ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ КЛАССА $\widetilde{W}^r H_p^\omega$ РЯДАМИ ИЗ ГЛАДКИХ СПЛАЙНОВ И ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ ИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

А. А. Китбалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 27, № 6, 1992

Хорошо известны представления функций конечной гладкости рядами из гладких сплайнов и применение этих представлений в различных задачах теории приближений (см. [1]). В настоящей заметке даётся представление сплайновыми рядами периодических функций из более общих классов $\widetilde{W}^r H_p^\omega$, у которых гладкость r-той производной задаётся в терминах интегральных p-тых модулей непрерывности. На основе этого представления вычисляется порядок сложности по Колмогорову ε-приближённого вычисления этих классов функций.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Ниже всегда : $r, k \in \mathbf{Z}_+$, $n = 2^k, 1 \leq p \leq \infty$. Через I обозначим единичный интервал $[0,1]$, $L_p(I)$ – пространство интегрируемых на I в p-той степени функций, $\|\cdot\|_{L_p(I)}$ — норма в нём.

Для $\delta \geq 0$ и однопериодической функции $x(\cdot) \in L_p(I)$ определим интегральный модуль непрерывности :

$$\omega(x(\cdot), \delta)_p = \sup_{|\tau| \leq \delta} \|x(\cdot + \tau) - x(\cdot)\|_{L_p(I)},$$

где $W_p^r(I)$ — класс функций Соболева, т. е. класс r-тых интегралов от функций из $L_p(I)$.

Определим теперь исследуемый класс функций $\widetilde{W}^r H_p^\omega(I)$.

Пусть $\omega(\cdot)$ — фиксированный модуль непрерывности. Для $r = 0$, $\widetilde{W}^0 H_p^\omega(I) = H_p^\omega(I)$ определяется как класс однопериодических функций

$x(\cdot) \in L_p(I)$, удовлетворяющих условию $\omega(x(\cdot),\delta)_p = O(\omega(\delta))$. При $r = 1,2,\ldots$, $\widetilde{W}^r H_p^\omega(I)$ есть класс r-тых периодических интегралов от функций из $H_p^\omega(I)$. (Определение и простейшие свойства модулей непрерывности, классов функций $W_p^r(I)$ и $\widetilde{W}^r H_p^\omega(I)$ можно найти, например, в [2]).

Через $\widetilde{S}_n^r(I)$ обозначим линейное пространство периодических сплайнов степени r минимального дефекта по равномерному разбиению I на $n = 2^k$ частей. В пространстве $\widetilde{S}_n^r(I)$ существует базис из B- сплайнов $\{N_{i,k}(\cdot)\}_{i=0}^{n-1}$ (см. [2]), нормированных условием $\sum\limits_{i=0}^{n-1} N_{i,k}(t) = 1$, $t \in I$.

Для величин α, β будем писать $\alpha \ll \beta$, если существует константа $c > 0$ (зависящая только от r и p) такая, что

$$\alpha \le c\beta \quad \alpha \gg \beta \Longleftrightarrow \beta \ll \alpha \quad \alpha \asymp \beta \Longleftrightarrow \alpha \ll \beta \ll \alpha.$$

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ КЛАССА $\widetilde{W}^r H_p^\omega(I)$ РЯДАМИ ИЗ ГЛАДКИХ СПЛАЙНОВ

Теорема 1. *Пусть $x(\cdot) \in \widetilde{W}^r H_p^\omega(I)$, тогда $x(\cdot)$ представима в виде сходящегося сплайнового ряда*

$$x(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} a_{i,k} N_{i,k}(\cdot),$$

где $s_k(\cdot) \in \widetilde{S}_n^r(I)$ и

$$\|s_k(\cdot)\|_{L_p(I)} \asymp 2^{-rk}\omega(x^{(r)}(\cdot),2^{-k})_p,$$

$$\|\{a_{i,k}\}_{i=0}^{n-1}\|_{l_p^n} \ll 2^{-rk+\frac{k}{p}}\omega(x^{(r)}(\cdot),2^{-k})_p.$$

Доказательство Теоремы 1 опирается на следующие три леммы.

Лемма 1. (см. [3])

$$s_k(\cdot) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,k} N_{i,k}(\cdot) \in \widetilde{S}_n^r(I) \Rightarrow \|s_k(\cdot)\|_{L_p(I)} \asymp 2^{-\frac{k}{p}} \|\{a_{i,k}\}_{i=0}^{n-1}\|_{l_p^n}. \tag{1}$$

Лемма 2. (см. [4]) *Существует проектор $S_K : L_p(I) \to \widetilde{S}_n^r(I)$ с нормой (оператора из $L_p(I)$ в $L_p(I)$) $\|S_K\| \asymp 1$.*

Лемма 3. *Для любого* $x(\cdot) \in W_p^r(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}), i \in \{0,1,...,n-1\}$ *существует полином* $p(\cdot)$ *степени* r *такой, что*

$$\|x(\cdot) - p(\cdot)\|^p_{L_p(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})} \ll n^{-rp+1} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} |x^{(r)}(t+\tau) - x^{(r)}(\tau)|^p \, d\tau dt.$$

Доказательство Леммы 3. Доказательство для $r = 0$ содержится в [5], стр. 82. Для $r = 1, 2, ...$ представим $x(\cdot)$ в виде ряда Тейлора с остаточным членом в интегральной форме :

$$x(t) = x\left(\frac{i}{n}\right) + ... + \frac{1}{(r-1)!} x^{(r-1)}\left(\frac{i}{n}\right)\left(t - \frac{i}{n}\right)^{r-1} + \frac{1}{(r-1)!}\int_{\frac{i}{n}}^{t} (t-\tau)^{r-1} x^{(r)}(\tau) d\tau$$

и возьмём

$$p(t) = x\left(\frac{i}{n}\right) + ... + \frac{1}{(r-1)!} x^{(r-1)}\left(\frac{i}{n}\right)\left(t - \frac{i}{n}\right)^{r-1} + \frac{n}{r!}\left(t - \frac{i}{n}\right)^{r} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} x^{(r)}(\xi)\, d\xi.$$

Дальнейшие выкладки аналогичны случаю $r = 0$.

Лемма 4. *Пусть* $x(\cdot) \in \widetilde{W}^r H_p^\omega(I)$, *тогда*

$$\|x(\cdot) - S_k x(\cdot)\|_{L_p(I)} \ll 2^{-kr} \omega(x^{(r)}(\cdot), 2^{-k})_p.$$

Доказательство. Доказательство основано на Леммах 2 и 3. Имеем

$$\|x(\cdot) - S_k x(\cdot)\|^p_{L_p(I)} = \sum_{i=0}^{n-1} \|x(\cdot) - S_K x(\cdot)\|^p_{L_p(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \|x(\cdot) - p_i(\cdot) - S_K(x(\cdot) - p_i(\cdot))\|^p_{L_p(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})} \le \sum_{i=0}^{n-1} \Big[\|x(\cdot) - p_i(\cdot)\|_{L_p(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})} +$$

$$+ \|S_K x(\cdot) - p_i(\cdot)\|_{L_p(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})}\Big]^p \ll \sum_{i=0}^{n-1} \|x(\cdot) - p_i(\cdot)\|^p_{L_p(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})} \ll$$

$$\ll \sum_{i=0}^{n-1} n^{-rp+1} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} |x^{(r)}(t+\tau) - x^{(r)}(\tau)|^p \, d\tau dt =$$

$$= n^{-rp+1} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \int_{0}^{1} |x^{(r)}(t+\tau) - x^{(r)}(\tau)|^p \, d\tau dt \ll$$

$$\ll n^{-rp+1} n^{-1} \sup_{|t| \le \frac{1}{n}} \int_0^1 |x^{(r)}(t+\tau) - x^{(r)}(\tau)|^p \, d\tau \ll n^{-rp} \omega^p(x^{(r)}(\cdot), \frac{1}{n})_p,$$

откуда следует искомое неравенство.

Доказательство Теоремы 1. Сопоставим функции $x(\cdot)$ из $\widetilde{W}^r H_p^\omega(I)$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k(\cdot) = S_o x(\cdot) + (S_1 x(\cdot) - S_o x(\cdot)) + \ldots + (S_{k+1} x(\cdot) - S_k x(\cdot)) + \ldots$$

Поскольку

$$\widetilde{S}_n^r(I) \subset \widetilde{S}_{2n}^r(I), \quad \text{то} \quad S_{k+1}x(\cdot) - S_k x(\cdot) = s_{k+1}(\cdot) \in \widetilde{S}_{2n}^r(I).$$

По Лемме 4, частные суммы ряда $x_N(t) = \sum_{k=0}^{N} s_k(t) = S_N x(t)$ стремятся к $x(t)$ со скоростью геометрической прогрессии.

Докажем первое неравенство Теоремы. Имеем

$$\|s_k(\cdot)\|_{L_p(I)} = \|S_{k+1}x(\cdot) - S_k x(\cdot)\|_{L_p(I)} \le$$

$$\le \|S_k x(\cdot) - x(\cdot)\|_{L_p(I)} + \|x(\cdot) - S_{k-1}x(\cdot)\|_{L_p(I)} \ll$$

$$\ll 2^{-kr}\omega(x^{(r)}(\cdot), 2^{-k})_p + 2^{-kr+r}\omega(x^{(r)}(\cdot), 2^{-k+1})_p \ll 2^{-kr}\omega(x^{(r)}(\cdot), 2^{-k})_p$$

Из первого неравенства Теоремы и Леммы 1 следует второе неравенство.

Замечание 1. При $n \le r$ все функции $s(\cdot) \in \widetilde{S}_n^r(I)$ тождественно равны нулю (см. [2]), поэтому суммирование в $\sum_{k=0}^{\infty} s_k(\cdot)$ начинается с номера $k_o = [\log_2 r]$.

3. ПОРЯДОК СЛОЖНОСТИ ПО КОЛМОГОРОВУ ПРИБЛИЖЁННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА $\widetilde{W}^r H_p^\omega(I)$

Многими авторами развиваются идеи и методы подсчёта сложности вычислительного алгоритма или задачи (см., например, [7]). В 1962 А. Н. Колмогоров [6] предложил определение сложности к задаче о вычислении непрерывной функции с точностью до ε. Подход Колмогорова основан на сведении проблемы к вычислению сложности булевых функций, которая была определена К. Шенноном в конце сороковых годов. Подробные определения, свойства и обзор известных результатов по колмогоровской сложности ε–приближённого вычисления непрерывных функций и классов непрерывных функций даны в статье Асарина [8]. В частности, в [8] содержится алгоритм, вычисляющий с точностью до ε произвольную функцию $x(\cdot) \in W_{\infty}^{\alpha}(I)$ и имеющий сложность в смысле Колмогорова

$$O\left([\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)]^{-1}\right)$$

(здесь α — произвольное положительное число). Эта же оценка остаётся верной и для классов функций $W_p^{\alpha}(I)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > \dfrac{1}{p}$ (см. [9]), и несложно обобщается на многомерный случай (см. [10]).

Опираясь на [8] М. О. Макаров вычислил порядок колмогоровской сложности класса $\widetilde{W}^r H_{\infty}^{\omega}(I)$ (доклад на математической конференции в Алуште, 1990). Приближение гладкими сплайнами, которое использовал Ю. Маковоз [9] для вычисления колмогоровской сложности, позволяет обобщить результат Макарова для классов функций $\widetilde{W}^r H_p^{\omega}(I)$ с произвольным p, $1 \leq p \leq \infty$.

Обозначим через $\widetilde{W}^r H_p^{\omega}$ подмножество тех функций из класса $\widetilde{W}^r H_p^{\omega}(I)$, для которых $\omega(x^{(r)}(\cdot), \delta) \leq \omega(\delta)$ и значения которых лежат в $[-1, 1]$, а через $K_{\varepsilon}(\widetilde{W}^r H_p^{\omega})$ — колмогоровскую сложность ε-приближённого вычисления этого класса функций.

Теорема 2. *Пусть δ — решение уравнения $\delta^r \omega(\delta) = \varepsilon$, $r > \dfrac{1}{p}$, тогда*

$$K_{\varepsilon}(\widetilde{W}^r H_p^{\omega}) \asymp \frac{\delta^{-1}}{\log_2 \delta^{-1}}.$$

Доказательство. Получение нижней оценки в Теореме 2 стандартно. Сложность ε-приближённого вычисления класса функций W оценивается через его 2ε-ёмкость $C_{2\varepsilon}(W)$ (см. [8]) : $K_{\varepsilon}(W) \gg \frac{C_{2\varepsilon}(W)}{\log_2 C_{2\varepsilon}(W)}$. Затем используется известная оценка ёмкости класса $\widetilde{W}^r H_p^{\omega}$:

$$C_{2\varepsilon}(\widetilde{W}^r H_p^{\omega}) \geq C_{2\varepsilon}(\widetilde{W}^r H_{\infty}^{\omega}) \gg \delta^{-1}.$$

Для доказательства оценки сверху заметим, что для произвольной функции $x(\cdot) \in \widetilde{W}^r H_p^{\omega}$ частные суммы ряда из гладких сплайнов $x_N(\cdot)$ построенные в Теореме 1, дают следующую оценку приближения

$$||x(\cdot) - x_N(\cdot)||_{C(I)} \ll 2^{-rN + \frac{N}{p}} \omega(2^{-N}).$$

Из Леммы 1, второго неравенства Теоремы 1 и с учётом того, что $r > \frac{1}{p}$ мы имеем :

$$\|x(\cdot) - x_N(\cdot)\|_{C(I)} = \Big\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,k} N_{i,k}(\cdot) \Big\|_{C(I)} \le$$

$$\le \sum_{k=N+1}^{\infty} \Big\| \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,k} N_{i,k}(\cdot) \Big\|_{C(I)} \ll \sum_{k=N+1}^{\infty} \max_{0 \le i \le n-1} |a_{i,k}| \le$$

$$\le \sum_{k=N+1}^{\infty} \Big(\sum_{i=0}^{n-1} |a_{i,k}|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \ll \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-kr+\frac{k}{p}} \omega(2^{-k}) \le$$

$$\le \omega(2^{-N}) \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-kr+\frac{k}{p}} \ll 2^{-Nr+\frac{N}{p}} \omega(2^{-N}).$$

Пусть $\varepsilon = 2^{-mr}\omega(2^{-m})$. Выбрав $N = [m \frac{r}{r-\frac{1}{p}}]$ будем иметь $\|x(\cdot) - x_N(\cdot)\|_{C(I)} \ll \varepsilon$. Это позволяет доказать лемму, аналогичную Лемме 2 в [9]. Дальнейшее доказательство (построение алгоритма вычисления функции $x_N(\cdot)$ и подсчёт сложности этого алгоритма) повторяет доказательство Маковоза с соотвецтвующими изменениями.

Замечание 2. Условие $r > \frac{1}{p}$ обеспечивает компактность класса $\widetilde{W}^r H_p^\omega$ в пространстве $C(I)$.

Замечание 3. Рассмотрение периодических классов функций $\widetilde{W}^r H_p^\omega(I)$ в Теоремах 1 и 2 связано лишь с упрощением технических деталей формулировок и доказательств. Утверждения обеих теорем остаются в силе и для непериодических классов функций $W^r H_p^\omega(I)$ и соответствующих им непериодических сплайнов $S_n^r(I)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Hollig, "Diameters of classes of smooth functions", Quantitative Approximation, Acad. Press, Orlando Fla., pp. 163 – 175, 1980.
2. Н. П. Корнейчук, Сплайны в Теории Приближения, Наука, Москва, 1984.
3. C. de Boor, "Splines as linear combinations of B–splines", Approximation Theory 2, Acad. Press, pp. 1 – 47, 1976.
4. C. de Boor, G. Fix, "Spline approximation by quasiinterpolants", Journal Approximation Theory, vol. 7, pp. 19 – 45, 1973.
5. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Наука, Москва, 1984.

6. А. Н. Колмогоров, “Различные подходы к оценке трудности приближённого задания и вычисления функций,” в кн. : Теория Информации и Теория Алгоритмов, Наука, Москва, стр. 199 – 204, 1984.
7. Дж. Трауб, Г. Васильковский, Х. Вожняковский, Информация, Неопределённость, Сложность, Мир, Москва, 1988.
8. Е. А. Асарин, “О сложности равномерных приближений непрерывных функций,” Успехи Матем. Наук, том 39, № 3, стр 157 – 169, 1984.
9. Yu. Makovoz, “On the Kolmogorov complexity of functions of finite smoothness”, Journal of Complexity, vol. 2, no. 2, pp. 121–130, 1986.
10. А. А. Китбалян, “О колмогоровской сложности неизотропных классов гладких функций,” Депонировано в ВИНИТИ АН СССР, № 7077 – Б89, 1989.

22 Мая 1992

Ереванский государственный университет