\pi)^m \sum_{n \in Q_N(B)} |c_n|^2 |\alpha_{n(B)}(\Delta_k^\nu)|^2 \prod_{p=1}^{|B|} n_{j_p}^{-2} \leq$$
$$\leq \sum_B \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-2|B|} (2\pi)^m 2^{2|B|} \sum_{n \in Q_N(B)} |c_n|^2 \prod_{p=1}^{|B|} n_{j_p}^{-2}. \tag{42}$$

Очевидно, что

$$\sum_{n \in Q_N(B)} |c_n|^2 \prod_{p=1}^{|B|} n_{j_p}^{-2} \leq \sum_{p=1}^{|B|} \left(\sum_{|n_{j_p}| > N} \sum_{l \neq p} \sum_{|n_{j_l}| \geq 1} \frac{|c'(n_{j_1}, ..., n_{j_{|B|}})|^2}{n_{j_p}^2} \prod_{s \neq l, s=1}^{|B|} n_{j_s}^{-2} \right), \tag{43}$$

где

$$c'(n_{j_1}, ..., n_{j_{|B|}}) = c_n \qquad \text{при } n_j = \begin{cases} 0, & \text{при } j \neq j_p, \\ n_{j_p}, \ |n_{j_p}| \geq 1, & \text{при } j = j_p. \end{cases} \tag{44}$$

Из (43), (44) и (14) следует

$$\sum_{n \in Q_N(B)} |c_n|^2 \prod_{p=1}^{|B|} n_{j_p}^{-2} \leq \frac{2\varepsilon_N^2}{N} |B| \sum_{|n_1|=1}^{\infty} \cdots \sum_{|n_{|B|-1}|=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{|B|-1} n_l^{-2} =$$
$$= \frac{2\varepsilon_N^2}{N} |B| \left(\sum_{|s|=1}^{\infty} \frac{1}{s^2}\right)^{|B|-1} \leq 2 \cdot 4^{|B|-1} |B| \frac{\varepsilon_N^2}{N}. \tag{45}$$

Так как $\left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-2|B|} < \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-2m}$ при $k \geq 7$ и количество множеств подмножества $B \subseteq (1, 2, \dots, m)$ не превосходит 2^m, то из (42), (45) получим

$$\int_{T_m} |R_N(\Delta_k^\nu, t)|^2 \, dt \leq \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-2m} (2\pi)^m 2^{2m} 2^m 2 \cdot 4^{m-1} m \frac{\varepsilon_N^2}{N}. \qquad (46)$$

Теперь формула (10) следует из (46) и Лемма 2.2 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Доказательство Теоремы 1. Пусть $C(m) = 1/2m(16/\pi)^m$. Согласно Лемме 2.2 и формулам (10), (11), (38) имеем

$$\int_{T_m} \left(\int_{T_m} |\Phi_k(t, x) - \Psi_N(t, x)|^2 \, dx \right) dt =$$

$$= \int_{T_m} \left(\sum_{\nu=(\nu_1, \dots, \nu_m)} \int_{\Delta_k^\nu} |\Phi_k(t, x) - \Psi_N(t, x)|^2 \, dx \right) dt =$$

$$= \int_{T_m} \left(\sum_{\nu=(\nu_1, \dots, \nu_m)} \int_{\Delta_k^\nu} |R_N(\Delta_k^\nu, t)|^2 \, dx \right) dt =$$

$$= \left(\frac{2\pi}{k}\right)^m \sum_{\nu=(\nu_1, \dots, \nu_m)} \int_{T_m} |R_N(\Delta_k^\nu, t)|^2 \, dt \leq \left(\frac{2\pi}{k}\right)^m C(m) k^{2m} \frac{\varepsilon_N^2}{N} k^m. \qquad (47)$$

Здесь использован тот факт, что количество векторов $\nu = (\nu_1, \dots \nu_m)$, $1 \leq \nu_j \leq$ $\leq k$ равно k^m и что T_m - объединение попарно непересекающихся m-мерных сегментов Δ_k^ν при фиксированном k. Положим $N = k^{2m}$, тогда

$$\int_{T_m} \left(\int_{T_m} |\Phi_k(t, x) - \Psi_{k^{2m}}(t, x)|^2 \, dx \right) dt \leq (2\pi)^m C(m) \varepsilon_{k^{2m}}^2 \qquad (48)$$

или в терминах вероятности P на T_m, $dp = \frac{1}{(2\pi)^m} dt$ имеем

$$\mathbb{E} \left(\int_{T_m} |\Phi_k(t, x) - \Psi_{k^{2m}}(t, x)|^2 \, dx \right) \leq C(m) \varepsilon_{k^{2m}}^2. \qquad (49)$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2. Заметим, что согласно (38), (10) и (11)

$$\Phi_k(t, x) - \Psi_N(t, x) = R_N(\Delta_k^\nu, t), \quad x \in \Delta_k^\nu. \qquad (50)$$

Полагая в равенстве (50) $N = k^{3m}$, получим

$$|\Phi_k(t, x) - \Psi_{k^{3m}}(t, x)|^2 = |R_{k^{3m}}(\Delta_k^\nu, t)|^2, \quad x \in \Delta_k^\nu. \qquad (51)$$

Согласно Лемме 2.2, для $N = k^{3m}$ имеем

$$\int_{T_m} |R_{k^{3m}}(\Delta_k^\nu, t)|^2\, dt \le C(m)\frac{\varepsilon_{k^{3m}}^2}{k^m}. \tag{52}$$

Обозначим

$$E_k^\nu = \{t \in T_m : |R_{k^{3m}}(\Delta_k^\nu, t)|^2 > \varepsilon_{k^{3m}}\}. \tag{53}$$

Из (52) для всех $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$

$$\mu(E_k^\nu) \le C(m)\frac{\varepsilon_{k^{3m}}}{k^m}, \tag{54}$$

и поэтому

$$\mu\left(\bigcup_{\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_m)} E_k^\nu\right) \le \sum_{\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_m)} \mu(E_k^\nu) < C(m)\varepsilon_{k^{3m}}. \tag{55}$$

Если $x \in T_m$ и

$$t \in T_m \setminus \bigcup_\nu E_k^\nu, \tag{56}$$

то $x \in \Delta_k^\nu$ для некоторого ν и так как $t \notin E_k^\nu$, то имеем

$$|\Phi_k(t, x) - \Psi_{k^{3m}}(t, x)| \le \sqrt{\varepsilon_{k^{3m}}}. \tag{57}$$

Из (55) и (57) следует, что

$$\mu\{t \in T_m : \max|\Phi_k(t, x) - \Psi_{k^{3m}}(t, x)| < \sqrt{\varepsilon_{k^{3m}}}\} > (2\pi)^m - C(m)\varepsilon_{k^{3m}} \tag{58}$$

и следовательно

$$\begin{gathered} P\{t \in T_m : \max|\Phi_k(t, x) - \Psi_{k^{3m}}(t, x)| < \sqrt{\varepsilon_{k^{3m}}}\} > \\ > 1 - \frac{1}{(2\pi)^m} C(m)\varepsilon_{k^{3m}} > 1 - \frac{1}{2} m (8/9)^m \varepsilon_{k^{3m}}. \end{gathered} \tag{59}$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1 Для конкретных значений m постоянную $C(m) = 1/2m(16/\pi)^m$ в Теоремах 1 и 2 можно сделать меньше. Например, если $m = 1$, то эту постоянную можно заменить числом 2.

Замечание 2. Согласно Лемме 2.2, при подходящем выборе последовательности $\{N_k\}$, средние $\Psi_{N_k}(t, x)$ сходятся в L_p, $p \ge 1$-метрике к функции $f(t + x)$ для почти всех t.

Теперь возможно также оценить скорость приближения. Верна следующая

Теорема 3. *Пусть* $f(x) \in L^p(T_m)$, $1 < p < 2$, 2π- *периодична по каждой переменной* x_j, $1 \le j \le m$, *тогда для почти всех* $t \in T_m$ *существует натуральное число* $k(t)$ *такое, что при* $k > k(t)$

$$\left(\int_{T_m} |\Psi_{k^{2m+2}}(t,x) - f(t+x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le$$
$$\le c\varepsilon_{k^{2m+2}} + \left(\int_{T_m} |\Phi_k(t,x) - f(t+x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \tag{60}$$

где c - постоянная, зависящая от p и m

$$\Psi_{k^{2m+2}}(t,x) = \frac{1}{\mu(\Delta_k^\nu)}\int_{\Delta_k^\nu} S_{k^{2m+2}}(t+u)\,du, \quad x \in \Delta_k^\nu, \tag{61}$$

а $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ *- последовательность кубических частных сумм ряда Фурье функции* $f(x)$.

Доказательство. Из равенства (50) следует, что

$$\int_{T_m}\left(\int_{T_m} |\Phi_k(t,x) - \Psi_N(t,x)|^p\,dx\right)dt =$$
$$= \int_{T_m}\left(\sum_\nu \int_{\Delta_k^\nu} |\Phi_k(t,x) - \Psi_N(t,x)|^p\,dx\right)dt =$$
$$\int_{T_m}\left(\sum_\nu \mu(\Delta_k^\nu)|R_N(\Delta_k^\nu,t)|^p\right)dt = \tag{62}$$
$$= \left(\frac{2\pi}{k}\right)^m \sum_\nu \int_{T_m} |R_N(\Delta_k^\nu,t)|^p\,dt.$$

Применяя неравенство Гельдера для сопряженных чисел $p' = 2/p$, $q' = 2/(2-p)$, из неравенства (40) получим

$$\int_{T_m} |R_N(\Delta_k^\nu,t)|^p\,dt \le \left(\int_{T_m} |R_N(\Delta_k^\nu,t)|^2\,dt\right)^{p/2} ((2\pi)^m)^{\frac{2-p}{2}} \le ck^{mp}\frac{\varepsilon_N^p}{N^{p/2}}, \tag{63}$$

где постоянная c зависит от p и m.

Легко видеть , что неравенство (63) верно также при $p = 1$. Из (62) и (63) следует, что при $N = k^{2m+2}$, $k = 7, 8, \ldots$

$$\int_{T_m}\left(\int_{T_m} |\Phi_k(t,x) - \Psi_{k^{2m+2}}(t,x)|^p\,dx\right)dt \le c\left(\frac{2\pi}{k}\right)^m k^m k^{mp}\frac{\varepsilon_{k^{2m+2}}^p}{k^p k^{mp}} \le c'\frac{\varepsilon_{k^{2m+2}}^p}{k^p}. \tag{64}$$

Обозначим через E_k множество всех тех $t \in T_m$, для которых

$$\int_{T_m} |\Phi_k(t,x) - \Psi_{k^{2m+2}}(t,x)|^p\, dx > c' \varepsilon^p_{k^{2m+2}}. \tag{65}$$

Тогда согласно (64)

$$\mu(E_k) < k^{-p}. \tag{66}$$

Пусть

$$E = \bigcap_{l=7}^{\infty} \bigcup_{k=l}^{\infty} E_k. \tag{67}$$

Так как $p > 1$, то в силу (66), имеем

$$\mu(E) = 0. \tag{68}$$

Если $t \in T_m \setminus E$, то $t \notin E_k$, $k \geq l = l(t)$ и

$$\left(\int_{T_m} |\Phi_k(t,x) - \Psi_{k^{2m+2}}(t,x)|^p\, dx\right)^{1/p} \leq c'' \varepsilon_{k^{2m+2}}. \tag{69}$$

Следовательно

$$\begin{gathered}\left(\int_{T_m} |\Psi_{k^{2m+2}}(t,x) - f(t+x)|^p\, dx\right)^{1/p} \leq \\ \leq c'' \varepsilon_{k^{2m+2}} + \left(\int_{T_m} |\Phi_k(t,x) - f(t+x)|^p\, dx\right)^{1/p}.\end{gathered} \tag{70}$$

Теорема 3 доказана.

Рассматривая определенные на $T_m(t) = [t_1, t_1 + 2\pi) \times \cdots \times [t_m, t_m + 2\pi)$ функции

$$\Phi^*_k(u) = \frac{1}{\mu(\Delta^\nu_k(t))} \int_{\Delta^\nu_k(t)} f(v)\, dv, \quad u \in \Delta^\nu_k(t), \tag{71}$$

$$\Psi^*_{k^{2m+2}}(u) = \frac{1}{\mu(\Delta^\nu_k(t))} \int_{\Delta^\nu_k(t)} S_{k^{2m+2}}(v)\, dv, \quad u \in \Delta^\nu_k(t), \tag{72}$$

и заметив, что

$$\Psi_{k^{2m+2}}(t,x) = \Psi^*_{k^{2m+2}}(t+x), \quad \Phi_k(t,x) = \Phi^*_k(t+x), \quad x \in \Delta^\nu_k, \tag{73}$$

из (70) получаем, что для почти всех $t \in T_m$ выполняется неравенство

$$\left(\int_{T_m(t)} |f(u) - \Psi^*_{k^{2m+2}}(u)|^p\, du\right)^{1/p} \leq c'' \varepsilon_{k^{2m+2}} + \left(\int_{T_m(t)} |\Phi^*_k(u) - f(u)|^p\, du\right)^{1/p} \tag{74}$$

при всех k не превосходящих некоторого $k(t)$.

Второе слагаемое правой части неравенства (74) стремится к нулю при $k \to \infty$. Так как $\varepsilon_N \to 0$, то при $N \to \infty$ получаем

Следствие 1. *Пусть $f(x) \in L^p(T_m)$, $1 < p < 2$. Тогда почти для всех $t \in T_m$*

$$\lim_{k\to\infty} \left(\int_{T_m(t)} |f(u) - \Psi^*_{k^{2m+2}}(u)|^p \, du \right)^{1/p} = 0 \tag{75}$$

и для $k > k(t)$ выполняется неравенство (74).

Пусть $p = 1$ и $N_k = ([k^{2+\varepsilon}] + 1)k^{2m}$, где $\varepsilon > 0$ и $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. Тогда из неравенства (63) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{T_m} |R_{([k^{2+\varepsilon}]+1)k^{2m}}(\Delta^\nu_k, t)| \, dt &\le ck^m \varepsilon_{([k^{2+\varepsilon}]+1)k^{2m}}(([k^{2+\varepsilon}] + 1)k^{2m})^{-1/2} \le \\ &\le c\varepsilon_{([k^{2+\varepsilon}]+1)k^{2m}} k^{-1-\varepsilon/2}. \end{aligned} \tag{76}$$

Повторяя вышеприведенные рассуждения и применяя неравенство (76), получаем

Следствие 2. *Пусть $f(x) \in L^1(T_m)$ – функция 2π-периодическая по каждой переменной и $\varepsilon > 0$. Тогда для почти всех $t \in T_m$*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{T_m(t)} \left| f(u) - \Psi^*_{([k^{2+\varepsilon}]+1)k^{2m}}(u) \right| du = 0 \tag{77}$$

Более того, неравенство

$$\int_{T_m(t)} \left| f(u) - \Psi^*_{([k^{2+\varepsilon}]+1)k^{2m}}(u) \right| du \le c\varepsilon_{([k^{2+\varepsilon}]+1)k^{2m}} + \int_{T_m(t)} |f(u) - \Phi^*_k(u)| \, du \tag{78}$$

выполняется для всех $k \ge k(t)$, где c – абсолютная постоянная и

$$\Psi^*_{([k^{2+\varepsilon}]+1)k^{2m}}(u) = \frac{1}{\mu(\Delta^\nu_k(t))} \int_{\Delta^\nu_k(t)} S_{([k^{2+\varepsilon}]+1)k^{2m}}(v) \, dv, \quad u \in \Delta^\nu_k(t). \tag{79}$$

Замечание 3. Вышеприведенные результаты могут быть использованы при приближенном вычислении сумм рядов Фурье. Решения многих прикладных задач находятся в форме одномерных или кратных рядов Фурье, следовательно возникает задача приближенного вычисления сумм этих рядов. Если сумма ряда Фурье является разрывной или сильно колеблющейся функцией, то вместо вычисления значений функции в отдельных точках целесообразно вычислять значения интегральных средних этой функции на интервалах, полученных разбиением области определения на малые участки.

Известно, что даже в одномерном случае существуют ряды Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{80}$$

которые расходятся почти всюду на отрезке $[0, 2\pi)$, см. [1], стр. 391 и [2]. Поэтому вычисление значения суммы $f(x)$ в индивидуальной точке при помощи предела ее частных сумм вообще говоря невозможно.

С другой стороны, коэффициенты a_n, b_n ряда Фурье (80) могут стремиться к нулю сколь угодно медленно, см. [1], стр. 222. Поэтому затруднено вычисление интегральных средних функции $f(x)$, хотя как известно (см. Лемму 2.1), для любого интервала $[a, b] \subset [0, 2\pi)$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{b-a}\int_a^b S_N(x)\,dx = \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}(\sin nb - \sin na) + \frac{b_n}{n}(\cos na - \cos nb)\right) \end{aligned} \tag{81}$$

и ряд в правой части (81) сходится. При медленном стремлении к нулю коэффициентов a_n, b_n ряд из абсолютных значений коэффициентов ряда (81) не будет абсолютно сходиться. В этом случае невозможно оценить точность приближения частных сумм ряда к их пределу.

Согласно Теоремам 1 и 2, для любого ряда Фурье с заданными коэффициентами и при достаточно больших k с большей вероятностью и с большей точностью можно вычислить значение средних $\Phi_k^*(u)$ на торах $T_m(t)$, полученных случайными сдвигами по вектору $t = (t_1, \ldots, t_m)$ тора T_m. Согласно определениям $\Phi_k^*(u)$ и $\Delta_k^\nu(t)$ (см. (8) и (71)), достаточно вычислить величины

$$\frac{1}{\mu(\Delta_k^\nu(t))}\int_{\Delta_k^\nu(t)} S_N(v)\,dv \tag{82}$$

для $N = k^{2m}, k^{3m}$ и заданных значений $t \in T_m$. Здесь $S_{k^{2m}}(v)$ и $S_{k^{3m}}(v)$ являются m-мерными тригонометрическими полиномами степени k^{2m} и k^{3m}, соответственно, коэффициенты которых заданы.

Вычисление интегральных средних целесообразно также в том случае, когда ряды Фурье сходятся и можно не применять случайные сдвиги.

Пример. В качестве примера рассмотрим медленно сходящийся ряд

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, \tag{83}$$

являющийся рядом Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,\pi); \\ 1, & x \in [\pi, 2\pi). \end{cases} \tag{84}$$

В случае $k = 32$, используя компьютер IBM-80286 и язык PASCAL (см. Приложение 1) вычислены интегральные средние

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{32^2}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, \tag{85}$$

на интервалах

$$\Delta_j = \left[\frac{2\pi(j-1)}{32}, \frac{2\pi j}{32}\right).$$

Из приведенной ниже таблицы (Приложение 2) видно, что отклонение полученных чисел от интегральных средних $f(x)$ на некоторых интервалах достаточно мало.

На интервалах, "далеких" от точек разрыва, это отклонение имеет порядок 10^{-8}, а на "близких" к точкам разрыва – имеет порядок 10^{-3}. Последнее обстоятельство вызвано явлением Гиббса.

В заключение автор выражает благодарность Г.Г.Геворкяну за полезные дискуссии.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

```
Program fit ;
var F,r : double ;
    j,n : longint ;
    k,k2 : longint ;
    outf : text ;
begin
    Assign(outf,'fit.dat') ; rewrite(outf) ;
    write('k = ') ; readln(k) ;
    writeln(outf,' k =',k) ;
    writeln(outf,' j =',j) ;
    k2 := 1 shl (k - 1) ; j := 1 ;
repeat F := 0.0 ;
    for n := 1 to (1 shl (2*l)) do begin
```

```
      r := cos(((2*n - 1)*j/k2)*Pi);
      r := r - cos(((2*n - 1) * (j - 1)/k2)*Pi);
      F := F + r/sqr(2*n - 1); end;
      F := 0.5 + F*(k2 shl 1)/sqr(Pi);
      writeln(outf,j,' ',j*Pi/k2,' ',F);
      j := j + 1;
until j> 2*k2;
      close(outf);
end.
```

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

Table 1, $k = 32$

j	x	F
1	0.19634954084936	0.00079156195838
2	0.39269908169872	0.00000000734476
3	0.58904862254808	0.00000000136438
4	0.78539816339744	0.00000000048298
5	0.98174770424681	0.00000000023017
6	1.17809724509617	0.00000000013410
7	1.37444678594553	0.00000000009268
8	1.57079632679490	0.00000000007655
9	1.76714586764426	0.00000000007655
10	1.96349540849362	0.00000000009268
11	2.15984494934298	0.00000000013410
12	2.35619449019234	0.00000000023017
13	2.55254403104171	0.00000000048298
14	2.74889357189107	0.00000000136438
15	2.94524311274043	0.00000000734476
16	3.14159265358979	0.00079156195838
17	3.33794219443916	0.99920843804162
18	3.53429173528852	0.99999999265524
19	3.73064127613788	0.99999999863562
20	3.92699081698724	0.99999999951702
21	4.12334035783660	0.99999999976953
22	4.31968989868597	0.99999999986590
23	4.51603943953533	0.99999999990732
24	4.71238898038469	0.99999999992345
25	4.90873852123405	0.99999999992345
26	5.10508806208341	0.99999999990732
27	5.30143760293279	0.99999999986590
28	5.49778714378214	0.99999999976953
29	5.69413668463150	0.99999999951702
30	5.89048622548086	0.99999999863562
31	6.08683576633022	0.99999999265524
32	6.28318530717959	0.99920843804162

ABSTRACT The paper contains theorems on approximation of integral means of periodic function of several variables by integral means of partial sums of their Fourier series. The integral means are taken over cells in a random partition of space.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Москва, Наука, 1960.
2. A. N. Kolmogorov, "Une serie de Fourier-Lebesgue divergente presque partout", FM. vol. 4, pp. 324 – 328, 1923.

1 Декабря 1992

Ереванский государственный университет,
Институт прикладных проблем физики
НАН Армении