АСИМПТОТИКИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ГАУССОВСКИХ ПОЛЕЙ

В. Р. Фаталов

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 27, № 6, 1992

Пусть $X(t)$ - гауссовское локально однородное случайное поле с нулевым средним, заданное на компакте $T \subset \mathbb{R}^n$. В работе доказаны теоремы об асимптотике вероятности $\mathrm{P}\{\sup_{t\in T} X(t) > u\}$, $u \to \infty$. Метод исследования – т.н. "Метод двойной суммы".

ВВЕДЕНИЕ

Одной из первых работ, посвященных нахождению точной асимптотики вероятности $\mathrm{P}\{\sup_{t\in T} X(t) > u\}$, $u \to \infty$ была статья [1]. В ней был предложен эффективный метод исследования указанной вероятности для гауссовского стационарного процесса $X(t)$, $t \in [0,1]$ с правильно меняющейся в нуле ковариационной функцией. Развитие данного метода для гауссовских однородных полей было осуществлено в [2], [3]. Затем в [4] была найдена асимптотика вероятности большого выброса для гауссовского локально стационарного [5] процесса, дисперсия которого достигает абсолютного максимума в конечном числе точек. Наконец, в [6], [7] были изложены теоремы об асимптотиках больших уклонений широкого класса гауссовских локально однородных полей, дисперсия которых может достигать своего максимума на произвольном компактном множестве в $\mathbb{R}^n$.

Оказалось, что в этот класс входят широко распространенные в теории и приложениях винеровские и связанные с ними процессы и поля : многопараметрическое броуновское движение (в смысле Н. Н. Ченцова [8]), т.н. винеровский лист, а также гауссовские процессы и поля, являющиеся слабыми пределами соответствующих эмпирических процессов и полей при проверке разнообразных статистических гипотез. Асимптотические распределения супремумов последних играют важную роль, например, в теории статистик Колмогорова–Смирнова. В настоящей работе излагаются результаты [6], [7] с подробными доказательствами, особое внимание уделяется статистическим применениям.

§1. ТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМУМА ГАУССОВСКОГО НЕОДНОРОДНОГО ПОЛЯ

Введем необходимые обозначения. Пусть $e_1, e_2 ..., e_k$, $\sum_{i=1}^{k} e_i = n$ – натуральные числа, а $\alpha_1, ..., \alpha_k$ – положительные числа. Для вектора $t = (t_1, ..., t_n)$ определим величину

$$|t|_\alpha = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=E(i-1)+1}^{E(i)} t_j^2 \right)^{\alpha_i/2}, \quad E(i) = \sum_{j=0}^{i} e_j, \quad e_0 = 0. \qquad (1.1)$$

Аналогично величину $|t|_\beta$ определяют числа $f_1, ..., f_m$, $\sum_{i=1}^{m} f_i = n$, $\beta_1, ..., \beta_m$, $\beta_i > 0$, $i = 1, ..., m$. Составим векторы

$$\alpha = (\underbrace{\alpha_1, ..., \alpha_1}_{e_1 \text{ раз}}, ..., \underbrace{\alpha_k, ..., \alpha_k}_{e_k \text{ раз}}) \in \mathbb{R}^n, \quad \beta = (\underbrace{\beta_1, ..., \beta_1}_{f_1 \text{ раз}}, ..., \underbrace{\beta_m, ..., \beta_m}_{f_m \text{ раз}}) \in \mathbb{R}^n,$$

которые мы будем записывать также в виде $\alpha = (\alpha_{(1)}, ..., \alpha_{(n)})$, $\beta = (\beta_{(1)}, ..., \beta_{(n)})$.

Для невырожденной матрицы A размера $n \times n$ определим "расстояние" между t и s : $\rho_{A,\beta}(t,s) = |A(t-s)|_\beta$. Для компактного $G \subset \mathbb{R}^n$ положим

$$\rho_{A,\beta}(t,G) = \inf\{\rho_{A,\beta}(t,s) : \ s \in G\}.$$

Если $A = I$ (единичная матрица), то будем писать просто $\rho_\beta(t,s)$.

Пусть $X(t)$ – гауссовское сепарабельное случайное поле, заданное на компактном множестве $T \subset \mathbb{R}^n$, с непрерывными траекториями. Пусть $R(t,s)$, $r(t,s)$ и σ_t^2 обозначают соответственно ковариационную, корреляционную функции и дисперсию поля $X(t)$. Пусть

$$S^\varepsilon = \{t \in T : \rho(t,S) \le \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0$$

означает ε-окрестность множества $S \subset T$, а $\rho(t,s) \equiv |t-s|$ - евклидово расстояние между t и s.

В данной работе предполагаем выполненными для поля $X(t)$ следующие четыре условия (I) - (IV) :

(I). 1) Дисперсия σ_t^2 непрерывна на T и имеет место асимптотическое соотношение

$$\sigma_t = \sigma - \rho_{A,\beta}(t,T_o) + o(\rho_{A,\beta}(t,T_o)), \quad \rho_{A,\beta}(t,T_o) \to 0,$$

причем $T_o = \{t \in T : \sigma_t = \sigma\}$, где σ - максимальное значение σ_t на T.

2) Найдется такое $\mu > 0$, что

$$\mathrm{mes}\ \{t \in T : 0 < \sigma - \sigma_t \le x\} = x^\mu(1+o(1)), \quad x \downarrow 0$$

где mes - мера Лебега на $\mathbb{R}^n$. Заметим, что это условие заведомо выполняется , если множество T_o имеет гладкую границу.

3) Существует такое открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$, что $T_o \subset \overline{U} \subset T$, где $\overline{U}$ - замыкание U.

4) Условие конуса : для всех $t \in \partial T \cap \partial T_o$

$$t + \Gamma(e(t), H) \subset T,$$

где Γ - прямой круговой конус с вершиной в начале координат, фиксированного раствора ε_1 и высотой $0 < H < \infty$; $e(t)$ - единичный вектор направления оси конуса Γ а ∂T - граница множества T.

(II). Условие локальной однородности : для всех $t,s \in T_o^{\varepsilon_o}$ имеет место

$$r(t,s) = 1 - |D(t,s)(t-s)|_\alpha(1+o(1)), \quad \rho(t,s) \to 0,$$

где $D(t,s) = (d_{ij}(t,s))_{i,j=\overline{1,n}}$ - матричная функция, заданная на $T \times T$, det $D(t,t) \neq 0$ для $t \in T_o^{\varepsilon_o}$, элементы $d_{ij}(t,s)$ непрерывны на $T_o^{\varepsilon_o} \times T_o^{\varepsilon_o}$ и для всех $t,s \in T_o^{\varepsilon_o}$ либо $d_{ij}(t,s) \equiv 0$ при $|t-s| < \varepsilon'$, $\varepsilon' > 0$, либо $d_{ij}(t,t) \neq 0$.

(III). Существуют $C > 0$, $\gamma > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ такие, что для всех $t,s \in T$, $|t-s| < \varepsilon_2$ выполнено одно из следующих неравенств

$$|1 - r(t,s)| \le C \sum_{i=1}^n |t_i - s_i|^\gamma, \tag{i}$$

$$\mathbf{E}(X(t) - X(s))^2 \leq C \sum_{i=1}^{n} |t_i - s_i|^{\gamma}. \tag{ii}$$

(IV). Для любого $\tau > 0$

$$\sup\{R(t,s) : t,s \in T_o^{\varepsilon_o}, |t - s| \geq \tau\} < \sigma^2.$$

Теорема 1.1. *Пусть гауссовское непрерывное поле $X(t)$ компактно в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условиям* (I) – (IV). *Пусть далее выполнено одно из следующих двух условий :*

а) $\beta_i > \alpha_j$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., k$;

б) $\beta_{(i)} > \alpha_{(i)}$, $i = \overline{1,n}$ *и для некоторого* $\varepsilon_3 > 0$ *матрицы* $A, D(t,s)$ *диагональны,* $t, s \in T_o^{\varepsilon_o}$, $|t - s| < \varepsilon_3$.

Тогда для любой функции $\delta(u)$, *удовлетворяющей соотношениям*

$$\delta(u) \downarrow 0, \quad (\ln u)^{-1} u^2 \delta(u) \to \infty, \quad u\delta(u) \to 0, \quad \text{для } u \to \infty \tag{1.2}$$

верно асимптотическое равенство

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} = \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right] \left(\frac{u}{\sigma}\right)^{-1} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{u}{\sigma}\right)^{2e_i/\alpha_i} (2\pi)^{-1/2} H_\alpha \times$$

$$\times \int_{T_\delta(A)} \exp\left[-\frac{u^2}{\sigma^3}\rho_{A,\beta}(t,T_o)\right] |\det D(t,t)|\, dt\, (1 + o(1)), \quad u \to \infty, \tag{1.3}$$

где

$$T_\delta(A) = \{t \in T : \rho_{A,\beta}(t,T_o) \leq \delta(u)\},$$

$$0 < H_\alpha = \lim_{S\to\infty} \frac{H_\alpha(S)}{S^n} < \infty, \tag{1.4}$$

$$H_\alpha(S) = 1 + \int_0^\infty e^x \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in[0,S]^n} \chi(t) > x\right\} dx,$$

и $\chi(t)$ *– гауссовское поле с п.н. непрерывными траекториями,*

$$\mathbf{E}\chi(t) = -|t|_\alpha, \quad \mathrm{Cov}\,(\chi(t), \chi(s)) = |t|_\alpha + |s|_\alpha - |t - s|_\alpha.$$

Существование предела (1.4) доказано в [3]. Условия а) и б) являются наиболее распространенными в приложениях и во многих случаях позволяют явно вычислить асимптотику интеграла в (1.3). Остальные возможные случаи зависимости между α и β более сложны. Однако, когда T_o содержит конечное число точек, мы имеем исчерпывающий результат.

Обозначим через $\mathrm{diag}(c_1, ..., c_n)$ диагональную матрицу с c_j на главной диагонали.

Теорема 1.2. *Пусть гауссовское непрерывное поле $X(t)$, $t \in T$ удовлетворяет условиям (I) – (III) и $T_o = \{t_o\}$, t_o – внутренняя точка множества T. Пусть $D = D(t_o, t_o)$ и $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Пусть $A = \mathrm{diag}(a_1, ..., a_n)$, $a_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$ и $D = \mathrm{diag}(d_1, ..., d_n)$, $d_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$ и для некоторого целого p*

$$F(q-1) + 1 \leq p \leq F(q); \quad \alpha_{(i)} < \beta_{(i)}, \quad i = 1, ..., p;$$

$$\alpha_{(i)} > \beta_{(i)}, \quad i = p+1, ..., n; \quad 1 \leq p \leq n,$$

где

$$F(q) = \sum_{i=1}^{q} f_i, \quad F(0) = 0.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} = \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right]\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{-1}\prod_{i=1}^{p}\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{2/\alpha_{(i)}}\left(\frac{u^2}{\sigma^3}\right)^{-1/\beta_{(i)}}\frac{|d_i|}{|a_i|}\times$$

$$\times\prod_{i=p+1}^{n}\sigma^{-1/\beta_{(i)}}|a_i| H_{\alpha^{(p)}} 2^{q-1/2}\pi^{(p-1)/2}\prod_{i=1}^{q-1}\Gamma\left(\frac{f_i}{\beta_i}\right)\left(\beta_i\Gamma\left(\frac{f_i}{2}\right)\right)^{-1}\times$$

$$\times\Gamma\left(\frac{p-F(q-1)}{\beta_q}\right)\left(\beta_q\Gamma\left(\frac{p-F(q-1)}{2}\right)\right)^{-1}(1+o(1)), \quad u \to \infty,$$

где $\alpha^{(p)} = (\alpha_{(1)}, ..., \alpha_{(p)})$.

(ii) *Если $k = m$, $e_i = f_i$, $\alpha_i = \beta_i$, $i = 1, 2, ..., k$, то*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} = \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right]\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{-1}(2\pi)^{-1/2} H_{\alpha}^{\frac{1}{2}\mathbf{1}}(DA^{-1})(1+o(1)), \quad u \to \infty,$$

где $\mathbf{1} = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^k$,

$$0 < H_{\alpha}^{b}(C) = \lim_{\lambda\to\infty} H_{\alpha}^{b}((-\lambda, \lambda); C) < \infty,$$

величины H_{α}^{b} определены ниже в Лемме 2.2.

(iii) *Пусть для некоторого целого p, $0 \leq p \leq n$*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix},$$

где A_1, D_1 *– матрицы размера* $p\times p$ *и* A_2, D_2 *– матрицы размера* $(n-p)\times(n-p)$. *Если*

$$p = F(q) = E(v), \quad e_{v+1} = f_{q+1}, \dots, e_k = f_m,$$

$$\alpha_{(i)} < \beta_{(j)}, \quad i,j = 1,\dots,p; \qquad \alpha_{(i)} = \beta_{(i)}, \quad i = p+1,\dots,n,$$

то

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} =$$

$$= \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right]\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{-1}\prod_{i=1}^{v}\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{2e_i/\alpha_i}\prod_{i=1}^{q}\left(\frac{u^2}{\sigma^3}\right)^{-f_i/\beta_i}\Gamma\left(\frac{f_i}{\beta_i}\right)\left(\beta_i\Gamma\left(\frac{f_i}{2}\right)\right)^{-1}\times$$

$$\times|\det D_1|\cdot|\det A_1|^{-1}2^{q-1/2}\pi^{(p-1)/2}H_{\alpha(p)}H^{\frac{1}{\sigma}1}_{\alpha(p,n)}(D_2A_2^{-1})(1+o(1)), \quad u\to\infty,$$

где $\alpha^{(p,n)} = (\alpha_{(p+1)},\dots,\alpha_{(n)})$.

(iv) *Пусть в условиях пункта* (iii) *вместо (1.5) выполнено*

$$e_{v+1} = f_{q+1},\dots,e_k = f_m, \quad \alpha_{(i)} > \beta_{(i)}, \quad i = 1,\dots,p; \quad \alpha_{(i)} = \beta_{(i)}, \quad i = p+1,\dots,n.$$

Тогда (при $u\to\infty$*)*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} = \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right]\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{-1} H^{\frac{1}{\sigma}1}_{\alpha(p,n)}(D_2A_2^{-1})(2\pi)^{-1/2}(1+o(1)).$$

Замечание 1.1. Пусть дисперсия σ_t^2 гауссовского непрерывного поля $X(t)$, определенного на компакте T достигает своего максимума σ^2 в конечном числе внутренних точек $s_1,\dots,s_l\in T$. Пусть для каждой точки s_i, $i=1,\dots,l$ выполнены условия (I) – (III) с величинами $A_i, \beta^i, D_i, \alpha^i$, $i = 1,2,\dots,l$. Пусть V_i – достаточно малые взаимно непересекающиеся компактные окрестности точек s_i, $i=1,\dots,l$. Обозначим через $L_i(u, A_i, \beta^i, D_i, \alpha^i, \sigma)$ точную асимптотику вероятности

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in V_i} X(t) > u\right\}, \qquad u\to\infty,$$

вычисленную по Теореме 1.2. Тогда

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} = \sum_{i=1}^{l} L_i(u, A_i, \beta^i, D_i, \alpha^i, \sigma)(1+o(1)), \quad u\to\infty.$$

Некоторые численные значения констант $H_\alpha, H_\alpha^b(C)$ будут даны в следующем параграфе.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В этом параграфе мы изложим основные результаты, на которых базируется наш метод исследования асимптотик.

Теорема 2.1. (Д. Слепян, [10]) *Пусть $X(t), Y(t)$ – гауссовские сепарабельные функции с нулевыми средними, заданные на некотором параметрическом множестве T. Если*

$$\mathbf{E}X^2(t) = \mathbf{E}Y^2(t), \quad \mathbf{E}X(t)X(s) \le \mathbf{E}Y(t)Y(s), \quad t, s \in T,$$

то

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} \ge \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} Y(t) > u\right\}.$$

Введем следующие обозначения :

$$K(s,t) = \{x \in \mathbb{R}^n : s_i \le x_i \le t_i,\ i = 1, 2, ..., n\}, \quad t = (t_1, ..., t_n), \quad s = (s_1, ..., s_n),$$

$$K(t) = K(0,t), \quad K^a(t) = K(t) + a = \{x + a : x \in K(t)\}, \quad a \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 2.1. (В. И. Питербарг, [9]) *Пусть $X(t)$ – гауссовское сепарабельное поле, заданное на параллелепипеде $K(t)$, $T = (T_1, ..., T_n)$, где $T_i = T_i(u)$, $i = \overline{1,n}$ – монотонные функции от $u \ge 0$, и существуют $\gamma, T_o > 0$ такие, что $T_i(u) \ge T_o u^{-2/\gamma}$, $i = 1, ..., n$. Предположим, что*

$$\sup\{|\mathbf{E}X(t)| : t \in K(T)\} \le m < \infty, \quad \sup\{\mathbf{D}X(t) : t \in K(T)\} \le \sigma^2 < \infty$$

и для некоторого $L > 0$ поле $X(t)$ удовлетворяет одному из следующих условий :

(i) *Корреляционная функция $r(t,s)$ поля $X(t)$ удовлетворяет неравенству*

$$1 - r(t,s) \le L \sum_{i=1}^{n} |t_i - s_i|^{\gamma}, \quad t, s \in K(T).$$

(ii) *Функции $\mathbf{E}X(t)$, $\mathbf{D}X(t)$ непрерывны и*

$$\mathbf{D}(X(t) - X(s)) \le L \sum_{i=1}^{n} |t_i - s_i|^{\gamma}, \quad t, s \in K(T).$$

Тогда найдется константа C, зависящая лишь от $L, \gamma, n, T_0, m, \sigma$ такая, что для всех $u > 0$ имеет место оценка

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{K(T)} X(t) > u\right\} \le C \prod_{i=1}^{n} \left[T_i u^{\frac{2n}{\gamma}-1} \exp\left[-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}\right]\right].$$

Следствие 2.1. Пусть $X(t)$, $t \in K(T)$ – гауссовское поле с непрерывными траекториями и для некоторых $m, \sigma^2, C, \gamma > 0$

$$|\mathbf{E}X(t)| \le m < \infty, \quad \mathbf{D}X(t) \le \sigma^2 < \infty,$$

$$\mathbf{D}(X(t) - X(s)) \le C \sum_{i=1}^{n} |t_i - s_i|^{\gamma}, \quad t, s \in K(T).$$

Пусть, кроме того, существует $\delta > 0$ такое, что для всех $t, s \in K(T)$

$$(\mathbf{D}X(t)\mathbf{D}X(s))^{-1/2} \operatorname{cov}(X(t), X(s)) > -1 + \delta.$$

Тогда найдется такое $\rho > 0$, что для любого замкнутого $A \subset K(T)$ имеет место

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{A} |X(t)| > u\right\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{A} X(t) > u\right\} + \mathbf{P}\left\{\sup_{A}(-X(t)) > u\right\} +$$

$$+O\left(\exp\left[-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}(1+\rho)\right]\right), \quad u \to \infty.$$

Доказательство. Очевидно,

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{A} X(t) > u, \sup_{A}(-X(t)) > u\right\} \le \mathbf{P}\left\{\sup_{A\times A}(X(t) - X(s)) > 2u\right\}.$$

Дисперсия и модуль математического ожидания поля $X(t) - X(s)$ не превосходят величины $2\sigma^2(2-\delta)$ и $2m$. Теперь остается применить Лемму 2.1 для куба $K(T) \times K(T)$, взяв ρ таким, что $(2-\delta)^{-1} > (\rho+1)/2$. Следствие доказано.

Пусть числа $e_1, \ldots, e_k$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ определяют величину $|t|_\alpha$ по формуле (1.1). Тогда будем иметь представление $\mathbb{R}^n$ в виде прямого произведения ортогональных подпространств : $\mathbb{R}^n = \bigotimes_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{e_i}$.

Определим следующие преобразования пространства $\mathbb{R}^n$:

$$g_u \mathbb{R}^n = \bigotimes_{i=1}^{k} \left(u^{-2/\alpha_i} \mathbb{R}^{e_i}\right), \quad u > 0;$$

$$h_b \mathbb{R}^n = \bigotimes_{i=1}^{k} \left(b_i^{1/\alpha_i} \mathbb{R}^{e_i}\right), \quad b = (b_1, ..., b_k), \quad b_i \geq 0, \quad i = 1, ..., k,$$

где $(h\mathbb{R}^e)$ означает гомотетию пространства $\mathbb{R}^e$ относительно начала координат с коэффициентом h. Отметим, что $|g_u t|_\alpha = u^{-2}|t|_\alpha$.

Лемма 2.2. (В. И. Питербарг [9]) *Пусть $X(t)$ – гауссовское однородное поле на $\mathbb{R}^n$ с нулевым средним и непрерывными траекториями. Предположим, что для некоторых $e_i, \alpha_i > 0$, $i = \overline{1,k}$ и невырожденной матрицы C ковариационная функция $r(t)$ поля $X(t)$ удовлетворяет условию*

$$r(t) = 1 - |Ct|_\alpha + o(|Ct|_\alpha), \quad t \to 0.$$

Тогда для любых $T_1 \geq 0, ..., T_n \geq 0$, $S_1 \leq 0, ..., S_n \leq 0$, $T = (T_1, ..., T_n)$, $S = (S_1, ..., S_n)$ имеет место

$$\lim_{u \to \infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{g_u K(S,T)} X(t)(1 + |h_b t|_\alpha)^{-1} > u\right\} \exp(u^2/2)\sqrt{2\pi}u = H_\alpha^b((S,T);C),$$

где

$$H_\alpha^b((S,T);C) = 1 + \int_0^\infty e^x \mathbf{P}\left\{\sup_{C[K(S,T)]} (\chi(t) - |h_b(C^{-1}t)|_\alpha) > x\right\} dx,$$

$$C[K(S,T)] = \{Ct : t \in K(S,T)\}$$

и $\chi(t)$ определено в Теореме 1.1.

Доказательство Леммы 2.2 в случае, когда $C = I$ можно найти в [9]. Для произвольной невырожденной матрицы утверждение леммы получается заменой переменных. Для краткости обозначим

$$H_\alpha(T;C) = H_\alpha^0((0,T);C), \quad H_\alpha(S,T) = H_\alpha^0((S,T);I), \quad H_\alpha(T) = H_\alpha(0,T). \quad (2.1)$$

Для множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ и для вектора α из (1.1) определим

$$\rho_\alpha(A, B) = \inf\{|t - s|_\alpha : t \in A, s \in B\}.$$

Имеем

$$\rho_\alpha(g_u A, g_u B) = u^{-2}\rho_\alpha(A, B).$$

Определение 2.1. Будем говорить, что ковариационная функция $r(t,s)$, $t,s \in T$ некоторого поля удовлетворяет обсбщенному условию локальной стационарности (ОЛС), если существуют $\epsilon_r, D_1, D_2 > 0$ такие, что для всех $t,s \in T$, $|t-s| < \epsilon_r$ имеет место

$$1 - D_1|t-s|_{\alpha'} \geq r(t,s) \geq 1 - D_2|t-s|_{\alpha''},$$

где

$$\alpha^i = \Bigg(\underbrace{\alpha_1^i, \dots, \alpha_1^i}_{e_1^i}, \dots, \underbrace{\alpha_{k^i}^i, \dots, \alpha_{k^i}^i}_{e_{k^i}^i}\Bigg) = (\alpha_{(1)}^i, \dots, \alpha_{(n)}^i),$$

$$\alpha_j^i > 0, \quad j = 1, \dots, k^i, \quad i = ', ''.$$

Сформулируем теперь еще один нужный нам результат, имеющий самостоятельный интерес. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $l = (l_1, \dots, l_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, $b_i > 0$. Обозначим через $N_-(b, A)$ число параллелепипедов вида $K(b) + l \cdot b$, $l \cdot b = (l_1 b_1, \dots, l_n b_n)$, содержащихся в A и через $N_+(b, A)$ – число параллелепипедов того же вида, имеющих с A непустое пересечение. Пусть $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$.

Определение 2.2. ([9]) Систему множеств $A_u \subset \mathbb{R}^n$, $u \geq 0$ назовем равномерно измеримой, если каждое из них измеримо по Жордану и равномерно по u

$$\prod_{i=1}^n \Delta_i (N_+(\Delta, A_u) - N_-(\Delta, A_u))[\operatorname{mes}(A_u) + (\operatorname{mes}(A_u))^{-1}] \to 0, \quad \Delta \to 0.$$

Пусть $\mathcal{F}_\delta$ означает класс монотонных функций f на $[0, \infty)$ таких, что

$$u^{-1} f(u) \to 0 \text{ при } u \to \infty \quad \text{и} \quad \liminf_{u\to\infty} \exp(\delta u^2) f(u) > 0.$$

Теорема 2.2. (Ю. К. Беляев, В. И. Питербарг) *Предположим, что ковариационная функция $r(t)$ гауссовского однородного поля $X(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ с нулевым средним имеет представление*

$$r(t) = 1 - |Ct|_\alpha + o(|Ct|_\alpha), \quad t \to 0,$$

где C – невырожденная $n \times n$ матрица. Предположим также, что система замкнутых множеств $\{A_u, u \geq 0\}$ удовлетворяет условиям

а) для любого $\varepsilon > 0$

$$\sup\{r(t-s) : t, s \in A_u, u \geq 0, |t-s| \geq \varepsilon\} < 1;$$

б) система множеств $\{CA_u, u \geq 0\}$ равномерно измерима, где $CA_u = \{Ct : t \in A_u\}$.

Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что для произвольной $f \in \mathcal{F}_\delta$ имеет место

$$\lim_{u\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{C^{-1}g_{f(u)}CA_u} X(t) > u\right\} \exp(u^2/2)u \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{u}{f(u)}\right)^{-2e_i/\alpha_i} \frac{\sqrt{2\pi}}{\mathrm{mes}\,(A_u)} =$$

$$= H_\alpha |\det C|, \tag{2.2'}$$

где

$$0 < H_\alpha = \lim_{S\to\infty} \frac{H_\alpha(\mathbf{S})}{S^n} < \infty, \quad \mathbf{S} = (S, ..., S) \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство Теоремы 2.2 можно найти в [9, гл. 2]. Из Леммы 5 работы [3] следует более общее соотношение

$$\lim_{T_i\to\infty, i=\overline{1,n}} H_\alpha(T; C) \Big/ \left(|\det C| \prod_{i=1}^{n} T_i\right) = H_\alpha, \quad T = (T_1, ..., T_n). \tag{2.2}$$

Для оценивания двойных сум в §3 нам понадобятся следующие два утверждения.

Лемма 2.3. *Пусть ковариационная функция $r(t,s)$ гауссовского поля $X(t)$, $t \in T \subset \mathbb{R}^n$ с нулевым средним удовлетворяет условию ОЛС. Пусть $\Delta = \Delta(u) = (\Delta_1(u), ..., \Delta_n(u))$ – непрерывная вектор-функция и*

$$\Delta_i(u) \downarrow 0, \quad \Delta_i(u) u^{2/\alpha''_{(i)}} \to \infty, \quad i = 1, ..., n$$

при $u \to \infty$. Предположим, что векторы $t_0 = t_0(u) \in \mathbb{R}^n$, $s_0 = s_0(u) \in \mathbb{R}^n$ таковы, что $t_0 \downarrow 0$, $s_0 \downarrow 0$ при $u \to \infty$ и множества $K^{t_0}(\Delta), K^{s_0}(\Delta) \subset T$ не пересекаются .

Тогда существуют константы $0 < C < \infty$, $u_0 > 0$ такие, что для любых $a, b > 0$, $u > u_0$ имеет место оценка

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{K^{t_0}(\Delta)} X(t) > au, \sup_{K^{s_0}(\Delta)} X(t) > bu\right\} \leq$$

$$\le C \text{ mes } (K^{t_\bullet}(\Delta)) \text{ mes } (K^{s_\bullet}(\Delta)) \prod_{i=1}^{k''} (u \max(a,b))^{4e_i''/\alpha_i''} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{u^2}{8}(a+b)^2[1+\frac{D_1}{2}\rho_{\alpha'}(K^{t_\bullet}(\Delta), K^{s_\bullet}(\Delta))]\right\}(a+b)^{-1}u^{-1}.$$

Доказательство Леммы 2.3 аналогично доказательству Леммы 6.6 из [9], с дополнительным использованием Теоремы 2.2.

Лемма 2.4. *Пусть поле $X(t)$ удовлетворяет условиям Леммы 2.3 с той же самой функцией $\Delta(u)$. Предположим, что векторы $t_0 = (t_{01}, ..., t_{0n})$, $s_0 = (s_{01}, ..., s_{0n})$ таковы, что $|t_{0i} - s_{0i}|$ равно либо Δ_i, либо нулю, $i = 1, ..., n$, но $\rho(K^{t_\bullet}(\Delta), K^{s_\bullet}(\Delta)) = 0$. Пусть $\Delta_0(u)$ - непрерывная функция такая, что при $u \to \infty$*

$$\Delta_0(u) \downarrow 0, \quad \Delta_0(u)/\Delta_i(u) \to 0, \quad \Delta_0(u)u^{2/\alpha_{(i)}'} \to \infty, \quad i = 1, ..., n.$$

Пусть $(i = 1, ..., n)$

$$\Delta_i' = \begin{cases} \Delta_i, & \text{если } |t_{0i} - s_{0i}| = 0, \\ \Delta_0, & \text{если } |t_{0i} - s_{0i}| = \Delta_i, \end{cases} \qquad \Delta_i'' = \begin{cases} \Delta_i, & \text{если } t_{0i} - s_{0i} = -\Delta_i, \\ 0, & \text{если } t_{0i} - s_{0i} = 0, \\ -\Delta_i, & \text{если } t_{0i} - s_{0i} = \Delta_i. \end{cases}$$

Тогда найдется константа $C > 0$ такая, что для любых $a, b > 0$ и для достаточно больших u имеет место оценка

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{K^{t_\bullet}(\Delta)} X(t) > au, \sup_{K^{s_\bullet}(\Delta)} X(t) > bu\right\} \le \mathbf{P}\left\{\sup_{\tilde{K}(\Delta)} X(t) > bu\right\} +$$

$$+ C \text{ mes } (K^{t_\bullet}(\Delta)) \text{ mes } (K^{s_\bullet}(\Delta) \setminus \tilde{K}(\Delta)) \prod_{i=1}^{k''} (u \max(a,b))^{4e_i''/\alpha_i''} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{u^2}{8}(a+b)^2(1+\frac{D_1}{2}\Delta_0^{\alpha'})\right](a+b)^{-1}u^{-1},$$

где $\tilde{K}(\Delta) = K^{t_\bullet}(\Delta') + \Delta'' \subset K^{s_\bullet}(\Delta)$ и $\alpha' = \max_{1 \le i \le k'} \alpha_i'$.

Утверждение Леммы 2.4 можно получить, используя Лемму 6.6 из [9]. Теперь укажем некоторые свойства величин $H_\alpha^b((S,T);C)$, введенных в Лемме 2.2. Нетрудно видеть, что

$$H^b_\alpha((S,T);C) = \mathbf{E}\exp\left[\sup_{C[K(S,T)]}(\chi(t) - |h_b(C^{-1}t)|_\alpha)\right]. \qquad (2.3)$$

Поле $\chi(t)$ можно рассматривать как сумму k независимых гауссовских полей $\chi_j(t^j)$, $t^j = (t_{E(j-1)+1}, ..., t_{E(j)})$, $j = 1, ..., k$, где

$$E(j) = \sum_{i=1}^{j} e_i, \quad \mathbf{E}\chi_j(t^j) = -|t^j|^{\alpha_j} = -\left(\sum_{i=E(j-1)+1}^{E(j)} t_i^2\right)^{\alpha_j/2}.$$

$$\mathrm{cov}\,(\chi_j(t^j), \chi_j(s^j)) = |t^j|^{\alpha_j} + |s^j|^{\alpha_j} - |t^j - s^j|^{\alpha_j}.$$

Пусть матрица C диагональна, т.е. $C = \mathrm{diag}(c_1, ..., c_n)$. Обозначая $c = (c_1, ..., c_n)$, $C^j = \mathrm{diag}(c_{E(j-1)+1}, ..., c_{E(j)})$, $S^j = (S_{E(j-1)+1}, ..., S_{E(j)})$ и учитывая (2.3) и равенство $C[K(S,T)] = K(c\cdot S, c\cdot T)$, получим факторизацию

$$H^b_\alpha((S,T);C) = \prod_{j=1}^{k} H^{b_j}_{\alpha^j}((S^j,T^j);C^j), \quad \alpha^j = (\alpha_j, ..., \alpha_j) \in \mathbb{R}^{e_j}, \qquad (2.4)$$

где $c\cdot S = (c_1S_1, ..., c_nS_n) \in \mathbb{R}^n$.

В частности, имеем

$$H^b_\alpha((S,T);C) = \prod_{j=1}^{v} H_{\alpha^j}(c^j\cdot S^j, c^j\cdot T^j) \prod_{j=v+1}^{k} H^{b_j}_{\alpha^j}((S^j,T^j);C^j), \qquad (2.5)$$

где $b = (0, ..., 0, b_{v+1}, ..., b_k)$ и $c^j = (c_{E(j-1)+1}, ..., c_{E(j)})$.

Важное значение для асимптотик распределений супремума гауссовского процесса имеет предельное поведение величин $H^b_\alpha((-\mathbf{S},\mathbf{S});C)$, $H_\alpha(\mathbf{S})$, $\mathbf{S} = (S, ..., S)$, $S \to \infty$. В Теореме 2.2 указано на существование конечного предела $H_\alpha = \lim\limits_{S\to\infty} H_\alpha(\mathbf{S})/S^r$. В процессе доказательства Теоремы 1.2 будет установлено существование конечного и положительного предела

$$H^b_\alpha(C) = \lim_{S\to\infty} H^b_\alpha((-\mathbf{S},\mathbf{S});C),$$

где $b_j \neq 0$, $j = 1, ..., k$.

Пусть $H^b_\alpha = H^b_\alpha(I)$. В силу (2.4) получаем для $C = \mathrm{diag}\,(c_1, ..., c_n)$

$$H^b_\alpha(C) = \prod_{i=1}^{k} H^{b_i}_{\alpha^i}(C^i), \quad H_\alpha = \prod_{i=1}^{k} H_{\alpha^i}, \qquad (2.6)$$

Наконец укажем, что известны следующие частные случаи :

1) если $e_1 = \cdots = e_n = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$, то $H_1 = 1$, $H_1^1 = 2^n$;

2) если $e_1 = \cdots = e_n = 1$, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 2$, то $H_2 = \pi^{-n/2}$, $H_2^1 = 2^{n/2}$, где $\mathbf{2} = (2, ..., 2) \in \mathbb{R}^n$.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1.1 И 1.2

Здесь мы полностью докажем Теорему 1.1 и утверждение (ii) Теоремы 1.2. Вкратце укажем на отличие в доказательстве других утверждений Теоремы 1.2. Основные идеи доказательства теорем типа 1.1 и 1.2, основанные на методе двойных сумм, заключаются в следующем :

1) мы показываем, что искомая вероятность имеет асимптотику, совпадающую с асимптотикой вероятности выхода траектории гауссовского поля за высокий уровень на множестве $T_\delta(A)$;

2) разбиваем множество T_δ решеткой, измельчающейся с ростом u, и применяем неравенство Бонферрони ;

3) используя теоремы Слепяна и Беляева–Питербарга, находим асимптотики соответствующих сумм ;

4) применяя результаты §2, доказываем, что двойная сумма в неравенстве Бонферрони является по отношению к найденной асимптотике бесконечно малой более высокого порядка.

Следующие три леммы справедливы для произвольных α и β, а $\delta(u)$ удовлетворяет условию (1.2).

Лемма 3.1. *Пусть $T_\delta = T_\delta(I)$, $t_0 = (t_{01}, ..., t_{0n})$,*

$$T_{t_0} = \left\{ t \in T : |t_i - t_{0i}| \le (f_j)^{-1/2}(\delta/m)^{1/\beta_j},\ F(j-1) + 1 \le i \le F(j),\ j = \overline{1,m} \right\},$$

$$\bar{T}_{t_0} = \left\{ t \in T : |t_i - t_{0i}| \le \delta^{1/\beta_{(i)}},\ i = 1, ..., n \right\}, \quad F(j) = \sum_{i=1}^{j} f_i, \quad F(0) = 0.$$

Тогда для некоторых констант $C_1, C_2 > 0$ имеет место

$$\bigcup_{t \in T_0} T_t \subset T_\delta \subset \bigcup_{t \in T_0} \bar{T}_t, \quad C_1 \prod_{i=1}^{m} \delta^{f_i/\beta_i} \le \text{ mes } (T_\delta) \le C_2.$$

Доказательство. Для достаточно больших u и для некоторого $\varepsilon_0 > 0$

имеет место $T_\delta \subset T_o^{\varepsilon_o}$. Кроме того, в силу компактности T_o и непрерывности функции $\rho_{A,\beta}(t,s)$, для любого $t \in T$ найдется точка $s_t \in T_o$ такая, что $\rho_{A,\beta}(t,T_o) = \rho_{A,\beta}(t,s_t)$. Отсюда легко получаются утверждения леммы.

Здесь и далее мы полагаем $\sigma = 1$.

Лемма 3.2. *Для любой функции $\delta(u)$, удовлетворяющей (1.2), имеет место*

$$\lim_{u\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} / \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T_\delta(A)} X(t) > u\right\} = 1.$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta(A)} X(t) > u\right\} + \mathbf{P}\left\{\sup_{T\setminus T_\delta(A)} X(t) > u\right\}. \tag{3.1}$$

Разобъем множество $T \setminus T_\delta(A)$ на кубы K_i со стороной $\varepsilon_2/\sqrt{n}$, где ε_2 из условия (III). Пусть $N < \infty$ – число таких кубов, покрывающих $T \setminus T_\delta(A)$. Тогда

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{T\setminus T_\delta(A)} X(t) > u\right\} \le N \max_{1\le i\le N} \mathbf{P}\left\{\sup_{K_i\cap(T\setminus T_\delta(A))} X(t) > u\right\}. \tag{3.2}$$

В силу условия (III) поле $X(t)$, $t \in K_i$ удовлетворяет предположениям Леммы 2.1. Для достаточно больших u по условию (I) имеем

$$\sup\{\sigma_t^2 : t \in K_i \cap (T \setminus T_\delta(A))\} \le 1 - \delta(u)/2.$$

Следовательно, применяя Лемму 2.1, получим

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{K_i\cap(T\setminus T_\delta(A))} X(t) > u\right\} \le C_1 u^{2n/\gamma-1} \exp\left[-\frac{u^2}{2(1-\delta/2)^2}\right] = o\left(u^{-1}\exp[-\frac{u^2}{2}]\right).$$

Последнее соотношение верно в силу выбора $\delta(u)$. В то же время, для произвольной точки $t_o \in T_o$ имеем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta(A)} X(t) > u\right\} \ge \mathbf{P}\{X(t_o) > u\} = (\sqrt{2\pi}u)^{-1}\exp(-u^2/2)(1+o(1)), \quad u\to\infty.$$

Из последних двух формул и (3.1), (3.2) получаем утверждение леммы.

Обозначим

$$X^c(t) = X(t)\sigma_c(t)/\sigma_t, \quad \sigma_c(t) = (1 + c\rho_{A,\beta}(t,T_o))^{-1}, \quad c > 0. \tag{3.3}$$

Лемма 3.3. *Для любого $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства*

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} X^{1+\varepsilon}(t) > u\right\}}{\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} X(t) > u\right\}} \le 1 \le \liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} X^{1-\varepsilon}(t) > u\right\}}{\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} X(t) > u\right\}}.$$

Доказательство. В силу условия (I), для любого $\varepsilon > 0$ и для достаточно больших u имеем $\sigma_{1+\varepsilon}(t) \le \sigma(t) \le \sigma_{1-\varepsilon}(t)$, $t \in T_\delta$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} X^{1+\varepsilon}(t) > u\right\} \le \mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} X(t) > u\right\} \le \mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} X^{1-\varepsilon}(t) > u\right\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.3 показывает, что для нахождения искомой асимптотики нужно вычислить асимптотику вероятности $\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} X^c(t) > u\right\}$ для значений c близких к 1.

Доказательство Теоремы 1.1. Преобразование масштаба и нормировка подсказывают нам, что можно ограничиться случаем $A = I$ и $\sigma = 1$. Для единой записи доказательства обоих вариантов Теоремы 1.1 введем следующие обозначения

$$\alpha^i = \Big(\underbrace{\alpha_1^i, \dots, \alpha_1^i}_{e_1}, \dots, \underbrace{\alpha_k^i, \dots, \alpha_k^i}_{e_k}\Big) = (\alpha_{(1)}^i, \dots, \alpha_{(n)}^i), \quad i = {}', {}'', \tag{3.4}$$

где

$$\alpha_i' = \begin{cases} \bar\alpha, & \text{вариант а)} \\ \alpha_i, & \text{вариант б)}, \end{cases} \qquad \bar\alpha = \max_{1\le i\le k} \alpha_i,$$

$$\alpha_i'' = \begin{cases} \alpha_0, & \text{вариант а)} \\ \alpha_i, & \text{вариант б)}, \end{cases} \qquad \alpha_0 = \min_{1\le i\le k} \alpha_i.$$

Итак, для обоих вариантов $\beta_{(i)} > \alpha'_{(i)}$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть $\Delta(u) = (\Delta_i)$, $i = \overline{1,n}$ – непрерывная вектор-функция, для которой при $u \to \infty$ выполнено

$$\Delta_i(u) \downarrow 0, \quad \Delta_i^{-\beta_{(i)}}\delta \to \infty, \Delta_i u^{2/\alpha'_{(i)}} \to \infty, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.5}$$

Разобьем множество T_δ измельчающейся с ростом u решеткой, образованной множествами

$$K_l(\Delta) = K(\Delta) + l \cdot \Delta = \{t \in T : l_i\Delta_i \le t_i \le (l_i + 1)\Delta_i, \quad i = 1, \dots, n\},$$

где $l \in Z^n$, Z^n - решетка точек с целочисленными координатами в $\mathbb{R}^n$. Применяя неравенство Бонферрони, получаем

$$\sum_{l \in \mathcal{L}^+} \mathbf{P}\left\{\sup_{K_l(\Delta)} X^c(t) > u\right\} \geq \mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} X^c(t) > u\right\} \geq \tag{3.6}$$

$$\geq \sum_{l \in \mathcal{L}^-} \mathbf{P}\left\{\sup_{K_l(\Delta)} X^c(t) > u\right\} - \sum_{l,l' \in \mathcal{L}^+, l \neq l'} \mathbf{P}\left\{\sup_{K_l(\Delta)} X^c(t) > u,\ \sup_{K_{l'}(\Delta)} X^c(t) > u\right\},$$

где

$$\mathcal{L}^+ = \{l : K_l(\Delta) \cap T_\delta \neq \emptyset\}, \quad \mathcal{L}^- = \{l : K_l(\Delta) \subset T_\delta\}.$$

Вследствие условия (II), для каждого $l \in \mathcal{L}^+$ функция $|D(t,s)(t-s)|_\alpha$ равномерно непрерывна на компакте $K_l \times K_l$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует u_o такое, что для всех $u > u_o$ и для всех $t, s \in K_l(\Delta)$ имеет место

$$|D^-(t_l,t_l)(t-s)|_\alpha \leq |D(t,s)(t-s)|_\alpha \leq |D^+(t_l,t_l)(t-s)|_\alpha, \tag{3.7}$$

где $t_l \in K_l(\Delta)$ выбирается произвольно и

$$D^\pm(t_l,t_l) = ((1 \pm \varepsilon) d_{ij}(t_l,t_l))_{ij=\overline{1,n}}.$$

В силу равномерной непрерывности функции $\rho_{A,\beta}$ на компакте K_l, для любого $\varepsilon > 0$ найдется u_1 такое, что для всех $u > u_1$ и для всех $t \in K_l(\Delta)$ имеет место

$$(1-\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t_l, T_o) \leq \rho_{A,\beta}(t, T_o) \leq (1+\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t_l, T_o). \tag{3.8}$$

Для каждого $l \in \mathcal{L}^+$ обозначим через $Y^\pm_{l,\Delta}(t)$ однородные гауссовские поля с нулевыми средними, единичными дисперсиями и ковариационными функциями $r^\pm_{l,\Delta}(t) = \exp[-|D^\pm(t_l,t_l)t|_\alpha]$. В силу (3.7) для любого $\varepsilon > 0$, всех $t, s \in K_l(\Delta)$ и для достаточно больших u имеем

$$r^+_{l,\Delta}(t-s) \leq r(t,s) \leq r^-_{l,\Delta}(t-s).$$

По Теореме 2.1 с учетом (3.8) получаем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \in K_l} Y^-_{l,\Delta}(t)\sigma_{c+\varepsilon}(t_l) > u\right\} \leq \mathbf{P}\left\{\sup_{t \in K_l} X^c(t) > u\right\} \leq$$

$$\leq \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in K_l} Y^{+}_{l,\Delta}(t)\sigma_{c-\varepsilon}(t_l) > u\right\}. \tag{3.9}$$

Для краткости значки "$\pm$" и "$\pm\varepsilon$" писать не будем. Имеем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in K_l} Y_{l,\Delta}(t) > \frac{u}{\sigma_c(t_l)}\right\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{D(t_l,t_l)[K_l]} Y(t) > \frac{u}{\sigma_c(t_l)}\right\},$$

где $Y(t)$ – однородное гауссовское поле с нулевым средним и ковариационной функцией $r(t) = 1 - |t|_\alpha + o(|t|_\alpha)$, $t \to 0$.

Предположения теоремы и соотношение (3.5) позволяют применить Теорему 2.2. Имеем

$$\Bigg|1 - \sum_l \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in K_l} Y_{l,\Delta}(t) > \frac{u}{\sigma_c(t_l)}\right\}\times$$

$$\times\left[H_\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}u}\prod_{i=1}^{k} u^{2e_i/\alpha_i}\sum_l \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_c^2(t_l)}\right)\sigma_c(t_l)\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{i=1}^{k}(\sigma_c(t_l))^{-2e_i/\alpha_i}|\det D(t_l,t_l)|\ \mathrm{mes}\,(K_l(\Delta))\right]^{-1}\Bigg| \leq \kappa(u), \tag{3.10}$$

где $\kappa(u) \to 0$ при $u \to \infty$. Пользуясь тем, что суммирование в (3.10) производится по тем l, для которых $K_l \cap T_\delta \neq \emptyset$ и следовательно $\rho_{A,\beta}(t_l, T_o) \leq \delta$, можем записать

$$\exp[-(cu\delta)^2/2] \leq \sum_l \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma_c^2(t_l)}\right]\sigma_c(t_l)\prod_{i=1}^{k}(\sigma_c(t_l))^{-2e_i/\alpha_i}|\det D(t_l,t_l)|\times$$

$$\times\ \mathrm{mes}\,(K_l)\left[\exp(-u^2/2)\sum_l \exp(-u^2 c\rho_{A,\beta}(t_l,T_o))\,|\det D(t_l,t_l)|\ \mathrm{mes}\,(K_l)\right]^{-1} \leq$$

$$\leq (1+c\delta)^{-1}\prod_{i=1}^{k}(1+c\delta)^{2e_i/\alpha_i}. \tag{3.11}$$

В силу равномерной непрерывности функций $\rho_{A,\beta}$ и $|\det D(t,t)|$ на K_l, соотношения (3.5) и Леммы 3.1, имеем для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших u

$$(1-\varepsilon)\sum_l \int_{K_l} \exp[-u^2(c+\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t,T_o)]\,|\det D(t,t)|\,dt \leq$$

$$\leq \sum_l \exp[-u^2 c\rho_{A,\beta}(t_l, T_o)] \,|\det D(t_l, t_l)|\, \mathrm{mes}\,(K_l) \leq$$

$$\leq (1+\varepsilon)\sum_l \int_{\bar{K}_l} \exp[-u^2(c-\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t, T_o)]\,|\det D(t,t)|\,dt. \tag{3.12}$$

Учитывая Леммы 3.2 и 3.3, неравенства (1.2), (3.6) и (3.9) - (3.12), имеем для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших u

$$(1-\varepsilon)H_\alpha(\sqrt{2\pi}u)^{-1}\exp(-u^2/2)\prod_{i=1}^{k} u^{2e_i/\alpha_i}\int_{T_\delta}\exp[-u^2(1+\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t,T_o)]\times$$

$$\times|\det D(t,t)|\,dt - \sum{}^{1+\varepsilon} \leq \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} \leq \tag{3.13}$$

$$\leq \frac{(1+\varepsilon)H_\alpha}{\sqrt{2\pi}u}\exp(-u^2/2)\prod_{i=1}^{k} u^{2e_i/\alpha_i}\int_{T_\delta}\exp[-u^2(1-\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t,T_o)]\,|\det D(t,t)|\,dt,$$

где $\sum^c(u)$ означает двойную сумму из (3.6).

Далее, несложно показать, что интеграл

$$I_u^c = \int_{T_\delta}\exp[-u^2 c\rho_{A,\beta}(t,T_o)]\,|\det D(t,t)|\,dt$$

асимптотически (при $u \to \infty$) эквивалентен следующему выражению

$$I_u^c = cu^2\int_0^\delta \exp(-u^2 cx)g(x)\,dx\,(1+o(1)), \tag{3.14}$$

где

$$g(x) = \int_{G(x)}|\det D(t,t)|\,dt, \quad G(x) = \{t\in T:\ \rho_{A,\beta}(t,T_o)\leq x\}.$$

Соотношения

$$\mathrm{mes}\,\{t\in T:\ 0<\sigma-\sigma_t\leq x\} = x^\mu(1+o(1)), \quad x\downarrow 0$$

и (3.14) позволяют заключить, что для всяких $c, \varepsilon > 0$ имеет место

$$1 \leq \lim_{u\to\infty} I_u^{c-\varepsilon}/I_u^c \leq$$

$$\leq \lim_{u\to\infty}\int_0^{c\delta} g\left(\frac{y}{c-\varepsilon}\right)\exp(-u^2y)\,dy \Big/ \int_0^{c\delta} g(y/c)\exp(-u^2y)\,dy \leq L(c,\varepsilon), \tag{3.15}$$

где $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} L(c,\varepsilon) = 1$.

Итак, из формулы (3.13) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства

$$1-\varepsilon \le \lim_{u\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\}/Q_\delta(u) \le (1+\varepsilon)L(1,\varepsilon) - \lim_{u\to\infty} \sum\nolimits^{1+\varepsilon}(u)/Q_\delta(u),$$

где Q_δ обозначает главный член асимптотики в правой части (1.3).

Оценка двойной суммы в (3.6). Докажем, что

$$\lim_{u\to\infty} \sum\nolimits^{1+\varepsilon}(u)/Q_\delta(u) = 0.$$

В условиях теоремы и в соответствии с (3.4) существуют такие константы $D_1, D_2, \varepsilon_r > 0$, что корреляционная функция $r(t,s)$ поля $X(t)$ удовлетворяет неравенству

$$1 - D_1|t-s|_{\alpha'} \ge r(t,s) \ge 1 - D_2|t-s|_{\alpha''}, \quad t,s \in T, \quad |t-s| < \varepsilon_r. \tag{3.16}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\operatorname{diam} T_o < \varepsilon_r$. По определению поля $X^c(t)$ в силу (3.3) и (3.8) для любого $\varepsilon > 0$ и для достаточно больших u имеем

$$X^c(t) \le X(t)/[\sigma_1(1+(c-\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t_l,T_o))],$$

где $t \in K_l(\Delta)$ и $\omega \in \{\omega : X(t,\omega) > 0\}$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{K_l} X^c(t) > u, \sup_{K_{l'}} X^c(t) > u\right\} \le \mathbf{P}\left\{\sup_{K_l} X(t)/\sigma_1 > u(1+(c-\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t_l,T_o)),\right.$$

$$\left.\sup_{K_{l'}} X(t)/\sigma_1 > u(1+(c-\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t_{l'},T_o))\right\} \equiv p_{l,l'}(u). \tag{3.17}$$

Множество суммирования в двойной сумме $\sum^c$ разобьем на две части :

$$\mathcal{L}_1^+ = \{(l,l') : l,l' \in \mathcal{L}^+,\ l \ne l',\ \rho(K_l,K_{l'}) > 0\}$$

и

$$\mathcal{L}_2^+ = \{(l,l') : l,l' \in \mathcal{L}^+,\ l \ne l',\ \rho(K_l,K_{l'}) = 0\}.$$

Неравенство (3.17) позволяет записать $\sum^c \le \sum_1^c + \sum_2^c$, где $\sum_i^c = \sum\limits_{(l,l')\in\mathcal{L}_i^+} p_{l,l'}$, $i = 1,2$.

Докажем, что $\sum_i^{1+\varepsilon}(u) = o(Q_\delta(u))$, $u \to \infty$. Пусть $(l,l') \in \mathcal{L}_1^+$, т.е. множества K_l и $K_{l'}$ не имеют общих вершин. Ковариационная функция $r(t,s)$

поля $X(t)/\sigma_t$ удовлетворяет неравенству (3.16). Значит выполнено условие ОЛС (см. §2). Учитывая (3.5), можем применить Лемму 2.3 и получить

$$p_{l,l'}(u) \le C_1 u^{-1} \exp(-u^2/2) \prod_{i=1}^{k} u^{4\epsilon_i/\alpha''_i} \exp\left[-\frac{u^2}{2}(c-\varepsilon)[\rho_{A,\beta}(t_l, T_o) + \rho_{A,\beta}(t_{l'}, T_o)]\right]$$

$$\times \exp\left[-\frac{u^2}{16} D_1 \rho_{\alpha'}(K_l, K_{l'})\right] \text{ mes } (K_l) \text{ mes } (K_{l'}). \qquad (3.18)$$

Мы использовали здесь неравенство $\rho_{A,\beta}(t_l, T_o) \le \delta$, верное для $l \in \mathcal{L}^+$. Так как $(l,l') \in \mathcal{L}_1^+$, то найдется такой индекс $\nu = \nu(l,l')$, что $|l_\nu - l'_\nu| \ge 2$. Тогда

$$\rho_{\alpha'}(K_l, K_{l'}) \ge [(|l_\nu - l'_\nu| - 1)\Delta_\nu]^{\alpha'(\nu)} \ge z(u) = \min_{1 \le i \le n} [(\Delta_i(u))^{\alpha'(i)}].$$

В силу (3.5) имеем $\lim_{u\to\infty} u^2 z(u) = \infty$. С учетом (3.18) имеем $(C_i > 0)$:

$$\Sigma_1^c \le C_1 u^{-1} \exp(-u^2/2) \prod_{i=1}^{k} u^{4\epsilon_i/\alpha''_i} \exp[-C_2 u^2 z(u)] \times$$

$$\times \left[\sum_{l \in \mathcal{L}^+} \exp[-\frac{u^2}{2}(c-\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t_l, T_o)] \text{ mes } (K_l)\right]^2 \le 2C_1 u^{-1} \exp(-u^2/2) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{k} u^{4\epsilon_i/\alpha''_i} \exp[-C_2 u^2 z(u)] \left[\int_{T_\delta} \exp[-\frac{u^2}{2}(c-2\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t, T_o)]\, dt\right]^2 \qquad (3.19)$$

Используя неравенство (3.15) и Лемму 3.1, для достаточно больших u получаем

$$\left[\int_{T_\delta} \exp[-\frac{u^2}{2}(c-2\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t, T_o)]\, dt\right]^2 / \int_{T_\delta} \exp[-u^2 c \rho_{A,\beta}(t, T_o)]\, dt \le$$

$$\le C_3 \int_{T_\delta} \exp[-u^2(\frac{c}{2} - \varepsilon)\rho_{A,\beta}(t, T_o)]\, dt = O(1), \quad u \to \infty. \qquad (3.20)$$

Следовательно, в силу (3.19), (3.20) и указанного выше свойства функции $z(u)$, получаем $\sum_1^{1+\epsilon} / Q_\delta(u) \to 0$.

Пусть теперь $(l,l') \in \mathcal{L}_2^+$, т.е. $\rho(K_l, K_{l'}) = 0$. В силу (3.16) к полю $X(t)/\sigma(t)$ применима Лемма 2.4, причем $t_o = l \cdot \Delta$ и $s_o = l' \cdot \Delta$. Имеем

$$p_{l,l'}(u) \le \mathbf{P}\left\{\sup_{K_{l,l'}} X(t)/\sigma_t > u(1 + (c-\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t_{l'}, T_o))\right\} +$$

$$+ C_1 u^{-1} \exp(-u^2/2) \prod_{i=1}^{k} u^{4\epsilon_i/\alpha''_i} \exp\left[-\frac{u^2}{2}(c-\varepsilon)[\rho_{A,\beta}(t_l, T_o) + \rho_{A,\beta}(t_{l'}, T_o)]\right]$$

$$\exp\left[-\frac{u^2}{16}D_1\Delta_0^{\bar{\alpha}}\right] \text{ mes }(K_l) \text{ mes }(K_{l'}), \qquad (3.2$$

где $K_{l,l'} = K(\Delta') + l \cdot \Delta + \Delta'' \subset K(\Delta) + l' \cdot \Delta$. Сумму по $(l, l') \in \mathcal{L}_2^+$ вторы слагаемых в (3.21) оценим так же, как и выше (см. (3.18),(3.19)) ; эта сумм будет величиной порядка $o(Q_\delta(u))$, так как $u^2\Delta_0^{\bar{\alpha}} \to \infty$, $u \to \infty$.

Рассмотрим оставшуюся сумму

$$\sum_{(l,l')\in\mathcal{L}_2^+} \mathbf{P}\left\{\sup_{K_{l,l'}} X(t)/\sigma_t > u(1 + (c-\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t_{l'}, T_o))\right\}. \qquad (3.22)$$

Переходя от поля $X(t)/\sigma_t$, $t \in K_{l,l'} \subset K_{l'}$ к полю $Y^+_{l',\Delta}(t)$, замечаем, что дл достаточно больших u, (3.22) не превосходит

$$C_2 u^{-1}\exp(-u^2/2)\prod_{i=1}^{k} u^{2e_i/\alpha_i} \sum_{(l,l')\in\mathcal{L}_2^+} \exp[-u^2(c-\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t_{l'}, T_o)] \times$$

$$\times \text{ mes }(K_{l'}) \prod_{\{i:\, l_i \neq l'_i\}} [\Delta_o(u)/\Delta_i(u)]. \qquad (3.23)$$

Поскольку для фиксированного l' существует конечное число параллелепи педов, имеющих с $K_{l'}(\Delta)$ общие вершины, то, как и в (3.12), получаем, чт (3.23) не превосходит

$$C_3 u^{-1}\exp(-u^2/2)\prod_{i=1}^{k} u^{2e_i/\alpha_i} \int_{T_\varepsilon} \exp[-u^2(c-2\varepsilon)\rho_{A,\beta}(t, T_o)]\, dt\, \Delta_o(u) \times$$

$$\times \left[\max_{1\le i\le n} \Delta_i(u)\right]^{-1}.$$

В силу (3.15), так как $\Delta_0 = o(\Delta_i)$, $i = \overline{1,n}$, последнее выражение ест $o(Q_\delta(u))$ при $u \to \infty$. Следовательно, $\sum_2^{1+\epsilon}(u) = o(Q_\delta(u))$. Таким образом $\sum^{1+\epsilon} = o(Q_\delta(u))$, если $\operatorname{diam} T_o < \epsilon_r$ и Теорема 1.1 доказана в этом случае.

Пусть теперь $\operatorname{diam} T_o \ge \epsilon_r$. Разобьем T_o n-мерной решеткой с шаго $\epsilon_r/(2\sqrt{n})$ на замкнутые подмножества $S_1, \dots, S_N$, диаметры которых не пре- восходят $\epsilon_r/2$, т.е. $T_o = \bigcup_{i=1}^{N} S_i$ и $S_i \cap S_j = \partial S_i \cap \partial S_j$, $i \neq j$. Так как T_o ограничено, то $N < \infty$. Обозначим $S_{i\delta} = \{t \in T : \rho_{A,\beta}(t, S_i) \le \delta\}$. Тогда

$$\rho_{A,\beta}(t, T_o) = \min_{1\le i\le N} \rho_{A,\beta}(t, S_i), \quad T_\delta = \bigcup_{i=1}^{N} S_{i\delta}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}\left\{\sup_{S_{i\delta}} X(t) > u\right\} \geq \mathrm{P}\left\{\sup_{T_\delta} X(t) > u\right\} \geq \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}\left\{\sup_{S_{i\delta}} X(t) > u\right\} - \sum{}', \quad (3.24)$$

где

$$\sum{}' = \sum_{i \neq j} \mathrm{P}\left\{\sup_{S_{i\delta}} X(t) > u, \sup_{S_{j\delta}} X(t) > u\right\}.$$

Обозначим также

$$F(u) = H_\alpha(\sqrt{2\pi}u)^{-1} \exp(-u^2/2) \prod_{i=1}^{k} u^{2e_i/\alpha_i},$$

$$I_u(S_i) = \int_{S_{i\delta}} \exp[-u^2 \rho_{A,\beta}(t, S_i)] \, |\det D(t,i)| \, dt.$$

Имеем

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}\left\{\sup_{S_{i\delta}} X(t) > u\right\} = F(u) \sum_{i=1}^{N} I_u(S_i)(1 + o(1)), \quad u \to \infty.$$

Поскольку $\mathrm{mes}(S_i \cap S_j) = 0$, $i \neq j$, то несложно показать, что

$$\lim_{u \to \infty} (I_u(S_i) + I_u(S_j))/I_u(S_i \cup S_j) = 1, \quad i \neq j.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}\left\{\sup_{S_{i\delta}} X(t) > u\right\} = F(u) I_u\Big(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\Big)(1 + o(1)) =$$

$$= Q_\delta(u)(1 + o(1)), \quad u \to \infty. \quad (3.25)$$

Покажем, что $\sum' = o(Q_\delta(u))$. В силу (3.25) для соседних подмножеств S_i, S_j, $\mathrm{diam}(S_i \cup S_j) \leq \varepsilon_r$ имеем

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{S_{i\delta}} X(t) > u, \sup_{S_{j\delta}} X(t) > u\right\} = o(Q_\delta(u)), \quad u \to \infty.$$

Пусть теперь подмножества S_i и S_j не соседние, тогда $\rho(S_i, S_j) \geq \varepsilon_r (2\sqrt{n})^{-1}$ и

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{S_{i\delta}} X(t) > u, \sup_{S_{j\delta}} X(t) > u\right\} \leq \mathrm{P}\left\{\sup_{S_{i\delta} \times S_{j\delta}} [X(t) + X(s)] > 2u\right\}.$$

Используя условие (IV) для ковариационной функции $R(t,s)$ поля $X(t)$, убеждаемся, что найдется такое число κ, $0 < \kappa < 1$, что для $(t,s) \in S_{i\delta} \times S_{j\delta}$

имеет место $\mathrm{D}[X(t)+X(s)] \le 2(2-\kappa)$. В силу условия (III) поле $X(t)+X(s)$ удовлетворяет условиям Леммы 2.1. Следовательно,

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{S_{i\delta}\times S_{j\delta}} [X(t)+X(s)] > 2u\right\} \le C_1 u^{C_2} \exp\left(-\frac{u^2}{2-\kappa}\right).$$

Далее, обозначая $\kappa_1 = \kappa(4-2\kappa)^{-1}$, имеем при $u \to \infty$

$$C_1 u^{C_2} \exp\left(-\frac{u^2}{2-\kappa}\right) Q_\delta^{-1} = C_3 u^{C_4} \exp(-u^2\kappa_1) \Big/ \int_{T_\delta} \exp[-u^2 \rho_{A,\beta}(t,T_o)]\,dt \to 0,$$

так как

$$\int_{T_\delta} \exp[-u^2\rho_{A,\beta}(t,T_o)]\,dt \ge C_5 \exp[-u^2\delta(u)] \prod_{i=1}^{m} \delta^{f_i/\beta_i},$$

где $\delta(u)$ удовлетворяет соотношениям (1.2). Поскольку в $\sum'$ входит конечное число слагаемых, то мы доказали, что $\sum'(u) = o(Q_\delta(u))$. Теорема 1.1 полностью доказана.

Доказательство Теоремы 1.2. Для $1 \le i \le p$ мы можем использовать подход Теоремы 1.1, а для $p < i \le n$ множество T_δ можно выбрать более "узким". В силу соотношения между векторами α и β теперь в дополнение к (1.2) потребуем, чтобы $\delta^{1/\beta(i)} u^{2/\alpha(i)} \to 0$, $i = p+1, \dots, n$, в то время как $\delta^{1/\beta(i)} u^{2/\alpha(i)} \to \infty$, $i = 1, \dots, p$. Заметим, что когда множество T_o состоит из одной точки, интеграл в (1.3) считается явно (см. [11], стр. 403).

Доказательство п. (ii). Без ограничения общности считаем, что $A = I$, $t_o = 0$. В силу Лемм 3.1 – 3.3 достаточно найти асимптотики вероятности $\mathrm{P}\{\sup_{T_\delta} X^c(t) > u\}$, $u \to \infty$ для значений c, близких к 1. Введем обозначения

$$A_{l,\Delta} = K\left(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right) + l\cdot\Delta = \left\{t \in T : (l_i - \frac{1}{2})\Delta_i \le t_i \le (l_i + \frac{1}{2})\Delta_i, \quad i = \overline{1,n}\right\},$$

$$\Delta_i = \lambda u^{-2/\alpha(i)}, \quad l \in Z^n.$$

Согласно (1.2) имеем

$$\delta^{1/\alpha(i)}/\Delta_i \to \infty, \quad u \to \infty, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.26}$$

Следовательно, по Лемме 3.1 множества $A_{l,\Delta}$ образуют разбиение множества T_δ. Как и прежде, обозначим через $Y^\pm$ два гауссовских поля с нулевыми средними, единичными дисперсиями и ковариационными функциями вида

$$r^\pm(t) = \exp[-|D^\pm t|_\alpha], \quad D^\pm = ((1\pm\varepsilon)d_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}, \quad \varepsilon > 0.$$

По Теореме 2.1, для любого $\varepsilon > 0$ и для достаточно больших u имеем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} Y^-(t)\sigma_c(t) > u\right\} \le \mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} X^c(t) > u\right\} \le \mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} Y^+(t)\sigma_c(t) > u\right\}. \quad (3.27)$$

Далее, опуская индексы "$\pm$", имеем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{K(-\Delta/2,\Delta/2)} Y(t)/(1+c|t|_\alpha) > u\right\} \le \mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} Y(t)\sigma_c(t) > u\right\} \le$$

$$\le \mathbf{P}\left\{\sup_{K(-\Delta/2,\Delta/2)} Y(t)/(1+c|t|_\alpha) > u\right\} + \quad (3.28)$$

$$+\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta\setminus K(-\Delta/2,\Delta/2)} Y(t)/(1+c|t|_\alpha) > u\right\}.$$

Применение Леммы 2.2 позволяет записать

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{K(-\Delta/2,\Delta/2)} Y(t)/(1+c|t|_\alpha) > u\right\} =$$

$$= (\sqrt{2\pi}u)^{-1}\exp(-u^2/2)H_\alpha^c((-\overline{\lambda}/2,\overline{\lambda}/2);D)(1+\kappa(u)), \quad (3.29)$$

где $\Delta = g_u\overline{\lambda}$, $\overline{\lambda} = (\lambda,\dots,\lambda) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} = (c,\dots,c) \in \mathbb{R}^k$, $\kappa(u) \to 0$, $u \to \infty$.

Оценим сверху оставшееся слагаемое в (3.28). Пусть $N_i(u) = \mathrm{Ent}(\delta^{1/\alpha_{(i)}}/\Delta_i)$, $i = \overline{1,n}$, где $\mathrm{Ent}(x)$ означает целую часть числа x. В силу (3.26) имеем $N_i \to \infty$ при $u \to \infty$, $i = 1,\dots,n$. Используя однородность поля $Y(t)$ и Леммы 2.2 и 3.1, получаем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta\setminus K(-\Delta/2,\Delta/2)} Y(t)/(1+c|t|_\alpha) > u\right\} \le \sum_{l\in\mathcal{N}} \mathbf{P}\left\{\sup_{A_{l,\Delta}} Y(t) > uq_l\right\} =$$

$$= \sum_{l\in\mathcal{N}} (\sqrt{2\pi}u)^{-1} q_l^{-1}\exp(-u^2q_l^2/2)H_\alpha(\tilde{q}_l\cdot\overline{\lambda};D)(1+\kappa_1(uq_l)), \quad (3.30)$$

где

$$\mathcal{N} = \{l : 0 \le |l_i| \le N_i,\ i = \overline{1,n},\ l \ne 0\},$$

$$q_l = 1 + \frac{c}{2}u^{-2}|l\cdot\overline{\lambda}|_\alpha, \quad \tilde{q}_l = (q_l^{2/\alpha_{(1)}},\dots,q_l^{2/\alpha_{(n)}}),$$

и $\kappa_1(x) \to \infty$ при $x \to 0$. В силу (2.2), для достаточно больших λ

$$H_\alpha(\tilde{q}_l\cdot\overline{\lambda};D) \le C_1\lambda^n H_{\alpha}, \quad q_l^{-1}\exp(-u^2q_l^2/2) \le C_2\exp(-\frac{u^2}{2} - C_3|l\cdot\overline{\lambda}|_\alpha).$$

Здесь и далее $C_i > 0$. Следовательно, учитывая (3.30), имеем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta\setminus K(-\Delta/2,\Delta/2)} Y(t)/(1+c|t|_\alpha) > u\right\} \le$$

$$\le C_4 u^{-1}\exp(-u^2/2)\lambda^n \sum_{l\in Z^n, l\neq 0} \exp[-C_3|l\cdot\overline{\lambda}|_\alpha] = u^{-1}\exp(-u^2/2)\kappa_2(\lambda), \qquad (3.31)$$

где $\kappa_2(\lambda) \to 0$, $\lambda \to \infty$. Итак, учитывая (3.28), (3.29) и (3.31), заключаем, что

$$H_\alpha^c((-\overline{\lambda}/2,\overline{\lambda}/2);D) \le \liminf_{u\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} Y(t)\sigma_c(t) > u\right\}\exp(u^2/2)\sqrt{2\pi}u \qquad (3.32)$$

и

$$\limsup_{u\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} Y(t)\sigma_c(t) > u\right\}\exp(u^2/2)\sqrt{2\pi}u \le$$
$$\le H_\alpha^c((-\overline{\lambda}/2,\overline{\lambda}/2);D) + \kappa_2(\lambda). \qquad (3.33)$$

Из определения величины $H_\alpha^c((-\overline{\lambda}/2,\overline{\lambda}/2);D)$ следует, что она является монотонно возрастающей функцией от λ. Следовательно, существует предел

$$\lim_{\lambda\to\infty} H_\alpha^c((-\overline{\lambda}/2,\overline{\lambda}/2);D) = H_\alpha^c(D).$$

Покажем, что этот предел конечен. Используя (2.2) и неравенство $H_\alpha^c((-\overline{\lambda}/2,\overline{\lambda}/2);D) \le H_\alpha(\overline{\lambda};D)$, получаем для достаточно больших λ_o

$$H_\alpha^c((-\overline{\lambda}_o/2,\overline{\lambda}_o/2);D) \le C_5 H_\alpha \lambda_o^n,$$

Отсюда в силу (3.33) следует, что

$$\limsup_{u\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta} Y(t)\sigma_c(t) > u\right\} u\exp(u^2/2) < \infty.$$

Из этого и (3.32) получается $H_\alpha^c(D) < \infty$. Итак, учитывая Леммы 3.2 и 3.3, соотношения (3.27), (3.32) и (3.33), для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\liminf_{u\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\}\exp(u^2/2)\sqrt{2\pi}u \ge H_\alpha^{1+\overline{\varepsilon}}((-\overline{\lambda}/2,\overline{\lambda}/2);D^-), \qquad (3.34)$$

и

$$\limsup_{u\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\}\exp(u^2/2)\sqrt{2\pi}u \le$$

$$\leq H_\alpha^{1-\bar{\varepsilon}}((-\bar{\lambda}/2, \bar{\lambda}/2); D^+) + \kappa_2(\lambda), \tag{3.35}$$

где $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon, ..., \varepsilon) \in \mathbb{R}^k$. Функции $H_\alpha^{1\pm\bar{\varepsilon}}((-\bar{\lambda}/2, \bar{\lambda}/2); D^\mp)$ непрерывны по ε, поэтому устремляя $\varepsilon \to 0$ и затем $\lambda \to \infty$ в (3.34) и (3.35) получаем утверждение (ii).

Утверждения (iii) – (iv) можно вывести с учетом формул (2.5) и (2.6).

ABSTRACT. Let $X(t)$ be a mean zero Gaussian locally homogeneous random field defined on a compact set $T \subset \mathbb{R}^n$. In the paper the theorems on the asymptotic of probability $\mathrm{P}\{\sup_{t\in T} X(t) > u\}$, $u \to \infty$ are proved. Research method is the so-called Double Sum Method.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Pickands III, "Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 145, pp. 51 – 73, 1969.
2. C. Qualls, H. Watanabe, "Asymptotic properties of Gaussian random fields", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 177, pp. 155 – 171, 1973.
3. Ю. К. Беляев, В. И. Питербарг, "Асимптотика среднего числа A-точек выбросов гауссовского поля за высокий уровень", В сб. "Выбросы случайных полей", М., изд. МГУ, стр. 62 – 89, 1972.
4. В. И. Питербарг, В. П. Присяжнюк, "Асимптотика вероятности большого выброса гауссовского нестационарного процесса", Теория Вероятн. и Мат. Стат., Киев, вып. 18, стр. 121 – 133, 1978.
5. S. M. Berman, "Sojourns and extremes of Gaussian processes", Ann. Prob., vol. 2, no. 6, pp. 999 – 1026, 1974.
6. В. Р. Фаталов, " Точная асимптотика функции распределения максимума гауссовского неоднородного случайного поля", Докл. АН Арм.ССР, том 77, № 1, стр. 25 – 29, 1983.
7. В. Р. Фаталов, "Асимптотики вероятностей больших уклонений гауссовских полей и их применения в теории статистик Колмогорова–Смирнова", Теория Вероятн. и Примен., том 29, № 1, стр. 178 – 180, 1984.
8. Н. Н. Ченцов, "Винеровские случайные поля от нескольких параметров" ДАН СССР, том 106, № 4, стр. 607 – 609, 1956.
9. В. И. Питербарг, Асимптотические Методы в Теории Гауссовских Случайных Процессов, М., МГУ, 1988.
10. D. Slepian, "The one-sided barrier problem for the Gaussian noise", Bell System Tech. J., vol. 41, no. 2, pp. 463 – 501, 1962.
11. Г. М. Фихтенгольц, Курс Дифференциального и Интегрального Исчисления, том 3, Наука, М., 1970.

30 Июня 1992 Ереванский государственный университет