КРУГОВЫЕ ПАРАМЕТРЫ. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Б. Л. Голинский

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, No. 1, 1993

Пусть $\Phi_n(z) = z^n + \dots$, многочлены, определяемые по рекуррентной формуле $\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \overline{a}_n \Phi_n^*(z)$, $\Phi_0(z) = 1$, $\Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi}_n\left(\frac{1}{z}\right)$, где $\{a_n\}_0^\infty$ удовлетворяют условию $|a_n| < 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$ По известной теореме система $\{\Phi_n(z)\}$ ортогональна на единичной окружности $z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ относительно некоторого распределения $d\sigma(\theta)$, причем $\sigma(\theta)$ определяется по системе к.п. единственным образом, если $\sigma(\theta - 0) = \sigma(\theta)$. В работе рассмотрены определенные структуры убывания модулей к.п., при которых оказывается, что функция распределения $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна и плотность распределения $\sigma'(\theta) = \varphi(\theta)$ непрерывна или удовлетворяет условиям гладкости, выраженным определенным видом убывания модуля непрерывности $\omega(\delta, \varphi^{(m)})$, $m = 0, 1, \dots, p$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{a_n\}_0^\infty$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|a_n| < 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Мы рассмотрим следующие две системы многочленов :

$$\Phi_0(z) = 1, \quad \Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \overline{a}_n \Phi_n^*(z), \quad \Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi}_n\left(\frac{1}{z}\right), \tag{1_1}$$

и

$$\varphi_0(z) = \kappa_0 \Phi_0(z), \quad \varphi_n \Phi_n(z), \quad \kappa_n^2 = c_0^{-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - |a_k|^2\right)^{-1}, \tag{1_2}$$

$$\kappa_0 = \frac{1}{\sqrt{c_0}}, \quad a_n = -\frac{\overline{\varphi_{n+1}(0)}}{\kappa_{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Очевидно

$$\varphi_n(z) = \kappa_n z^n + \dots; \quad \varphi_n^*(z) = \overline{\varphi_n(0)} z^n + \dots + \kappa_n, \ \kappa_n > 0, \ n = 0, 1, 2, \dots$$

По теореме Фавара (см. [1], стр. 161 ; [2], стр. 44) первая из них ортогональная (ОМ), вторая - ортонормированная (ОНМ) на единичной окружности $\Gamma(: z = e^{i\theta},$

$0 \le \theta \le 2\pi$) относительно некоторого распределения $d\sigma(\theta)$, т.е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \varphi_{\sigma,n}(z)\overline{\varphi_{\sigma,m}(z)}\, d\sigma(\theta) = \delta_{nm}, \quad n,m = 0,1,2,..., \tag{2}$$

$$\varphi_n(z) \equiv \varphi_{\sigma,n}(z), \quad \kappa_n \equiv \kappa_{\sigma,n}, \quad c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma(t).$$

Числа $\{a_n\}_0^\infty$ называют круговыми параметрами (к.п.), функцию $\sigma(\theta)$ функцией распределения (ф.р.) : т.е. это - неубывающая ограниченная функция с бесчисленным множеством точек роста на интервале $[0,2\pi]$. Множество этих точек обозначим E_σ. Если считать $\sigma(\theta-0) = \sigma(\theta)$, то при условиях $\kappa_n > 0$, $n = 0,1,2,...$ и (2) ф.р. определяется однозначно по последовательности к.п. $\{a_n\}_0^\infty$. Соотношения (1_1) и (1_2) называют представлениями ОМ и ОНМ, соответственно. Почти всюду (п.в) существующую 2π-периодическую функцию $\sigma'(\theta) = \varphi(\theta)$ называют плотностью распределения (п.р.). Если $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна ($: \sigma(\theta) \in AC(0,2\pi)$), то (п.р.) называют весовой функцией (в.ф.). В этом случае через ОНМ обозначим $\{\varphi_n(e^{i\theta})\}_0^\infty$.

Функция Сеге $\mathcal{D}(z)$:

$$\mathcal{D}^{-1}(z) \equiv \pi(f_0; z) = \exp\left[-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\ln f_0(t)\,dt\right], \quad |z|<1$$

определяется для любой неотрицательной функции $f_0(t)$, суммируемой вместе со своим логарифмом.

Если $f_0(t) \equiv \varphi(t)$, то будем писать $\pi(\varphi,z) \equiv \pi_\sigma(z)$. Как известно, (см. [1], стр. 25) функция $\pi_\sigma(z)$ аналитична и отлична от нуля в единичном круге, (п.в.) в Γ существуют радиальные граничные значения

$$\pi_\sigma(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-0} \pi_\sigma(re^{i\theta}) = \frac{1}{\sqrt{\varphi(\theta)}}\exp\{i\gamma(\varphi;\theta)\},$$

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_{\sigma,n} \equiv \kappa = \pi_\sigma(0),$$

$$\gamma(\varphi;\theta) = \arg \pi_\sigma(e^{i\theta}) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cot\frac{t-\theta}{2}\ln\varphi(t)\,dt,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения Коши. Обозначим $\pi_0(\theta) = \pi(\varphi;\exp\{i\theta\})X_E(\theta)$, где $X_E(\theta)$ характеристическая функция множества $E_0 =$

$= \{\theta \in [0, 2\pi]: 0 < \sigma'(\theta) < \infty\} \subset E_\sigma$. Если для $\theta \in [0, 2\pi] \setminus E_0$ считать $\pi(\varphi; \exp\{i\theta\}) = 0$, то $|\pi(\varphi; \exp\{i\theta\})| = \{\varphi(\theta)\}^{-\frac{1}{2}}$ для всех $\theta \in [0, 2\pi]$.

Если в (1_1) $\{a_n\}_0^\infty$ заменить на $\{-a_n\}_0^\infty$, то получим многочлены $\{\Psi_n\}$, ортогональные на Γ относительно распределения $d\tau(\theta)$, где $\tau(\theta)$ аналогична $\sigma(\theta)$ и $\tau'(\theta) = \Psi(\theta)$. Основные свойства этих многочленов, называемых ОПМ второго рода, изложены в [3].

Обозначим через $\mathcal{E}_{\sigma,n}$ наилучшее приближение функции $\pi_0(\theta)$ многочленами $Q_n(z)$ степени $\leq n$ в пространстве $L^2_{d\sigma}(\Gamma)$:

$$f \in L^2_{d\sigma}(\Gamma): \ ||f||_{2,d\sigma} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma |f(z)|^2 \, d\sigma(\theta) \right\}^{1/2} < \infty, \ z = e^{i\theta}.$$

$E_{n,2}(g)$ обозначает наилучшее приближение комплекснозначной функции $g(\theta)$ тригонометрическими многочленами степени $\leq n$ в пространстве $L^2(0, 2\pi)$ и $E_n(h)$ обозначает наилучшее приближение непрерывной функции $h(\theta)$ тригонометрическими многочленами степени $\leq n$ в пространстве $C_{2\pi}$. Здесь $C_{2\pi}$ обозначает пространство 2π-периодических непрерывных функций, определенных на интервале $(-\infty, \infty)$.

Если $0 < m_0 \leq g(\theta) \leq M$ п.в. в $[0, 2\pi]$, $g(\theta)$ 2π-периодична и $\omega_2(\delta, g) = O(\delta^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$ (: $g(\theta) \in \mathrm{Lip}(\alpha, 2)$), где

$$\omega_2(\delta, g) = \sup_{|h| \leq \delta} ||g(\theta + h) - g(\theta)||_2, \ ||g||_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \, dt \right\}^{1/2} < \infty,$$

то будем это записывать так : $g(\theta) \in \mathcal{L}(m_0, M; \alpha, 2)$. Для $h \in C_{2\pi}$ определим

$$\omega(\delta, h) = \max ||h(\theta + \varepsilon) - h(\theta)||, \ ||h|| = \max |h(\theta)|, \ 0 < \theta \leq 2\pi$$

Если $\omega(\delta, h) = O(\delta^\alpha)$, то будем писать $h(\theta) \in \mathrm{Lip}\alpha$

Результаты, не принадлежащие автору, приведены здесь по следующим соображениям : 1) привести их полные доказательства (Лемма 2.1, [4]) ; Теорема 2.1, [5]) ; 2) привести новое доказательство Теоремы 1.1 из [6] ; 3) привести примеры и дополнения результатов указанных теорем.

Настоящая статья примыкает и дополняет работу автора [3].

§1. ХАРАКТЕР УБЫВАНИЯ КРУГОВЫХ ПАРАМЕТРОВ И ГЛАДКОСТНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Лемма 1.1. *Если $\sigma(\theta) \in AC(0, 2\pi)$ и $0 < m_0 < \varphi(\theta) \le M$ п. в. в $[0, 2\pi]$, то*

$$\sqrt{m_0}\, E_{n,2}(\pi_0) \le \delta_{\sigma,n} \le \sqrt{M}\, E_{n,2}(\pi_0),$$

где

$$\delta_{\sigma,n} = \min_{\{Q_n\}} \|(\pi_0 - Q_n)\|_{2,d\sigma} = \min_{\{Q_n\}} \|(\pi_0 - Q_n)\sqrt{\varphi}\|_2 \equiv \delta_n(\varphi).$$

Доказательство. Известно (см [1], стр. 26), что

$$\delta_{\sigma,n} = \frac{1}{\kappa}\left\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty} |\varphi_\nu(0)|^2\right\}^{1/2} = \left\| \left(\pi_0 - \frac{\kappa_n}{\kappa}\right)\sqrt{\varphi}\right\|_2 = \delta_n(\varphi) \le \sqrt{M}\, E_{n,2}(\pi_0).$$

С другой стороны

$$E_{n,2}(\pi_0) = \left\| \left(\pi_0 - \frac{\kappa_n}{\kappa}\varphi_n^*\right)\right\|_{2,d\sigma} \le \frac{1}{\sqrt{m_0}} \left\| \left(\pi_0 - \frac{\kappa_n}{\kappa}\varphi_n^*\right)\sqrt{\varphi}\right\|_2 = \frac{1}{\sqrt{m_0}}\delta_{\sigma,n}.$$

Теорема 1.1. *Предположим, что в. ф. $\varphi(\theta)$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$\varphi^{(m)} \in Lip(\alpha, 2) \quad 0 < m_0 \le \varphi(\theta) \le M \quad \text{п. в.} \quad \text{в} [0, 2\pi]. \tag{1.1}$$

где $0 < \alpha < 1$, m целое; для $m = 0$ считаем $\alpha > 1/2$. Тогда

$$\delta_{\sigma,n} = \frac{1}{\kappa}\left\{\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^2\right\}^{1/2} = O\left\{n^{-(m+\alpha)}\right\}.$$

Доказательство. Известно (см. [7], стр. 306), что

$$E_{n,2}(f) \le \frac{3}{n^m}\omega_2\left(\frac{1}{n}, f^{(m)}\right). \tag{1.2}$$

Из (1.2) при $f = \varphi$ и условия (1.1) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1} E_{n,2}(\varphi) < \infty.$$

Тогда (см. [7], стр.317) $\varphi(\theta)$ совпадает п.в. с функцией $\varphi_0(\theta)$, имеющей абсолютно непрерывную производную $\varphi_0^{(m-1)}(\theta)$ и $\varphi_0^{(m)}(\theta) \in L^2(0, 2\pi)$.

Мы используем следующий результат Конюшкова (см. [8], Теорема 11.1) : из условия

$$J(\gamma,\beta;p)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-\frac{\beta}{p'}}\,E^{\beta}_{n,p}<\infty,\ 1<p\le 2,\ \beta<p',\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1 \tag{1.3}$$

следует сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma}|c_n(f)|^{\beta}<\infty,\quad c_n(f)=\alpha_n(f)+i\beta_n(f), \tag{1.4}$$

где $\{c_n(f)\}_1^{\infty}$ – коэффициенты Фурье функции $f(\theta)$.

Полагая в (1.3) $p=2$, $\beta=1$ и применяя (1.2), получим

$$J(\gamma,1;2)\le C_1\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-(\frac{1}{2}+m+\alpha)}. \tag{1.3'}$$

1. Пусть $m=1$, $\gamma=\alpha$. Из (1.3) и (1.4) при $\beta=1$ получим

$$J(\alpha,1;2)<\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}|c_n(\varphi)|<\infty.$$

Следовательно

$$R_n\equiv\sum_{k=n}^{\infty}|c_k(\varphi)|=o(n^{-\alpha}).$$

Мы используем следующую теорему Лоренца (см. [9], стр. 209) , утверждающую, что из $R_n=O(n^{-\alpha})$, следует, что $\varphi(\theta)\in \mathrm{Lip}\alpha$, т.е.

$$\omega(\delta,\varphi)=O(\delta^{\alpha}),\quad \varphi(\theta)\le M. \tag{1.5}$$

Так как $\varphi(\theta)\ge m_0>0$, то

$$|\ln y_1-\ln y_2|\le\frac{1}{m_0}|y_1-y_2|\quad (y_1,y_2\ge m_0>0)$$

и следовательно

$$\Psi(\theta)=\ln\varphi(\theta)\in \mathrm{Lip}\alpha:\ \omega(\delta,\Psi)=O\left(\delta^{\alpha}\right). \tag{1.6}$$

По теореме Привалова $\tilde{\Psi}(\theta)\in \mathrm{Lip}\alpha$, т.е.

$$\omega(\delta,\tilde{\Psi})=O\left(\delta^{\alpha}\right). \tag{1.7}$$

В силу определения функции Сеге и (1.5), (1.6), имеем

$$\pi_0(\theta) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\Psi(\theta) + i\widetilde{\Psi}(\theta)\right)\right\}, \quad \pi_0(\theta) \in C_{2\pi}, \ |\pi_0(\theta)| \le \frac{1}{\sqrt{m_0}}. \tag{1.8}$$

Но

$$|z_1 - z_2| < |\ln z_1 - \ln z_2| \max\{|z_1|, |z_2|\}.$$

Поэтому

$$|\pi_0(\theta + h) - \pi_0(\theta)| \le \frac{1}{2\sqrt{m_0}}\left\{\Psi(\theta + h) - \Psi(\theta)| + |\widetilde{\Psi}(\theta + h) - \widetilde{\Psi}(\theta)|\right\}.$$

Применяя (1.6) и (1.7), получим

$$\omega(\delta, \pi_0) = O(\delta^{\alpha}). \tag{1.9}$$

Легко видеть, что

$$|\Delta\Psi'| \le m_0^{-1}|\varphi'(\theta + h) - \varphi'(\theta)| + m_0^{-2}|\varphi'(\theta)|\,|\varphi(\theta + h) - \varphi(\theta)|.$$

Поэтому

$$\omega_2(\delta, \Psi') \le m_0^{-1}\omega(\delta, \varphi') + m_0^{-2}||\varphi'||_2\,\omega(\delta, \varphi). \tag{1.10}$$

Так как $m = 1$, $\omega_2(\delta, \varphi') = O(\delta^{\alpha})$, то $||\varphi'||_2 < \infty$.

Применяя (1.5) и (1.10), получим

$$\omega_2(\delta, \Psi') = O(\delta^{\alpha}) \quad (||\Psi'||_2 \le M_1). \tag{1.11}$$

По теореме М.Рисса

$$\omega_2(\delta, \widetilde{\Psi}') = O(\delta^{\alpha}) \quad (||\widetilde{\Psi}'||_2 \le M_2). \tag{1.12}$$

Так как

$$\pi_0'(e^{i\theta})i = \pi_0(e^{i\theta})\left\{-\frac{1}{2}\left[\Psi'(\theta) + i\widetilde{\Psi}'(\theta)\right]\right\} = \pi(e^{i\theta}) \cdot \lambda'(\theta), \tag{1.13}$$

то применяя (1.11) и (1.12), получим

$$||\pi'||_2 \le \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{m_0}}\left\{||\Psi'||_2 + ||\widetilde{\Psi}'||_2\right\} \le \frac{1}{2\sqrt{m_0}}(M_1 + M_2). \tag{1.14}$$

Но

$$\Delta\pi_0'(\theta) = -\frac{1}{2}\Phi_n\left(\frac{1}{z}\right)(\theta+h)\left\{\Delta\Psi' + i\Delta\widetilde{\Psi}'\right\} - \pi_0^{-1}(\theta)\,\pi_0'(\theta)\,\Delta\pi_0(\theta). \qquad (1.15)$$

Объединяя (1.8)–(1.15), имеем

$$\omega_2(\delta, \pi') = O(\delta^\alpha).$$

2. Пусть $m = 2$, $\gamma = 1 + \alpha$. Теперь $\varphi'(\theta) \sim \varphi_0'(\theta) \in AC(0, 2\pi)$, $||\varphi'|| \le M_4$, следовательно $\varphi_0(\theta) \in AC(0, 2\pi)$, $\omega(\delta, \varphi_0) = O(\delta)$. Из (1.3') следует, что $J(1+$ $+\alpha, 1; 2) < \infty$ и $\sum n^{\alpha+1}|c_n(\varphi)| < \infty$. Так как $\alpha_n(\varphi') = -n\,\beta_n(\varphi)$, $\beta_n(\varphi') = n\,\alpha_n(\varphi)$, то $|c_n(\varphi')| = n\,|c_n(\varphi)|$ и $\sum n^\alpha |c_n(\varphi')| < \infty$. Применяя теорему Лоренца, получим $\varphi'(\theta) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$:

$$\omega(\delta, \varphi') = O(\delta^\alpha), \quad \omega(\delta, \varphi) = O(\delta), \quad |\varphi'| \le M_3. \qquad (1.16)$$

По теореме Привалова и неравенству для логарифмов $\omega(\delta, \Psi) = O(\delta)$, $\omega(\delta, \widetilde{\Psi}) =$ $= O(\delta \ln \frac{1}{\delta})$. Поэтому из (1.16) следует, что

$$\omega(\delta, \pi_0) = O(\delta^\alpha). \qquad (1.17)$$

Следующие неравенства очевидны:

$$\omega_2(\delta, \Psi') \le ||\Delta\Psi'||_2 \le ||\Delta\Psi'|| \le \{||\varphi||\,||\Delta\varphi'|| + ||\varphi'||\,||\Delta\varphi||\}\, m_0^{-2} = O(\delta^\alpha),$$

$$||\Psi'||_2 \le M_5. \qquad (1.18)$$

По теореме М. Рисса

$$\omega_2(\delta, \widetilde{\Psi}') = O(\delta^\alpha) \;\; (||\widetilde{\Psi}||_2 \le M_6). \qquad (1.19)$$

В силу (1.13)

$$||\pi'||_2 \le \frac{1}{2}||\pi_0||\left\{\Psi'||_2 + ||\widetilde{\Psi}||\right\} \le \frac{1}{2\sqrt{m_0}}(M_1 + M_2).$$

В силу (1.15), (1.17)–(1.19) имеем

$$\omega_2(\delta, \pi') = O(\delta^\alpha). \qquad (1.20)$$

Так как

$$\Delta\Psi'' = [\Delta\varphi''\varphi^2(\theta)\varphi(\theta+h) + \Delta\varphi\varphi''(\theta)\varphi^2(\theta) + \Delta\varphi^2\varphi''(\theta)\varphi(\theta) + \Delta\varphi'^2\varphi^2(\theta) + $$
$$+ \Delta\varphi^2\varphi'^2\varphi'^2(\theta)] \cdot [\varphi^2(\theta)\varphi^2(\theta+h)]^{-1}, \quad \|\Delta\varphi'^2\| \le 2M\|\Delta\varphi'\|,$$

то

$$\begin{aligned} \|\Delta\Psi''\|_2 \le m_0^{-1}\{ & M^3\|\Delta\varphi''\|_2 + M^2\|\varphi''\|_2\|\Delta\varphi\| + \\ & + 2M^3\|\Delta\varphi\|\|\varphi''\|_2 + 2M^3\|\Delta\varphi'\| + 2MM_3^2\|\Delta\varphi\|\}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Объединяя (1.16) – (1.21), получим

$$-\pi_0''(e^{i\theta}) = \pi_0'(e^{i\theta})\lambda'(\theta) + \pi_0(e^{i\theta})\lambda''(\theta).$$

Поэтому

$$|\pi_0''(e^{i\theta})| = |\Delta\pi_0'(e^{i\theta})\lambda'(\theta+h) + \pi_0'(e^{i\theta})\Delta\lambda'(\theta) + \pi_0(e^{i(\theta+h)})\Delta\lambda(\theta) + \lambda''(\theta)\Delta\pi_0(e^{i\theta})|.$$

Применяя полученные оценки и прежние рассуждения, заключаем, что $\pi''(e^{i\theta}) \in$ $\in \mathrm{Lip}(\alpha, 2)$. Полагая $m = p$, $\gamma = p - 1 + \alpha$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha+p-1} c_n(\varphi) < \infty, \quad \text{но} \quad |c_n(\varphi^{(p-1)})| = n^{p-1}|c_n(\varphi)|,$$

следовательно

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}|c_n(\varphi^{(p-1)})| < \infty \quad \text{и} \quad \varphi^{(p-1)}(\theta) \in \mathrm{Lip}\,\alpha.$$

Повторяя прежние рассуждения, заключаем, что $\pi^{(m)}(e^{i\theta}) \in \mathrm{Lip}(\alpha, 2)$ для каждого $m > 2$. В силу (1.2), имеем $E_{n,2}(\pi) = O\left\{n^{-(m+\alpha)}\right\}$. Применяя Лемму 1.1 получим доказательство Теоремы 1.1.

Лемма 1.2. *Пусть* $0 < m_0 \le f(\theta)$, $f^{(m-1)}(\theta) \in C(0, 2\pi)$, *а* $f^{(m)}(\theta) \in Lip(\alpha, 2)$, $0 < \alpha < 1$. *Тогда функция* $g(\theta) = 1/f(\theta)$ *обладает теми же свойствами.*

Доказательство. При $m = 0$ это очевидно. Для $m = 1$ имеем $g'(\theta)f(\theta) + g(\theta)f'(\theta) = 0$, $g'(\theta+h)f(\theta+h) - g(\theta+h)f'(\theta+h) = 0$ и $f(\theta+h)\Delta g' + g'\Delta f + g(\theta+h)\Delta f' + f'(\theta)\Delta g = 0$. Поэтому

$$\|\Delta g'\|_2 \le C_1\|\Delta f\|_2 + C_2\|\Delta f'\|_2, \quad \omega_2(\delta, g') \le C_3\omega_2(\delta, f').$$

Для $m = 2$ имеем

$$\Delta g'' + g''\Delta f + 2g'(\theta+h)\Delta f' + 2f'(\theta)\Delta g + g(\theta+h)\Delta f'' + f''(\theta)\Delta g = 0,$$

$$g'' = -f^{-4}\left(f''f^2 - 2ff'^2\right), \quad \|g''\|_2 = O(1), \quad \|\Delta g\| = O(h), \quad \|f''\|_2 = O(1)$$

Следуя этим путем, докажем лемму для любого $m > 2$.

Теорема 1.2. *Пусть* $\delta_{\sigma,n} = O\left\{n^{-(m+\alpha)}\right\}$, $0 < \alpha < 1$, $m \geq 0$. *Для* $m = 0$ *предположим* $\alpha > 1/2$. *Тогда*

$$\sigma(\theta) \in AC(0, 2\pi), \quad \varphi^{(m)}(\theta) \in Lip(\alpha, 2).$$

Доказательство. Известно (см. [1], стр. 230), что

$$\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} |b_k| \leq b \sum_{\nu=\left[\frac{n}{4}\right]}^{\infty} \frac{B_\nu}{\sqrt{\nu}}, \quad B_\nu = \left\{\sum_{k=\nu}^{\infty} |b_k|^2\right\}^{1/2}.$$

Полагая $b_k = a_k$, получим $\lambda_n = O\left(n^{-(m+\alpha-\frac{1}{2})}\right)$. Следовательно, $\sum |a_k| < \infty$ и поэтому $\sigma(\theta) \in AC(0, 2\pi)$, $0 < \varphi(\theta) \in C_{2\pi}$ $(0 < m_0 \leq \varphi(\theta) \leq M)$, $\pi(z)$ непрерывна при $|z| \leq 1$ и $|\pi(e^{i\theta})| \geq M^{-1/2}$ (см. [2], стр. 167). В силу Леммы 1.1

$$E_{n,2}(\pi) \leq \frac{\delta_n}{\sqrt{m_0}} = O\left(n^{-(m+\alpha)}\right). \tag{1.22}$$

Так как (см. [7], стр. 347) при $f(\theta) \in L^2(0, 2\pi)$

$$\omega_2\left(\frac{1}{n}, f^{(m)}\right) \leq C_5 \left\{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(\nu+1)^m E_{\nu,2}(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1} E_{\nu,2}(f)\right\}, \tag{1.23}$$

то заменяя f на π и применяя (1.22), заключаем, что для $\frac{1}{n+1} \leq \delta < \frac{1}{n}$, $\omega_2(\delta, \pi^{(m)}) = O(\delta^\alpha)$. По Лемме 1.2 имеем также $\omega_2(\delta, g^{(m)}) = O(\delta^\alpha)$, где $g(e^{i\theta}) = \pi^{-1}(e^{i\theta})$. Пусть $T_n(e^{i\theta}, g)$ – тригонометрический многочлен наилучшего приближения функции g в метрике пространства $L^2(0, 2\pi)$. Обозначая $|T_n(e^{i\theta})|^2 \equiv Q_{2n}(e^{i\theta})$, получим

$$E_{2n,2}(\varphi) \leq \|\varphi - Q_{2n}\|_2 = \| |g|^2 - |T_n|^2 \|_2 \leq$$

$$\leq \|g\|_2 \|g - T_n\| + \|T_n\|_2 \|g - T_n\| = O\{E_{n,2}(g)\}.$$

Так как $E_{2n+1,2}(\varphi) < E_{2n,2}(\varphi)$, в силу (1.23) и (1.22) имеем $\varphi^{(m)}(\theta) \in \mathrm{Lip}(\alpha, 2)$.

Лемма 1.3. *Пусть* $ds = d\sigma + 2\pi\mu\delta(z - \zeta)$, *где* $\mu > 0$, $z = e^{i\theta}$, $\zeta = e^{it}$, $\delta(z-\zeta) = d(sgn(\theta - t))$. *Обозначая через* $\{\varphi_{s,n}(z)\}_0^\infty$ *соответствующие ОНМ, имеем*

$$\varphi^*_{s,n}(z)\} = \frac{\kappa_{\sigma,n}}{\kappa_{s,n}}\left\{\varphi^*_{\sigma,n}(z) - \mu K_{\sigma,n}(z,\zeta)\frac{\varphi^*_{\sigma,n}(\zeta)}{1 + \mu K_{\sigma,n}(\zeta)}\right\}, \tag{1.24}$$

$$K_{\sigma,n}(\zeta) \equiv K_{\sigma,n}(\zeta,\zeta).$$

В частности, полагая $z = 0$, получим

$$a_{s,n} = \left(\frac{\kappa_{\sigma,n+1}}{\kappa_{s,n+1}}\right)^2 \left\{a_{\sigma,n} + \mu \frac{\overline{\varphi_{\sigma,n+1}(\zeta)}\varphi^*_{\sigma,n}(\zeta)}{1+\mu K_{\sigma,n}(\zeta)}\right\}. \tag{1.25}$$

Доказательство. Известно (см. [1], стр. 14), что

$$K^{-1}_{s,n}(z_0) = \min_{\mathcal{P}} \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\mathcal{P}(z)|^2\, d\sigma + \mu|\mathcal{P}(\zeta)|^2\right\}, \quad \deg\mathcal{P} = n, \quad \mathcal{P}(z_0) = 1. \tag{1.26}$$

Соответствующим экстремальным многочленом будет

$$\tilde{\mathcal{P}}(z,z_0) = \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu \varphi_{\sigma,\nu}(z) = K_{s,n}(z,z_0)K^{-1}_{s,n}(z_0). \tag{1.27}$$

В силу (1.26) имеем

$$K^{-1}_{s,n} = \min_{\{d_\nu\}_0^n}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}|d_\nu|^2 + \mu\sum_{k=0}^{n} d_k\varphi_{\sigma,k}(\zeta)\sum_{\nu=0}^{n}\bar{d}_\nu\overline{\varphi_{\sigma,k}(\zeta)}, \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu\varphi_{\sigma,\nu}(\bar{z}_0) = 1\right\}, \tag{1.28}$$

где

$$K_{\sigma,n}(z,\zeta) = \sum_{k=0}^{n}\varphi_{\sigma,k}(z)\overline{\varphi_{\sigma,k}(\zeta)}.$$

Условия минимума запишутся следующим образом :

$$\bar{d}_k + \mu\varphi_{\sigma,k}(\zeta)\sum_{\nu=0}^{n}\bar{d}_\nu\overline{\varphi_{\sigma,\nu}(\zeta)} - \lambda\varphi_{\sigma,k}(z_0) = 0, \quad k = 0,1,\dots,n. \tag{1.29}$$

Умножая обе части (1.29) на d_k и суммируя их, получим

$$\lambda = K^{-1}_{s,n}(z_0). \tag{1.30}$$

В силу (1.27), (1.29) и (1.30) имеем

$$d_k = K^{-1}_{s,n}(z_0)\overline{\varphi_{\sigma,k}(z_0)} - \mu\overline{\varphi_{\sigma,k}(\zeta)}K_{s,n}(\zeta,z_0)K^{-1}_{s,n}(z_0). \tag{1.31}$$

Умножая обе части (1.31) на $\varphi_{\sigma,k}(z)$ и суммируя их, получим

$$K_{s,n}(z,z_0)K^{-1}_{s,n}(z_0) = K_{\sigma,n}(z,z_0)K^{-1}_{s,n}(z_0) - \mu K_{\sigma,n}(z,\zeta)K^{-1}_{s,n}(z_0)K_{s,n}(\zeta,z_0). \tag{1.32}$$

Полагая $z_0 = 0$ и учитывая, что (см. [1], стр. 14)

$$K_{\sigma,n}(z,0) = \kappa_{\sigma,n}\varphi^*_{\sigma,n}(z), \quad K_{s,n}(z,0) = \kappa_{s,n}\varphi^*_{s,n}(z),$$

получим из равенства (1.32)

$$\varphi^*_{s,n}(z) = \frac{\kappa_{\sigma,n}}{\kappa_{s,n}}\varphi^*_{\sigma,n}(z) - \mu K_{\sigma,n}(z,\zeta)\varphi^*_{s,n}(\zeta). \tag{1.33}$$

Полагая $z = \zeta$ в (1.33), найдем $\varphi^*_{s,n}(\zeta)$, подставляя которое в (1.33), получим (1.24). Положим теперь $z = 0$ в (1.24). Тогда

$$\kappa^2_{s,n} = \kappa^2_{\sigma,n}\left\{1 - \mu\frac{|\varphi_{\sigma,n}(\zeta)|^2}{1 + \mu K_{\sigma,n}(\zeta)}\right\}, \tag{1.34}$$

$$\left(\frac{\kappa_{s,n}}{\kappa_{\sigma,n}}\right)^2 = \frac{1 + \mu K_{\sigma,n-1}(\zeta)}{1 + \mu K_{\sigma,n}(\zeta)}. \tag{1.34'}$$

Следовательно

$$\varphi^*_{s,n}(z) = \sqrt{\frac{1 + K_{\sigma,n}(\zeta)}{1 + K_{\sigma,n-1}(\zeta)}}\left\{\varphi^*_{\sigma,n}(z) - \mu\frac{\varphi^*_{\sigma,n}(\zeta)K_{\sigma,n}(z,\zeta)}{1 + \mu K_{\sigma,n}(\zeta)}\right\}. \tag{1.35}$$

Применяя тот же подход к мере

$$ds = d\sigma + 2\pi\sum_{k=1}^{m}\mu_k\delta(z - \zeta_k), \ m > 1,$$

получим следующую версию (1.24)

$$\varphi^*_{s,n}(z) = \frac{\kappa_{\sigma,n}}{\kappa_{s,n}}\left\{\varphi^*_{\sigma,n}(z) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k\frac{\varphi^*_{\sigma,\cdot}(\zeta_k)}{1 + \mu K_{\sigma,n}(\zeta_k)}K_{\sigma,n}(z,\zeta_k)\right\}. \tag{1.24'}$$

Полагая $z = 0$, получим

$$\kappa^2_{s,n} = \kappa^2_{\sigma,n}\left\{1 - \sum_{k=1}^{m}\mu_k\frac{|\varphi_{\sigma,n}(\zeta_k)|^2}{1 + \mu K_{\sigma,n}(\zeta_k)}\right\}. \tag{1.34''}$$

Докажем теперь (1.25). В силу (1.24) имеем

$$\overline{\varphi}_{s,n} = \frac{\kappa_{\sigma,n}}{\kappa_{s,n}}\left\{\overline{\varphi}_{\sigma,n}(z) - \mu K_{\sigma,n}\left(\frac{1}{z},\zeta\right)z^n b_n(\zeta)\right\}, \quad b_n(\zeta) = \mu\frac{\varphi^*_{\sigma,n}(\zeta)}{1 + \mu K_{\sigma,n}(\zeta)}.$$

Но

$$K_{\sigma,n}\left(\frac{1}{z},\zeta\right)z^n\bigg|_{z=0} = \kappa_{\sigma,n}\overline{\varphi_{\sigma,n}(\zeta)},$$

$$\overline{\varphi_{s,n+1}(0)} = -a_{s,n}, \quad \overline{\varphi_{\sigma,n+1}(0)} = -a_{\sigma,n}.$$

Из последнего соотношения следует (1.25). Формула, аналогичная (1.24) только для многочлена $\varphi_{s,n}(z)$ была впервые получена Я. Л. Геронимусом другим методом (см. [10]).

Следствие 1.1. Если $a_{\sigma,n} \to 0 (n \to \infty)$, то

a) $|a_{\sigma,n} - a_{s,n}| \to 0 \, (n \to \infty)$,

b) $\frac{\kappa_{\sigma,n}}{\kappa_{s,n}} \to 1 \, (n \to \infty)$.

Доказательство. Известно (см. [11]), что

$$\frac{|\varphi_{\sigma,n}(z)|^2}{K_{\sigma,n}(z)} \to 0 \, (n \to \infty), \quad \frac{\kappa_{\sigma,n+1}}{\kappa_{\sigma,n}} \to 1 \, (n \to \infty), \quad |z| \leq 1.$$

Так как $a_{\sigma,n} = -\overline{\Phi_{\sigma,n+1}(0)}$, $a_{s,n} = -\overline{\Phi_{s,n+1}(0)}$ и $K_{\sigma,n}(0, \zeta_0) = \kappa_{\sigma,n} \overline{\varphi_{\sigma,n}(\zeta_0)}$, в силу (1.37), получим

$$a_{s,n} = a_{\sigma,n} + \mu \frac{\varphi_{\sigma,n}(\zeta_0) \overline{\varphi^*_{\sigma,n+1}(\zeta_0)}}{1 + \mu K_{\sigma,n}(\zeta_0)}.$$

Далее, имеем (см. [11], стр. 56)

$$|\varphi^*_{\sigma,n+1}(\zeta)| \leq (1 + |\zeta|) \, |\varphi^*_{\sigma,n}(\zeta)| \left| \frac{\kappa_{\sigma,n+1}}{\kappa_{\sigma,n}} \right| \quad (|\zeta| \leq 1),$$

Следовательно, $|a_{\sigma,n} - a_{s,n}| \to 0 \, (n \to \infty)$. Второе утверждение Следствия 1.1 следует из соотношения (1.34). Заметим, что мы имеем тот же результат в случае, когда

$$ds = d\sigma + \sum_{k=1}^{m} \mu_k \delta(z - \zeta_k), \quad \zeta_k = e^{it_k}, \quad \zeta = e^{it}.$$

c) Для $z \in \Gamma \setminus \{\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_m\}$ имеем $\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_{s,n}(z)}{\varphi_{\sigma,n}(z)} = 1$, $|z| = 1$.

Пример 1. Пусть $d\sigma \equiv d\theta$, $ds = d\sigma + 2\pi\delta(z - \zeta_0)$, $\zeta_0 = 1 \, (t_0 = 0)$, $\mu = 1$, $d = 2\pi$. Тогда

$$\varphi^*_{s,n}(z) = \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \left\{ 1 - \frac{1}{n+2} \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \right\} = \frac{n + 1 - z(z^{n-1} + ... + 1)}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}.$$

Круговыми параметрами будут

$$a_{s,n} = -\frac{\overline{\varphi_{s,n+1}(0)}}{\kappa_{s,n+1}} = \frac{1}{n+2}, \quad \lim_{n\to\infty} \varphi^*_{s,n}(z) = \pi_s(z) = 1.$$

Очевидно, что $\pi_s(1) = 1$, а $\lim_{n\to\infty} \varphi^*_{s,n}(1) = 0$, т.е. равномерное асимптотическое представление $\lim_{n\to\infty} \varphi^*_{s,n}(e^{i\theta}) = \pi_s(e^{i\theta})$ на Γ не выполняется. Отметим, что условие Сеге $\sum |a_n|^2 < \infty$ имеет место.

Определим соответствующую плотность распределения $\Psi(\theta)$ для ОНМ второго рода $\{\varphi_{\tau,n}(z)\}_0^\infty$, $\tau'(\theta) = \Psi(\theta)$. Круговыми параметрами будут $a_{\tau,n} = -\dfrac{1}{n+2}$ и п.в. имеем (см. [3])

$$c_0 = 2, \quad \varphi(\theta) = 1, \quad \widetilde{\varphi}_s(\theta) = -\cot\frac{\theta}{2}, \quad \Psi(\theta) = c_0^2 \frac{4\varphi(\theta)}{\varphi(\theta) + \widetilde{\varphi}_s^2(\theta)} = |e^{i\theta} - 1|^2.$$

Пример 2. Пусть $m = 2$, $\zeta_1 = -\zeta_2 = 1$, $d\sigma \equiv d\theta$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$. В этом случае $\kappa_{\sigma,n} = 1$ и

$$\varphi^*_{s,n}(z) = \frac{1}{\kappa_{\sigma,n}}\left\{1 - \frac{1 + z + \ldots + z^n}{n+2} - \frac{1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n}{n+2}\right\},$$

$$\kappa^2_{s,n} = \frac{n}{n+2},$$

$$\varphi_{s,n}(z) = \sqrt{\frac{n+2}{n}}\left\{z^n - \frac{z^n + z^{n-1} + \ldots + 1}{n+2} - \frac{z^n - z^{n-1} + \ldots + (-1)^n}{n+2}\right\}$$

$$\varphi_{\sigma,n}(0) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{n(n+2)}}, & \text{если } n \text{ четное} \\ 0, & \text{если } n \text{ нечетное} \end{cases} \quad \text{и } a_{s,n} = \begin{cases} \frac{2}{n+1}, & \text{если } n \text{ четное} \\ 0, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Для плотности распределения имеем

$$c_0 = 3, \quad \varphi(\theta) = 1, \quad \widetilde{\varphi}_s(\theta) = -\cot\frac{\theta}{2} + \tan\frac{\theta}{2},$$

$$\Psi(\theta) = c_0^2 \frac{9\varphi(\theta)}{\varphi(\theta) + \widetilde{\varphi}_s^2(\theta)} = 9\frac{\sin^2\theta}{4 - 3\sin^2\theta}.$$

Заметим, что в [12] для в.ф. $\varphi(\theta) = \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2\gamma_1}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2\gamma_2}$, $\gamma_1, \gamma_2 > -\frac{1}{2}$ получены следующие значения для к.п.

$$a_n = -\frac{\gamma_1 + (-1)^{n+1}\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2 + n + 1}, \quad n = 0, 1, 2....$$

При $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$ эти значения совпадают с найденными в примере 1.

Теорема 1.3. *1) Если*

$$\delta_{\sigma,n} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} |a_{\sigma,k}|^2\right\}^{1/2} = O\left(n^{-1/2}\right), \tag{1.36}$$

то

а) п.в. на $[0, 2\pi]$ имеет место поточечная ограниченность ОНМ первого и второго рода: $|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\theta})|, |\Psi_{\sigma,n}(e^{i\theta})| \le C_0 = C_0(\theta)$,

b) утверждение "п.в." нельзя заменить на "всюду".

2) Если $\delta_{\sigma,n} = O\left(n^{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)}\right)$, $1 \geq \varepsilon > 0$, *то* $\sigma(\theta) \in AC(0,2\pi)$, *п.р. непрерывна и строго положительна, а* $\omega(\delta,\varphi) = O(\delta^{\varepsilon})$.

Доказательство. Докажем сначала утверждение а). Известно следующее неравенство:

$$|\varphi^*_{\sigma,n}(z)| \leq |\pi(\rho_n z)| \left\{C_\sigma + C_\sigma \sqrt{n}\, \delta_{\sigma,n}\right\},\ |z| \leq 1,\ \rho_n = 1 - \frac{1}{n}. \tag{1.37}$$

Оно является усилением соответствующего неравенства Я.Л.Геронимуса (см. [1], стр. 81) и может быть найдено в [13] или [14]. Мы приведем здесь новое доказательство неравенства (1.37). Мы используем неравенство (см. [1],стр. 81)

$$|\varphi^*_{\sigma,n}(re^{i\theta})| \leq |\pi_0(re^{i\theta})| \left\{1 + \frac{C_r \delta_{\sigma,n}}{\sqrt{1-r}}\right\},\ r < 1, \tag{1.38}$$

также как и

$$|\mathcal{P}_n(r_2 e^{i\theta})| \leq |\mathcal{P}_n(r_1 e^{i\theta})| \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{n}{2}},\ 0 < r_1 \leq r_2 \leq 1, n \geq 2. \tag{1.39}$$

доказанное Е. А. Рахмановым в [15], где $\mathcal{P}_n(z)$ – произвольный многочлен степени n, нули которого $\{\zeta_k\}_1^n$ лежат в области $|\zeta| > 1$.
Полагая $r_2 e^{i\theta} = z$, $\frac{r_1}{r_2} = \rho_n = 1 - \frac{1}{n}$, $r_2 = 1$ в (1.39), получим

$$|\mathcal{P}_n(z)| \leq |\mathcal{P}(\rho_n z)| \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{2e}\, |\mathcal{P}_n(\rho_n z)|. \tag{1.39 '}$$

Применим теперь (1.39') к $\varphi^*_{\sigma,n}(z)$. Положим $re^{i\theta} = \rho_n z$, $r = |\rho_n z| \leq \rho_n$. В силу (1.38) и (1.39'), получим

$$\begin{aligned} |is\varphi^*_{\sigma,n}(z)| &\leq \sqrt{2e}|\varphi^*_{\sigma,n}(\rho_n z)| \leq \sqrt{2e}|\pi_\sigma(\rho_n z)| \left\{1 + \frac{C_8}{\sqrt{1-\rho_n}} \delta_{\sigma,n}\right\} = \\ &= |\pi_\sigma(\rho_n z)| \left\{C_9 + C_{10}\sqrt{n}\delta_{\sigma,n}\right\}. (C_9 \equiv C_5,\ C_{10} \equiv C_6). \end{aligned} \tag{1.40}$$

Из условия (1.36) следует, что $\ln \sigma'(\theta) \in L(0,2\pi)$, поэтому во всех точках, где $\ln \frac{1}{\sigma(\theta)}$ является производной своего неопределенного интеграла, имеем

$$\lim_{n\to\infty} |\pi_\sigma(\rho_n e^{i\theta})| = |\pi_\sigma(e^{i\theta})| = \frac{1}{\sqrt{\sigma'(\theta)}},$$

что и доказывает утверждение а).

Для доказательства b) рассмотрим следующий

Пример 3. Пусть

$$a_{\sigma,k}(\varepsilon) = -\frac{1}{k+2}\{\ln(k+2)\}^{-\frac{1+\varepsilon}{2}}, \ 0 < \varepsilon < 1, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

и $\left\{\varphi_{\sigma,n}^{(\varepsilon)}(z)\right\}_0^\infty$ соответствующее ОНМ. Имеем $\{a_{\sigma,k}(\varepsilon)\}_0^\infty \in l^2$. Действительно

$$\sum_{k=n-2}^{\infty} |a_{\sigma,k}(\varepsilon)|^2 < \frac{1}{n}\int_n^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{n}(\ln n)^{-\varepsilon}, \quad \delta_{\sigma,n}(\varepsilon) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Обозначим

$$L_n(\varepsilon) = \ln\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1+|a_{\sigma,k}(\varepsilon)|}{1-|a_{\sigma,k}(\varepsilon)|}.$$

Имеём

$$L_n(\varepsilon) > 2\sum_{k=0}^{n-1}|a_{\sigma,k}(\varepsilon)| > 2\left\{((\ln n)^{\frac{1-\varepsilon}{2}} - (\ln 3)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\right\} > C_{11}(\ln n)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}.$$

Так как $a_{\sigma,k(\varepsilon)} < 0$, $k = 1, 2, \ldots$, для соответствующих ОНМ имеем (см. [2], стр. 165 - 166)

$$\varphi_{\sigma,n}^{(\varepsilon)}(1) = \frac{1}{\sqrt{C_0}}\exp\left(L_n^{1/2}(\varepsilon)\right) \geq C_{12}\exp\left\{(\ln n)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\right\} \to \infty, \ n \to \infty.$$

Таким образом, утверждение "п.в." существенно.

Утверждение а) Теоремы 1.3 можно доказать проще, если воспользоваться следующей теоремой Радемахера и Меньшова.

Теорема (см. [16], стр. 190 ; [17], стр. 87). *Пусть $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$. произвольная ортонормированная система функций. Если $\sum c_k^2 \ln^2 k < \infty$, то ортогональный ряд $\sum c_k\varphi_k(x)$ сходится почти всюду.*

В [17] и [18] указанная теорема доказана для вещественнозначных ортонормированных систем. Ее доказательство весьма сложно, чего нельзя сказать о неравенстве (1.37).

Наши рассуждения в случае а) не выходят за рамки общей теории ортогональных многочленов на единичной окружности.

Выведем теперь утверждение а) из теоремы Радемахера - Меньшова. Применим преобразование Абеля (см. [17], стр. 78)

$$\sum_{k=m+1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=m+2}^{n}(u_k - u_{k-1})\sum_{\nu=m+1}^{\infty} v_\nu + u_{m+1}\sum_{\nu=m+1}^{\infty} v_n u - u_n\sum_{\nu=n+1}^{\infty} v_\nu, \quad (*)$$

где $\{u_k\}$, $\{v_k\}$ - действительные числа и $\sum v_\nu < \infty$. Положим $v_\nu = |\varphi_\nu(0)|^2$, $m = 0$, $u_k = \ln^2 k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. В силу условия $\sum_{\nu=n}^{\infty} |\varphi_\nu(0)| = O(1/n)$, последнее слагаемое в (*) стремится к нулю, предпоследнее слагаемое равно нулю при всех n. Так как $u_k - u_{k-1} = (\ln k - \ln(k-1))(\ln k + \ln(k-1)) = O(\ln k/k)$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2 \ln^2 k < \infty.$$

Полагая $c_n = \overline{\varphi_n(0)}$, где $\{\varphi_n(z)\}_0^\infty$ – ОНМ на Γ и применяя теорему Радемахера -Меньшова, получим, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \overline{\varphi_k(0)}\varphi_k(z)$ сходится п.в. на Γ. Так как

$$\kappa_n \varphi_n^*(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi_k(0)}\varphi_k(e^{i\theta}), \quad \kappa_0 \le \kappa_n \le \kappa,$$

то п.в. на Γ имеем поточечную ограниченность ОНМ.

Докажем теперь утверждение 2). Известно (см. [1], стр. 169), что

$$A_{\sigma,n} \equiv \sum_{k=n}^{\infty} |a_{\sigma,k}| \le C_{13} \sum_{\nu=[n/4]} \frac{\delta_{\sigma,\nu}}{\sqrt{\nu}} \le C_{14} \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{-(1+\epsilon)} < C_{15} n^{-\epsilon}.$$

Следовательно, $\sigma(\theta) \in AC(0, 2\pi)$, $0 < \sigma'(\theta) = \varphi(\theta) \in C(0, 2\pi)$ и система ОНМ равномерно ограничена (см. [1], р. 167). Применяя неравенство (см. [3]),

$$\omega(\frac{1}{n}, \varphi) \le \frac{C_{16}}{n} \sum_{\nu=0}^{n} A_{\sigma,[\nu/4]} \le \frac{C_{17}}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-\epsilon} < C_{18} n^{-\epsilon},$$

получим $\omega(\delta, \varphi) = O(\delta^\epsilon)$, $\frac{1}{n+1} \le \delta < \frac{1}{n}$. Теорема 1.3 доказана.

Пример 4. Согласно условию (1.36), п.р. может иметь нули.
Рассмотрим в.ф. $\psi(\theta) = |e^{i\theta} - 1|^2$, $ds = \psi\, d\theta$. Имеем $a_{s,n} = \dfrac{1}{n+2}$ и $\delta_{s,n} = O(n^{-1/2})$.

Пример 5. Согласно условию (1.36) ф.р. может иметь точки разрыва.

Рассмотрим функцию распределения $ds_1 = ds + 2\pi\delta(z - \zeta_0)$, $\zeta_0 = e^{it_0}$, $0 < \theta_1 + \varepsilon < t_0 < \theta_2 - \varepsilon \le 2\pi$. Имеем

$$a_{s_1,n} = \left(\frac{\kappa_{s,n+1}}{\kappa_{s_1,n+1}}\right)^2 \left\{\frac{a_{s,n} + \mu\varphi^*_{s,n+1}(\zeta)\overline{\varphi_{s,n+1}(\zeta)}}{1 + \mu K_{s,n+1}(\zeta)}\right\},$$

и

$$\left(\frac{\kappa_{s,n+1}}{\kappa_{s_1,n+1}}\right)^2 = \frac{1 + K_{s,n}(\zeta)}{1 + K_{s,n+1}(\zeta)} < 1.$$

Известно (см. [1], стр. 54, 56), что если $\sigma(\theta') - \sigma(\theta'') \geq m_0(\theta' - \theta'')$, $\alpha \leq \theta' < < \theta'' \leq \beta$, $m_0 > 0$, то $K_{\sigma,n}(\theta) \leq C_{19}(n+1)$, $\theta \in \mathcal{E}_\varepsilon(\alpha, \beta) = [\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon]$. Если $\sigma(\theta) \in AC(0, 2\pi)$ и $\varphi(\theta) \leq M$, то $K_{\sigma,n}(\theta) \geq C_{20}(n+1)$, $\theta \in \mathcal{E}_\varepsilon(\alpha, \beta)$. В нашем случае $[\alpha, \beta] \equiv [\theta_1, \theta_2]$ и $K_{s,n}(t) \simeq n$, $t \in \mathcal{E}_\varepsilon(\theta_1, \theta_2)$. Так как $ds = \psi(\theta)\, d\theta$ и $\psi'(\theta) \in C(\theta_1, \theta_2)$, то $\omega'(\delta, \varphi) = O(\delta)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \Psi^*_{s,n}(e^{i\theta}) = \pi_s(e^{i\theta}), \qquad \lim_{n\to\infty} |\Psi_{s,n}(e^{i\theta})|^2 = \Psi^{-1}(\theta),$$

равномерно для $\theta \in \mathcal{E}_\varepsilon(\theta_1, \theta_2)$ (см. [16]). Следовательно, $\Psi_{s,n}(e^{i\theta})| = O(1)$, $\theta \in \mathcal{E}_\varepsilon(\theta_1, \theta_2)$. Поэтому

$$|a_{s_1,n}| \leq |a_{s,n}| + \frac{C_{21}}{n}, \qquad \delta_{s_1,n} \leq \delta_{s,n} + \frac{C_{22}}{\sqrt{n}} \leq C_{23}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, ф.р. $s_1(\theta)$ имеет точку разрыва при $\theta = t_0$ и обращается в нуль при $\theta = 0$ и $\delta_{s_1,n} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Пример 6. Пусть

$$\sigma'(t) = \varphi(t) = h(t) \prod_{\nu=1}^{m} |e^{it} - e^{i\theta_\nu}|^{2\gamma_\nu} \equiv h(t)\,\gamma(t), \tag{1.41}$$

где $\gamma(t)$ – обобщенный якобиев вес и $h(t) \in L(m_0, M; \frac{1}{2}, 2)$. Тогда

$$|\varphi_n(e^{i\theta})| \leq C_{24} \prod_{\nu=1}^{m} \left[|e^{i\theta} - e^{i\theta_\nu}| + \frac{1}{n}\right]^{-\gamma_\nu}. \tag{1.42}$$

Для случая $\gamma_1 = ... = \gamma_m = 0$ это неравенство было доказано Я. Л. Геронимусом (см. [1], стр. 48). Докажем (1.42) в общем случае. Имеем

$$\pi(z; \varphi) = \exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \ln\{h(t)\gamma(t)\}\, dt\right\} = \pi(z, h)\,\pi(z, \gamma). \tag{1.43}$$

Легко показать, что

$$\pi(z, \gamma) = \exp\left\{i\sum_{\nu=1}^{m} \gamma_\nu \theta_\nu\right\} \prod_{\nu=1}^{m} (z_\nu - z)^{-\gamma_\nu}. \tag{1.44}$$

Полагая $z = \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{i\theta}$, получим

$$|\pi(z, \gamma)| \leq \prod_{\nu=1}^{m} \left[|e^{i\theta} - e^{i\theta_\nu}| + \frac{1}{n}\right]^{-\gamma_\nu}. \tag{1.45}$$

П.в. в $[0, 2\pi]$ имеем $|\pi(e^{i\theta}, h)| \le m_0^{-1/2}$, $\pi(z; h) \in H^2$. Следовательно

$$\pi(z; h) \le C_{25}, \quad |z| < 1. \tag{1.46}$$

Оценка (1.42) теперь следует из (1.37), (1.41) - (1.45) и из того, что при (1.41) имеем $\delta_{\sigma,n} = O\left(n^{-1/2}\right)$. Последнее утверждение было доказано в [19] (Теорема 4) при условии, что в (1.41) $\gamma_\nu > 0$ при всех $\nu = 1, 2, ..., m$. Здесь мы докажем это утверждение в случае, когда некоторые из $\{\gamma_\nu\}_1^m$ отрицательные числа. Предположим, что $\gamma_\nu < 0$, $\nu = 1, 2, ..., k$; $m \ge k$. Положим

$$\lambda(\theta) = \gamma(\theta) \prod_{\nu=1}^{k} |e^{i\theta} - e^{i\theta_\nu}|^2,$$

где

$$\gamma(\theta) = \prod_{\nu=1}^{m} |e^{i\theta} - e^{i\theta_\nu}|^{2\gamma_\nu}, \ 2\gamma_\nu > -1 \tag{1.47}$$

Очевидно, все показатели функции $\lambda(\theta)$ будут положительными. Имеем

$$\pi(\lambda; z) = \pi(\gamma; z) \exp\left\{i \sum_{\nu=1}^{k} \theta_\nu\right\} \prod_{\nu=1}^{k} (z_\nu - z)^{-1} = \pi(\gamma; z) \prod_{\nu=1}^{k} \frac{e^{i\theta_\nu}}{z_\nu - z}$$

и

$$\pi(\gamma; z) = \pi(\lambda; z) \prod_{\nu=1}^{k} (1 - ze^{-i\theta_\nu}). \tag{1.48}$$

Очевидно

$$\delta_n(\gamma) \le ||[\pi(\gamma; e^{i\theta}) - Q_n(e^{i\theta})] \sqrt{\gamma(\theta)}||_2. \tag{1.49}$$

Пусть $Q_{n-k}(\lambda; z)$ - многочлен степени $\le n - m$, для которого

$$\delta_{n-k}(\lambda) = ||[\pi(\lambda; e^{i\theta}) - Q_{n-k}(\lambda; e^{i\theta})] \sqrt{\lambda(\theta)}||_2.$$

Подставляя

$$Q_n(z) = \prod_{\nu=1}^{k} \left(1 - ze^{-i\theta_\nu}\right) Q_{n-k}(\lambda; z)$$

в (1.49) и применяя (1.50), получим

$$\delta_n(\gamma) \le || \prod_{\nu=1}^{k} \left(e^{i\theta} - e^{i\theta_\nu}\right) [\pi(\lambda; z) - Q_{n-k}(\lambda; z)] \sqrt{\lambda}||_2 \le$$
$$\le 2^k || [\pi(\lambda; z) - Q_{n-k}(\lambda; z)] \sqrt{\lambda}||_2 \le 2^k \delta_{n-k}(\lambda).$$

В силу Леммы 4 из [19] следует, что $\delta_n(\gamma) = O\left(n^{-1/2}\right)$.

Теорема 1.4. *Пусть к.п. удовлетворяет одному из двух условий*

1) $|a_n| \le \dfrac{\alpha}{n+\beta}$, $\alpha \le \dfrac{1}{2}$, $\beta \ge \alpha$, $n = 0, 1, \ldots$

при $\alpha = 1:$ $\sigma(+0) - \sigma(-0) = 2\pi/\beta$, $\sigma'(\theta) = \dfrac{\beta - 1}{\beta}$ $(\theta \neq 0)$ *(см. [10])*

2) $\{a_n\}_1^\infty$ *вещественные и* $a_n \ge \dfrac{1}{2n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Тогда в случае 1) имеем $\sigma(\theta) \in C(0, 2\pi)$ *и в случае 2)* $\sigma(\theta)$ *имеет точку разрыва при* $\theta = 0$.

Доказательство. 1) По известному неравенству (см. [1], стр. 167)

$$|\varphi_n(z)|^2 \ge \frac{1}{\sqrt{c_0}} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - |a_k|}{1 + |a_k|} \ge \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\beta - \alpha + k}{\beta + \alpha + k}, \ |z| = 1.$$

Но $A(A+1)\ldots(A+n-1) = \frac{\Gamma(A+n)}{\Gamma(A)}$, следовательно

$$|\varphi_n(z)|^2 \ge \frac{1}{\sqrt{c_0}} \frac{\Gamma(\beta - \alpha + n)\,\Gamma(\beta + \alpha)}{\Gamma(\beta + \alpha + n)\,\Gamma(\beta + \alpha)}. \tag{1.50}$$

Известно (см. [20, стр.62), что

$$\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x+b)} = x^{a-b}\left[1 + \frac{1}{2x}(a-b)(a+b-1) + O(x^{-2}\right]. \tag{1.51}$$

Полагая $a = \beta - \alpha$, $b = \beta + \alpha$, $x = n$ в (1.51) и учитывая (1.50), для $\theta \in [0, 2\pi]$, получим

$$K_\sigma(\theta) = \lim_{n\to\infty} K_{\sigma,n}(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_{\sigma,k}(e^{i\theta})|^2 \ge$$

$$\ge C_{15} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\alpha}\left[1 - (2\beta+1)\frac{\alpha}{n} + O(n^{-2})\right] = \infty.$$

Так как (см. [10]) $\sigma(\theta+0) - \sigma(\theta-0) = 2\pi K_\sigma^{-1}(\theta)$, то $\sigma(\theta) \in C(0, 2\pi)$.

Доказательство 2). Имеем

$$\Phi_n^*(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - a_k z\frac{\Phi_k(z)}{\Phi_k^*(z)}\right), \ |a_k| \le a < 1,\ k = 0, 1, \ldots, \tag{1.52}$$

$$\kappa_n^{-2} = c_0 \prod_{k=0}^{n-1}(1 - |a_k|^2),\ \varphi_n(e^{i\theta}) = \kappa_n\,\Phi_n(e^{i\theta}).$$

Поэтому

$$\frac{1}{c_0}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1 - |a_k|}{1 + |a_k|} \le |\varphi_n^*(z)|^2 \le \frac{1}{c_0}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1 - |a_k|}{1 + |a_k|},\ c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma(\theta).$$

и

$$\ln|\varphi_n^*(z)| \le \ln\frac{1}{c_0} + \sum_{k=0}^{n-1}\ln\frac{1-|a_k|}{1+|a_k|}. \tag{1.53}$$

Но

$$\ln\frac{1-|a_k|}{1+|a_k|} = 2\sum_{p=0}^{\infty}\frac{|a_k|^{2p+1}}{2p+1} < 2|a_k|\sum_{p=0}^{\infty}|a_k|^{2p} < \frac{2|a_k|}{1-a^2}. \tag{1.54}$$

Следовательно

$$|\varphi_n^*(z)|^2 \le \frac{1}{c_0}\exp(2cs_{n-1}), \quad s_n = \sum_{k=0}^{n}|a_k|, \quad c = \sqrt{1-a^2}.$$

Рассмотрим теперь случай $\{a_k < 0\}$. В силу (1.54) имеем

$$\Phi_n^*(1) = \prod_{k=0}^{n-1}(1+a_k)$$

и

$$|\varphi_n^*(1)|^2 = \frac{1}{c_0}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1-|a_k|}{1+|a_k|}. \tag{1.55}$$

Так как

$$\ln\frac{1-|a_k|}{1+|a_k|} > 2|a_k| \ (|a_k| < 1, \ k = 0, 1, \ldots),$$

то при $\{a_k < 0\}$, имеем (согласно (1.54))

$$\varphi_n^2(1) > \frac{1}{c_0}\exp(2s_{n-1}). \tag{1.56}$$

Если $\{\psi_n(z)\}_0^\infty$ — система ОПМ второго рода (для этих многочленов круговыми параметрами будут $\{a_n\}_0^\infty$, $a_n > 0$), то исходя из тождества (см. [1], стр.16)

$$\varphi_n^*(z)\,\psi_n(z) + \psi_n^*(z)\,\varphi_n(z) = \frac{2}{c_0}z^n,$$

и вещественности к.п., имеем

$$\varphi_n(1)\,\psi_n(1) = \frac{1}{c_0}. \tag{1.57}$$

Применяя (1.56) и (1.57), получим

$$\psi_{\sigma,n}^2(1) < \frac{1}{c_0}\exp(-2s_{n-1}).$$

В силу взаимности ОПМ $\{\varphi_{\sigma,n}(z)\}_0^\infty$ и $\{\psi_{\sigma,n}(z)\}_0^\infty$, получим

$$\varphi_{\sigma,n}^2(1) < \frac{1}{c_0}\exp(-2s_{n-1}).$$

для $\{a_{\sigma,n} > 0\}_0^\infty$. Поэтому

$$K_{\sigma,n}(1) < \frac{1}{c_0}\sum_{k=0}^{n}\exp(-2s_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n} u_k, \; s_{-1} = 0.$$

Для определения сходимости ряда $\sum u_k$ применим признак Раабе. Обозначим $R_n = n\,[u_n/u_{n+1} - 1]$, имеем $u_n/u_{n+1} = \exp[2(s_n - s_{n-1})] = \exp(2a_n)$ и $R_n = n\,[\exp(2a_n) - 1]$. Если $R_n \geq 1$, то ряд $\sum u_k$ сходится. Так как

$$\exp(2a_n) - 1 = 2a_n + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2a_n)^k}{k!} > 2a_n,$$

то $R_n > 2a_n \geq 1$, и $K_n(1) < \infty$, поэтому $\theta = 0$ – точка разрыва непрерывности $\sigma(\theta)$, так как $\sigma(\theta+0) - \sigma(\theta-0) = 2\pi K_{\sigma,n}^{-1}(\theta)$.

§2. ХАРАКТЕР УБЫВАНИЯ КРУГОВЫХ ПАРАМЕТРОВ И АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Теорема 2.1. *Пусть числовая последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ удовлетворяет следующим условиям :*

$$\Lambda_k = \sum_{j=k_0}^{k}\lambda_j \quad u \quad \sum_{k=k_0}^{\infty}\Lambda_k|a_k|^2 < \infty, \quad 0 < |a_k| \leq 1,$$

и

$$\sum_{k=k_0}\lambda_k \exp\left\{-\beta\sqrt{\sum_{j=k_0}^{k}\Lambda_j^{-1}}\right\} = \infty, \quad 0 < \beta < \frac{1}{\sqrt{2}}, \; k_0 \geq 1. \qquad (2.1)$$

Тогда ф.р. $\sigma(\theta) \in AC(0, 2\pi)$.

Доказательство. Известно (см. [1], стр. 165), что

$$|\Phi_n(e^{i\theta})| \geq M_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - |a_k|), \; 0 \leq \theta \leq 2\pi. \qquad (2.2)$$

Поскольку $\ln(1 - |a_k|) \geq -\dfrac{|a_k|}{1-a}$, то

$$\ln|\Phi_n(e^{i\theta})| \geq \frac{1}{1-a}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|. \qquad (2.3)$$

Выберем m так, чтобы

$$\frac{2}{1-a}\left(\sum_{k=m}^{\infty}\Lambda_k|a_k|^2\right)^{1/2} < \beta < 1, \quad \sum_{k=0}^{m-1}|a_k| \leq d, \; m > k_0 > 1.$$

Согласно (2.3) имеем

$$|\Phi_n(e^{i\theta})|^2 \geq \exp\left\{-\frac{2}{1-a}\sum_{k=0}^{m-1}|a_k|\exp\left\{-\frac{2}{1-a}\sum_{k=m}^{n-1}|a_k|\right\}\right\}. \tag{2.4}$$

Но

$$\sum_{k=m}^{n-1}|a_k| < \left\{\sum_{k=m}^{n-1}\Lambda_k|a_k|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=m}^{n-1}\Lambda_k^{-1}\right\}^{1/2} \leq \frac{\beta}{2}(1-a)\left\{\sum_{k=k_0}^{n-1}\Lambda_k^{-1}\right\}^{1/2}.$$

Применяя (2.4), получим

$$|\Phi_n(e^{i\theta})| \geq m_0 \exp\left\{-\beta\left(\sum_{k=k_0}^{n-1}\Lambda_k^{-1}\right)^{1/2}\right\}, \tag{2.5}$$

где m_0 не зависит от n и θ.

Известно (см. [1], стр. 33), что

$$\int_0^{2\pi}|\Phi_n(e^{i\theta})|^2\,d\sigma_1(\theta) \geq C_{26}\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|^2, \tag{2.6}$$

где $\sigma_1(\theta)$ — сумма функции скачков и сингулярной компоненты ф.р. $\sigma(\theta)$. Применяя (2.5) и (2.6), получим

$$\exp\left\{-\beta\left(\sum_{j=k_0}^{k}\Lambda_j\right)^{1/2}\right\}\int_0^{2\pi}d\sigma_1(\theta) \geq C_{27}\sum_{j=k}^{\infty}|a_j|^2.$$

Так как

$$\sum_{k=k_0}^{n}\lambda_k\sum_{j=k}^{\infty}|a_j|^2 = \sum_{j=k_0}^{\infty}|a_j|^2\Lambda_j,$$

то

$$\int_0^{2\pi}d\sigma_1(\theta)\sum_{k=k_0}^{n}\lambda_k\exp\left\{-\beta\left(\sum_{j=k_0}^{k}\Lambda_j\right)^{1/2}\right\} \leq$$

$$\leq C_{28}\sum_{k=k_0}^{n}\lambda_k\sum_{j=k}^{\infty}|a_j|^2 = C_{29}\sum_{j=k_0}^{\infty}\Lambda_j|a_j|^2 = C_{30}.$$

Учитывая (2.1), получим $\int_0^{2\pi}d\sigma_1(\theta) = 0$ и, следовательно, $\sigma(\theta) \in AC(0,2\pi)$.

Частные случаи.

1. Пусть $\lambda_k = 1$, $k = 0, 1, \ldots$, тогда $\Lambda_k = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j = k + 1$, $\sum_{j=0}^{k} \Lambda_j^{-1} \simeq \ln k$, и

$$\exp\left\{-\beta\sqrt{\ln k}\right\} > \exp\{-\beta \ln k\} = \left(\frac{1}{k}\right)^{\beta},$$

$$\sum \lambda_k \exp\left\{-\beta\left(\sum_{j=0}^{k}\Lambda_j\right)^{-1/2}\right\} > \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{\beta} = \infty \ (\beta < 1).$$

Этот случай впервые был рассмотрен в [21] и затем другим методом в [3].

2. Пусть $\Lambda_k = \dfrac{k}{\ln k}$, тогда при $k \geq k_0 > 1$ имеем

$$\lambda_k = \Lambda_k - \Lambda_{k-1} = \frac{\ln\left\{k\left(\frac{k-1}{k}\right)^{k}\right\}}{\ln k \ln(k-1)}.$$

Поэтому

$$\lambda_k > \frac{a}{1-a}\left[\ln k \ln(k-1)\right]^{-1}.$$

Но

$$\sum_{k=k_0}^{n} \Lambda_k^{-1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} \leq 2\ln^2 n$$

и значит

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \lambda_k \exp\left\{-\beta\left(\sum_{j=k_0}^{k}\Lambda_j^{-1}\right)^{1/2}\right\} > \frac{a}{1-a}\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{\exp\{-\beta\sqrt{2}\ln k\}}{\ln k \ln(k-1)} >$$

$$> \frac{a}{1-a}\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 k}\cdot\frac{1}{k^{\beta_1}} = \infty, \quad (\beta_1 = \beta\sqrt{2} < 1).$$

Следовательно условие (2.1) выполняется.

Заметим, что Теорема 2.1 и частный случай 2 изложены в [5]. Там доказательство Теоремы 2.1 основано на первом методе из [3]. В [1], стр. 167 доказано, что если $\sum |a_n| < \infty$, то $\sigma(\theta) \in AC(0, 2\pi)$, $d\sigma = \varphi(\theta)\, d\theta$ и вес $\varphi(\theta)$ строго положителен и непрерывен на $[0, 2\pi]$. Это условие отличается от нашего условия $\sum n|a_n|^2 < \infty$. Действительно, полагая

$$a_n = \left[(n+2)\left(\ln(n+2)\right)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}\right]^{-1}, \quad (\varepsilon < 1),$$

получим
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \quad \text{а} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 < \infty.$$

Наоборот, полагая
$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}}, & \text{если } n = m^{2\nu},\ \nu > 1,\ m = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{если } n \neq m^{2\nu} \end{cases}$$

получим $\sum a_n < \infty$, в то время как $\sum n a_n^2 = \infty$.

Рассмотрим теперь пример, иллюстрирующий частный случай 2 Теоремы 2.1.

Пусть
$$a_n = \left[(n+2)\left(\ln(n+2)\right)^{\varepsilon}\right]^{-1}, \quad \varepsilon < \frac{1}{2},$$

тогда $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n^2 = \infty$, $\sum a_n = \infty$, и
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n} a_n^2 < 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left\{(n+2)\left[\ln(n+2)\right]^{1+2\varepsilon}\right\}^{-1} < \infty, \quad \sigma(\theta) \in AC(0, 2\pi).$$

В заключение автор хотел бы выразить свою благодарность рецензенту за его замечания.

ABSTRACT. Let $\Phi_n(z) = z^n + \dots$ be the system of polynomials, satisfying the recurrence formula $\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \Phi_n^*(z)$, $\Phi_0(z) = 1$, $\Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi}_n\left(\frac{1}{z}\right)$, where the reflection coefficients $\{a_n\}_0^{\infty}$ satisfy the condition $|a_n| < 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$. As is well known, the system $\{\Phi_n(z)\}$ is orthogonal on the unit circle with respect to some finite positive Borel measure $d\sigma(\theta)$, $\sigma(\theta - 0) = \sigma(\theta)$, which is uniquely determined up to a positive constant factor. It turns out, that under some decreasing conditions on measure $\sigma(\theta)$ is absolutely continuous and the weight function $\sigma'(\theta) = \varphi(\theta)$ is continuous and satisfies some smoothness conditions. These conditions can be expressed in terms of moduli of continuity $\omega(\delta, \varphi^{(m)})$, $m = 0, 1, \dots, p$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Геронимус, Полиномы, Ортогональные на Окружности и на Отрезке, М., Физматгиз, 1958.
2. Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн, О Некоторых Вопросах Теории Моментов, Харьков 1938.
3. Б. Л. Голинский, "О связи между порядком убывания параметров ортогональных многочленов и свойствами соответствующей функции распределения," Изв. АН Армении, Математика, том 15, no. 2, стр. 127 – 144, 1980.
4. Е. М. Никишин, "Об одной оценке ортогональных многочленов," Acta Sci. Math., vol. 48, pp. 395 – 399, 1985.
5. А. В. Абраамян, "О круговых параметрах," Вестник МГУ, Математика и механика, no. 2, 1985.
6. И. А. Ибрагимов, "Об асимптотическом поведении ошибки прогноза," Теория вероятностей и ее применения, том 9, no. 4, стр. 695 – 703, 1964.

7. А. Ф. Тиман, Теория Приближения Функций Действительного Переменного, М., Физматгиз, 1960.
8. А. А. Конюшков. "Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье," Мат. сб., том 44 (86), no. 1, стр. 53 - 84, 1974.
9. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, М., Физматгиз, 1961.
10. Я. Л. Геронимус, "Полиномы, ортогональные на круге и их приложения," Зап. научно-иссл. ин-та математ. и механики ХМО, том 19, no. 4, стр. 35 - 121, 1948.
11. A. Máté, P. Nevai and V. Fotik, "Extensions of Szegös theory of orthogonal polynomials, II, Constr. Approx., vol. 3, pp. 57 - 72, 1987.
12. Б. Л. Голинский, "О проблеме Стеклова в теории ортогональных многочленов," Мат. зам., том. 15, no. 2, стр. 21 - 32, 1974.
13. В. М. Бадков, "Асимптотические свойства ортогональных многочленов," Конструктивная теория функций, София, стр. 21 - 27, 1983.
14. В. М. Бадков, "Порядок наилучшего приближения функции Сеге," Приближение функций полиномами и сплайнами, УНЦ АН СССР, Свердловск, стр. 25 - 40, 1985.
15. Е. А. Рахманов, "Об оценках роста ортогональных многочленов, вес которых ограничен от нуля," Мат. сб., том 114 (156), no.2, стр. 269 — 298, 1981.
16. Б. Л. Голинский, "Асимптотическое представление ортогональных многочленов," УМН, том 35 (212), no. 2, стр. 145 - 196, 1980.
17. С. Качмаж , Г. Штейнгауз, Теория Ортогональных Рядов, М., Физматгиз, 1958.
18. Г. Алексич, Проблемы Сходимости Ортогональных Рядов, М.,Иностр. Лит.,1963.
19. Б. Л. Голинский, "Об асимптотическом поведении ошибки прогноза," Теория вероятностей и ее применения, том 19, no. 4, стр. 724 - 739, 1974.
20. Г. Бейтман, А. Эрдейи. Высшие Трансцендентные Функции, том 1, Москва, Наука, 1965.
21. Б. Л. Голинский, И. А. Ибрагимов, "О предельной теореме Г Сеге," Изв. АН СССР, сер. матем., том 35, стр. 408 - 427, 1971.

3 Июля 1991

Харьковский авиационный институт.