ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА В КАТЕГОРНОЙ ТЕОРИИ ГАЛУА В РЕГУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ

С. Г. Далалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 27, № 6, 1992

Доказывается, что основная теорема теории Галуа в классическом виде верна в любой абстрактной категории с мономорфными морфизмами, в которой существуют композиты пар подобъектов и регулярные замыкания морфизмов.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является продолжением статьи [1]. Главная цель этих статей - изложение теории Галуа в рамках общей теории категорий. По сравнению с [1] здесь ситуация более приближена к классической. Во-первых, предполагается (если не оговорено противное), что все морфизмы являются мономорфизмами. Для этого достаточно от произвольной категории C перейти к категории C', состоящей из всех объектов категории C и ее мономорфизмов. Во-вторых, изучаются , так называемые, регулярные морфизмы, которые занимают место алгебраических расширений полей классической теории, но не сводятся к ним (Предложение 2.2). Окончательный результат (Теорема 7.6) аналогичен основной теореме классической теории Галуа.

В данной статье мы придерживаемся всех обозначений и соглашений, которые приняты в [1]. Двойственные понятия и результаты формулируются в редких случаях, хотя они не менее интересны с точки зрения приложений.

§1. МНОЖЕСТВА ЧАСТНЫХ

1.1. Множество морфизмов $B\psi C$, в композиции с морфизмом $A\varphi B$ дающих морфизм $A\chi C$, будем называть *множеством левых частных* морфизма χ по морфизму (или относительно морфизма) φ и обозначать $\varphi\backslash\chi$. Двойственно определяется множество правых частных χ/ψ.

В частности, $\chi\backslash\chi$ - изотропная полугруппа, а χ/χ - коизотропная полугруппа морфизма χ. Для любого эпиморфизма φ мощность $|\varphi\backslash\chi|$ множества левых частных не больше единицы, и двойственно $|\chi/\psi| \leq 1$ для любого мономорфизма ψ.

1.2. Предложение. *Для произвольного морфизма $X\xi A$ верно включение $\varphi\backslash\chi \subset \xi\varphi\backslash\xi\chi$, которое превращается в равенство, если ξ - эпиморфизм. Двойственно, $\chi/\psi \subset \chi\xi/\psi\xi$ при любом морфизме $C\xi Z$, а в случае мономорфного ξ имеет место равенство.*

Более общо, для произвольного семейства морфизмов $(X_i\xi_i A,\ i \in I)$ верно включение

$$\varphi\backslash\chi \subset \bigcap_{i\in I} \xi_i\varphi\backslash\xi_i\chi,$$

которое превращается в равенство, если семейство плотное (коразделяющее). Двойственное утверждение верно для всякого семейства морфизмов $(C\xi_j Z_j, j \in J)$.

1.3. Предположим, что морфизм $A\varphi B$ имеет кообраз ξ и φ' дополнительный к кообразу морфизм, так что $\varphi = \xi\varphi'$. Тогда для любого морфизма $A\chi C$ и произвольного $\chi' \in \xi\backslash\chi$ получим равенство $\varphi\backslash\chi = \varphi'\backslash\chi'$, где φ' - копростой морфизм (т.е. такой, все левые эпиморфные делители которого являются изоморфизмами ; это - простое свойство дополнительного к кообразу морфизма)..

Поэтому, если морфизм φ имеет кообраз, то любое множество левых частных $\varphi\backslash\chi$ совпадает с множеством левых частных $\varphi'\backslash\chi'$, где φ' - копростой морфизм (равный дополнительному к кообразу φ морфизму). В частности, если φ разлагается в композицию кообраза и образа, то φ' – мономорфизм. Это свойство в некоторой степени обосновывает целесообразность перехода к рассмотрению категорий, все морфизмы которой являются мономорфизмами, при решении задач, формулируемых с помощью множества левых частных морфизмов.

1.4. Предложение. *Для произвольных морфизмов $A\varphi B$, $A\chi C$, AuW и для любых $\psi \in \varphi\backslash\chi$, $w \in \chi\backslash u$ справедливы включения*

$$\psi(\chi\backslash u) \subset \varphi\backslash u, \quad (\varphi\backslash\chi)w \subset \varphi\backslash u.$$

Поэтому

$$(\varphi\backslash\chi)(\chi\backslash u) \subset \varphi\backslash u.$$

Здесь под произведением $\psi(\chi\backslash u)$ подразумевается множество композиций ψw, где w пробегает множество $\chi\backslash u$, а под произведением $(\varphi\backslash\chi)(\chi\backslash u)$ - множество композиций ψw с $\psi \in \varphi\backslash\chi$, $w \in \chi\backslash u$.

Дополнительно к включению $\psi(\chi\backslash u) \subset \varphi\backslash u$ отметим, что отображение $(\chi\backslash u)\psi^*(\varphi\backslash u)$, $w\psi^* = \psi w$ является инъективным при эпиморфном ψ и является сюръективным тогда и только тогда, когда выполняется следующее часто встречающееся в дальнейшем условие :

(0) морфизм ψ, делящий $v \in \varphi\backslash u$ слева, делит все морфизмы из $\varphi\backslash u$.

Аналогично, отображение $(\varphi\backslash\chi)w_*(\varphi\backslash u)$, $\psi w_* = \psi w$ инъективно при мономорфном w и сюръективно, если и только если

(1) морфизм w, делящий $v \in \varphi\backslash u$ справа, делит каждый морфизм из $\varphi\backslash u$.

Следствие. Если множество $\varphi\backslash\chi$ содержит морфизм ψ, делящий все морфизмы множества $\varphi\backslash u$, то $\psi(\chi\backslash u) = \varphi\backslash u$. Если $\chi\backslash u$ содержит морфизм w, делящий все морфизмы из $\varphi\backslash u$, то $(\varphi\backslash\chi)w = \varphi\backslash u$. В указанных случаях $(\varphi\backslash\chi)(\chi\backslash u) = \varphi\backslash u$.

1.5. Предложение.

(а) Если $v = \psi w$ и w - мономорфизм, то равенство $\varphi_1\backslash\varphi_1 v = \varphi_2\backslash\varphi_2 v$ влечет равенство $\varphi_1\backslash\varphi_1\psi = \varphi_2\backslash\varphi_2\psi$.

(б) Если к тому же каждый морфизм из множеств частных $\varphi_1\backslash\varphi_1 v$ и $\varphi_2\backslash\varphi_2 v$ делится на w, то справедлива обратная импликация.

Доказательство. Проверим, что $\varphi_1\backslash\varphi_1\psi \subset \varphi_2\backslash\varphi_2\psi$. Пусть $\psi' \in \varphi_1\backslash\varphi_1\psi$. Тогда $\psi' w$ принадлежит $\varphi_1\backslash\varphi_1 v$ и, следовательно, $\varphi_2\backslash\varphi_2 v$. Сокращая обе части равенства $\varphi_2\psi' w = \varphi_2\psi w$ на мономорфизм w, получаем, что $\psi' \in$

$\varphi_2\backslash\varphi_2\psi$. По симметрии верно и обратное включение. Аналогично доказывается второе утверждение.

1.6. Определение. *Множеством* $\varphi\backslash u/w$ *двусторонних частных* морфизма $A\,u\,W$ относительно морфизмов $A\varphi B$ и $C\,w\,W$ называется множество всех морфизмов $B\psi C$, удовлетворяющих равенству $u = \varphi\psi w$.

Очевидно, что $\varphi\backslash\chi/1_C = \varphi\backslash\chi$ и $1_A\backslash\chi/\psi = \chi/\psi$. Более общо, $\varphi\backslash u/w = \varphi\backslash\chi$, если w - мономорфизм и $u = \chi w$. Двойственно, $\varphi\backslash u/w = v/w$ при эпиморфном φ и $u = \varphi v$.

1.7. Следующие утверждения очевидны. Множество левых частных $\varphi\backslash\chi$ замкнуто относительно умножений :

(а) справа на элементы γ изотропной полугруппы S^χ (и только на такие элементы) ;

(б) слева на элементы β изотропной полугруппы S^φ (более общо, ψ и $\beta\psi$ принадлежат $\varphi\backslash\chi$ тогда и только тогда, когда $\beta \in \varphi\backslash\chi/\psi$).

Двойственные результаты справедливы для множества правых частных χ/ψ.

Множество двусторонних частных $\varphi\backslash u/w$ замкнуто относительно умножений :

(а′) справа на элементы $\gamma \in S_w$ (более общо, $\psi, \psi\gamma \in \varphi\backslash u/w \iff \gamma \in \varphi\psi\backslash u/w$) ;

(б′) слева на элементы $\beta \in S^\varphi$ (более общо, $\psi, \beta\psi \in \varphi\backslash u/w \iff \beta \in \varphi\backslash u/\psi w$).

В соответствии с этим для множеств частных получаем разложения в объединение непересекающихся подмножеств :

$$\varphi\backslash\chi = \bigcup_i \psi_i G^\chi = \bigcup_j G^\varphi \psi_j = \bigcup_k G^\varphi \psi_k G^\chi;$$

$$\chi/\psi = \bigcup_i G_\chi \varphi_i = \bigcup_j \varphi_j G_\psi = \bigcup_k G_\chi \varphi_k G_\psi;$$

$$\varphi\backslash u/w = \bigcup_i G^\varphi \psi_i = \bigcup_j \psi_j G_w = \bigcup_k G^\varphi \psi_k G_w.$$

Здесь G с верхним индексом обозначает изотропную группу соответствующего морфизма, с нижним индексом - коизотропную группу.

Морфизм $A\varphi B$ называется *регулярным* в морфизме $A\chi C$, если $\varphi\backslash\chi = \psi G^{\chi}$ и *нормальным*, если $\varphi\backslash\chi = G^{\varphi}\psi$.

1.8. Множество двусторонних частных $\varphi\backslash\chi/\psi$, при $\chi = \varphi\psi$, называется множеством *биизотропных эндоморфизмов* пары (φ, ψ). Если φ - эпиморфизм или ψ - мономорфизм, множество биизотропных эндоморфизмов $\varphi\backslash\chi/\psi$ совпадает, соответственно, с коизотропной полугруппой S_{ψ} или изотропной полугруппой S^{φ} и, следовательно, замкнуто относительно композиций. В общем случае это не верно, однако справедливо

Предложение. *Множество биизотропных эндоморфизмов $\varphi\backslash\chi/\psi$ замкнуто относительно умножения слева на перестановочные с φ биизотропные эндоморфизмы и умножения справа на ψ-перестановочные биизотропные эндоморфизмы. Кроме того оно содержит изотропную полугруппу S^{φ} и сводится к ней при мономорфном ψ, и двойственно, содержит коизотропную полугруппу S_{ψ}, причем сводится к ней, если φ - эпиморфизм.*

§2. РЕГУЛЯРНОСТЬ

Для простоты предположим, что рассматривается категория, все морфизмы которой являются мономорфизмами.

2.1. Морфизм $A\varphi B$ называется *регулярным* относительно морфизма $B\psi C$, если из равенства $\varphi\psi = \varphi\psi'$ следует равенство $\psi' = \psi\gamma$, при некотором автоморфизме γ.

Поскольку $\varphi\psi = \varphi\psi' = \varphi\psi\gamma$, автоморфизм γ принадлежит изотропной группе G^{χ} морфизма $\chi = \varphi\psi$.

Таким образом, регулярность φ относительно ψ означает, что отображение

$$G^{\chi}\psi^{*}(\varphi\backslash\chi), \quad \gamma\psi^{*} = \psi\gamma$$

сюръективно. То есть справедливо

Предложение. *Морфизм $A\varphi B$ регулярен в морфизме $A\chi C$ тогда и только тогда, когда он регулярен относительно некоторого (и, следовательно, любого) морфизма ψ множества частных $\varphi\backslash\chi$.*

Заметим, что поскольку равенство $\gamma\psi^* = \gamma'\psi^*$ выполняется в том и только том случае, когда $\gamma'\gamma^{-1} \in G^\psi$, из регулярности φ в χ следует, что отображение ψ^* индуцирует биекцию между множествами левых частных $\varphi\backslash\chi$ и левых смежных классов $G^\psi\backslash G^\chi$.

Согласно п. 1.7 изотропная группа G^χ действует на множество частных $\varphi\backslash\chi$ правыми композициями. Регулярность морфизма φ в χ эквивалентна условию транзитивности этого действия.

2.2. Предложение. *Расширение полей $A\varphi B$ регулярно относительно расширения BvW (или в $u = \varphi v$), если степень трансцендентности расширения u конечна и поле W алгебраически замкнуто.*

Доказательство. Пусть $u = \varphi v = \varphi v'$. Степени трансцендентности морфизмов v и v' равны, ибо при условии конечности степени трансцендентности $\operatorname{tr} u$ композиции $u = \varphi v$ справедлива формула $\operatorname{tr} u = \operatorname{tr}\varphi + \operatorname{tr} v$ (см., например, [2], §5.3).

Выберем базисы трансцендентности $(t_i, i \in I)$ и $(t'_i, i \in I)$ расширений v и v', соответственно. Согласно свойству продолжения изоморфизмов ([2],§6.1) существует эндоморфизм $W\omega W$ такой, что $v = v'\omega$ и $\omega(t'_i) = t_i$ при всех $i \in I$. Образ $\omega(W)$ совпадает с W и, следовательно, ω - автоморфизм, потому что $\omega(W) \subset W$ и оба они являются алгебраическими замыканиями чисто трансцендентного расширения поля $v(B)$, получаемого присоединением элементов $t_i, i \in I$.

Следствие. Всякое алгебраическое расширение $A\varphi B$ регулярно в алгебраическом замыкании AuW. Более того, каждое алгебраическое расширение регулярно в кратном ему нормальном расширении.

Действительно, пусть $A\chi C$ - произвольное нормальное расширение и CwW - некоторое вложение в алгебраическое замыкание поля A, так что $\chi w = u$. Если $\chi = \varphi\psi = \varphi\psi'$, то $u = \varphi\psi w = \varphi\psi' w$ и согласно первому утверждению следствия $\psi' w = \psi w\omega$ при подходящем автоморфизме ω. Поскольку χ - нормальное расширение, найдется автоморфизм γ такой, что $w\omega = \gamma w$. Применив это равенство к предыдущему и сократив на мономорфизм w, получим $\psi' = \psi\gamma$. Покажем, что при чисто трансцендентных расширениях $A\varphi B$ и BvW морфизм φ не регулярен относительно v. Зафиксируем базисы трансцендентности $(t_i, i \in I)$ для φ и $(t_j, j \in J)$ для v. Рассмотрим морфизм $Bv'W$, определяемый условиями

$$\varphi v' = \varphi v, \quad v'(t_i) = t_i \ (i \in I \setminus \nu), \quad v'(t_\nu) = t_\nu^2.$$

Существуют эндоморфизмы $W\omega W$ такие, что $v' = v\omega$. Например, эндоморфизм, однозначно определяемый условиями

$$u\omega = u, \quad \omega(t_k) = t_k \ (k \in I \cup J \setminus \nu), \quad \omega(t_\nu) = t_\nu^2.$$

Ясно, что последнее равенство должно выполняться для всех эндоморфизмов ω, подчиняющихся соотношению $v' = v\omega$. Поэтому все они не сюръективны. Действительно, если бы $\omega(c) = t_\nu$, при некотором $c \in W$, то поскольку t_ν является корнем многочлена $X^2 - t_\nu^2 = X^2 - \omega(t_\nu)$, c должно быть корнем многочлена $X^2 - t_\nu$, в противоречии с тем, что $(t_i, i \in I \cup J)$ базис трансцендентности расширения u.

2.3. Пусть морфизм $A\varphi B$ регулярен в морфизме $A\chi C$, а ψ - произвольный элемент множества $\varphi\backslash\chi$. Тогда для любого автоморфизма $\beta \in \mathrm{Aut}B$, подчиняющегося равенствам $\chi = \varphi\psi = \varphi\beta\psi$ существует автоморфизм $\gamma \in \mathrm{Aut}C$ такой, что $\beta\psi = \psi\gamma$. Иначе говоря, подмножество обратимых элементов $(\varphi\backslash\chi/\psi)^*$ соответствующего биизотропного множества перестановочно с ψ, т.е. лежит в коаллотропной группе $G_{(\psi)}$ (см. [1], §1). Так как $(\varphi\backslash\chi/\psi)^*$ содержит изотропную группу G^φ и даже совпадает с ней при мономорфном ψ, получаем

Предложение. *Если φ регулярно в χ, то $G^\varphi \subset G_{(\psi)}$ при любом $\psi \in \varphi\backslash\chi$.*

2.4. Предложение. *Если морфизм $A\varphi B$ регулярен в морфизме AuW, а морфизм $B\psi C$ - в некотором морфизме $v \in \varphi\backslash u$, то ψ регулярен в любом частном $v' \in \varphi\backslash u$.*

Доказательство. Ввиду регулярности φ в u для любых $v, v' \in \varphi\backslash u$ существует автоморфизм $\omega \in G^u$ такой, что $v' = v\omega$. Равенства $v' = \psi w = \psi w'$

влекут равенства $v = \psi w\omega^{-1} = \psi w'\omega^{-1}$ и $w'\omega^{-1} = w\omega^{-1}\omega'$, $\omega' \in G^v$ в силу регулярности ψ в v. Отсюда $w' = w\omega^{-1}\omega'\omega$, причем $\omega^{-1}\omega'\omega \in G^v$.

На основании доказанного предложения можно корректно определить регулярность морфизма ψ в множестве частных $\varphi\backslash u$, при условии регулярности φ в u.

2.5. Предложение. *Пусть композиция $A\chi C$ морфизмов $A\varphi B$ и $B\psi C$ регулярна относительно морфизма CwW (или в $u = \chi w$). Тогда*

(а) морфизм ψ регулярен относительно w (в любом $v \in \varphi\backslash u$);

(б) морфизм φ регулярен относительно композиции $v = \psi w$ (в u) тогда и только тогда, когда выполняется условие (0) п. 1.4.

Доказательство. (а) Если $v = \psi w = \psi w'$, то умножая слева на φ и применяя условие регулярности χ, получаем, что $w' = w\omega$, при некотором автоморфизме ω.

(б) Достаточность. Из равенств $u = \varphi v = \varphi v'$ подстановкой $v = \psi w$, $v' = \psi w'$ в силу регулярности χ в u получаем, что $w' = w\omega$ и, следовательно, $v' = v\omega$ при подходящем $\omega \in AutW$.

Необходимость. Для произвольного $v \in \varphi\backslash u$ из равенств $u = \chi w = \varphi\psi w = \varphi v$ ввиду регулярности φ в u следует, что $v = \psi w\omega$.

Следствие. Если χ регулярно в u и при некотором $\psi \in \varphi\backslash\chi$ все $v \in \varphi\backslash u$ делятся на ψ, то при любом $\psi' \in \varphi\backslash\chi$ все $v \in \varphi\backslash u$ делятся на ψ'.

Достаточно дважды применить пункт (б) доказанного предложения.

2.6. Предложение. *Пусть морфизмы $A\varphi B$, $B\psi C$ и CwW обладают следующими свойствами :*

(i) φ регулярно относительно ψ (следовательно, в $\chi = \varphi\psi$),

(ii) w делит любой морфизм $v' \in \varphi\backslash u$, где $u = \chi w$,

(iii) все автоморфизмы $\gamma \in G^\chi$ перестановочны с w (более сильным является требование, чтобы композиция $\chi = \varphi\psi$ была регулярна относительно w, следовательно, в u).

Тогда морфизм φ регулярен относительно $v = \psi w$ (и значит в морфизме u)

Доказательство. Предположим, что $u = \varphi v = \varphi v'$. В силу свойства (ii) $v' = \psi' w$. Подстановкой и сокращением на w получаем $\varphi\psi' = \varphi\psi$. Согласно свойству (i) найдется автоморфизм $\gamma \in G^{\chi}$ такой, что $\psi' = \psi\gamma$. Ввиду свойства (iii) $\gamma w = w\omega$ при подходящем автоморфизме $\omega \in \mathrm{Aut}W$. Следовательно, $v' = \psi' w = \psi\gamma w = \psi w\omega = v\omega$, причем $\omega \in G^u$.

2.7. Предложение. *Из регулярности морфизма $A\varphi B$ в AuW и морфизма $B\psi C$ - в некотором частном $v \in \varphi\backslash u$ следует регулярность композиции $\chi = \varphi\psi$ в u.*

Доказательство. Пусть $u = \chi w = \chi w'$. Подставляя $\chi = \varphi\psi$ и используя регулярность φ в u, получаем, что $\psi w' = \psi w\omega' = v'$, где $\omega' \in \mathrm{Aut}W$, а $v' \in \varphi\backslash u$. Согласно Предложению 2.4, ψ регулярно в v', поэтому $w' = w\omega'\omega''$ с $\omega'' \in \mathrm{Aut}W$.

2.8. Предложение. *Пусть морфизм $A\varphi B$ регулярен относительно морфизма BvW, морфизмы $A\bar{\varphi}\bar{B}$ и $\bar{B}\bar{v}W$ в композиции дают морфизм $u = \varphi v$, CwW - композит морфизмов v и $\bar{v}$, а $B\psi C$ и $\bar{B}\bar{\psi}C$ - ассоциированные с композитом морфизмы. Тогда морфизм $\bar{\psi}$ регулярен относительно морфизма w, если*

$$G^u = \{\omega'\omega'' | \omega' \in G^v,\ \omega'' \in G^{\bar{v}}\} = G^v G^{\bar{v}}. \tag{*}$$

Напомним, что композитом морфизмов BvW и $\bar{B}\bar{v}W$ называется мономорфизм CwW, удовлетворяющий следующим условиям :

(i) w делит v и $\bar{v}$: $v = \psi w$, $\bar{v} = \bar{\psi} w$;

(ii) w делится на любой морфизм , делящий v и $\bar{v}$;

(iii) пара морфизмов $(\psi, \bar{\psi})$ плотная (коразделяющая), т.е. равенства $\psi\mu = \psi\nu$, $\bar{\psi}\mu = \bar{\psi}\nu$ выполняются тогда и только тогда, когда $\mu = \nu$.

Доказательство. Прежде всего, подставляя $v = \psi w$ и $\bar{v} = \bar{\psi} w$ в равенство $\varphi v = \bar{\varphi}\bar{v}$ и сокрашая на w, получаем $\varphi\psi = \bar{\varphi}\bar{\psi}$.

Предположим теперь, что $\bar{v} = \bar{\psi} w = \bar{\psi} w'$. Тогда $u = \bar{\varphi}\bar{v} = \bar{\varphi}\bar{\psi} w = \bar{\varphi}\bar{\psi} w'$ и, следовательно, $u = \varphi\psi w = \varphi\psi w'$. Вследствие регулярности φ в u имеем $\psi v' = \psi w\omega$ при некотором $\omega \in G^u$. Согласно наложенному условию (*),

$\omega = \omega'\omega''$, где $\omega' \in G^{\psi}$, $\omega'' \in G^{\bar{\psi}}$. При этом $\psi w' = \psi w\omega'\omega'' = \psi w\omega''$ и $\bar{\psi} w' = \bar{v} = \bar{\psi} w\omega''$. Отсюда по определению композита $w' = w\omega''$.

Следствие. Если в условиях предложения $\bar{\varphi}$ регулярно в u, то и композиция $\chi = \varphi\psi$ регулярна в u.

§3. НОРМАЛЬНОСТЬ

3.1. Нормальность морфизма $A\varphi B$ относительно морфизма $B\psi C$ определяется условием

$$\chi = \varphi\psi = \varphi\psi' \Longrightarrow \psi' = \beta\psi, \quad \beta \in \mathrm{Aut}B.$$

При этом β принадлежит подмножеству обратимых элементов $(\varphi\backslash\chi/\psi)^{*}$ соответствующего биизотропного множества, которое совпадает с изотропной группой G^{φ} при мономорфизме ψ. Поэтому нормальность φ относительно ψ эквивалентна сюръективности отображения

$$G^{\varphi}\psi_{*}(\varphi\backslash\chi)| \quad \beta\psi_{*} = \beta\psi.$$

В частности, условия нормальности φ в χ и относительно любого $\psi \in \varphi\backslash\chi$ совпадают. Кроме того, отображение ψ_{*} инъективно при мономорфном ψ и, следовательно, определяет биекцию между G^{φ} и $\varphi\backslash\chi$.
Если рассмотреть действие изотропной группы G^{φ} на множестве частных $\varphi\backslash\chi$ с помощью левых композиций, то нормальность φ в χ равносильна транзитивности этого действия. Отметим, что из-за мономорфности ψ указанное действие эффективно.

3.2. Предложение. *Если морфизм φ нормален относительно морфизма ψ, то все автоморфизмы γ изотропной группы G^{χ} композиции $\chi = \varphi\psi$ перестановочны с ψ, иначе говоря, G^{χ} содержится в аллотропной группе $G^{(\psi)}$.*
Доказательство следует из определения нормальности.

3.3. При $\chi = \varphi\psi$ с мономорфным ψ определен гомоморфизм групп

$$(G^{\chi} \cap G^{(\psi)})\psi^{a}G^{\varphi}, \quad \gamma\psi^{a} = \beta, \quad \beta\psi = \psi\gamma.$$

Ядро этого гомоморфизма совпадает с изотропной группой G^{ψ}, которая является нормальным делителем в $G^{\chi} \cap G^{(\psi)}$.

(а) Пусть морфизм φ регулярен в морфизме χ. Тогда ψ^{a} - эпиморфизм.

(б) Если φ нормален в χ, то согласно Предложению 3.2 $G^{\chi} = G^{\chi} \cap G^{\psi}$, поэтому G^{ψ} - нормалная подгруппа изотропной группы G^{χ}.

(в) Если φ одновременно регулярно и нормально в χ, то к вышесказанному можно добавить, что изотропная группа G^{φ} изоморфна факторгруппе G^{χ}/G^{ψ}.

(г) Верно такое обращение утверждения п. (б) : Пусть N - нормальная подгруппа изотропной группы G^{χ} морфизма $A\chi C$, а $B\psi C$ - стабилизация по действию группы N. Согласно Предложению 2.6 (д) [1] нормализатор подгруппы N в $\mathrm{Aut}C$, очевидно, содержащий изотропную группу N, содержится в аллотропной группе $G^{(\psi)}$. Отсюда $G^{\chi} \subset G^{(\psi)}$. Поэтому канонический морфизм φ, определяемый равенством $\varphi\psi = \chi$, нормален в u, если только он регулярен в χ.

3.4. Предложение. *Если морфизм $A\varphi B$ регулярен в морфизме AuW, а его композиция χ с морфизмом $B\psi C$ нормальна в u, то φ регулярен в χ.*

Доказательство. Пусть $\chi = \varphi\psi = \varphi\psi'$. Взяв композиции с морфизмом $w \in \chi\backslash u$, получим $u = \varphi\psi w = \varphi\psi' w$. По регулярности φ в u существует автоморфизм ω такой, что $\psi' w = \psi w\omega$. После подстановки в предыдушее равенство и использования нормальности χ в u получим, что $\gamma w = w\omega$ при подходящем автоморфизме γ. Сокращая равенство $\psi' w = \psi\gamma w$ на w, получаем, что φ регулярно в χ.

3.5. Предложение. *(а) Морфизм $A\varphi B$, нормальный в морфизме AuW, нормален в любом делителе $A\chi C$ морфизма u, кратном φ.*

(б) Нормальный в χ морфизм φ нормален в $u \doteq \chi w$, если и только если любой морфизм $v \in \varphi\backslash u$ делится на w.

Доказательство. (а). Пусть $\chi = \varphi\psi = \varphi\psi'$. Умножив справа на $w \in \chi\backslash u$ и воспользовавшись нормальностью φ в u, получаем, что $\psi' w = \beta\psi w$ для подходящего автоморфизма β, а после сокращения на w - $\psi' = \beta\psi$.

(б). Достаточность. Пусть $u = \varphi v = \varphi v'$ и $v = \psi w$, $v' = \psi' w$. Тогда $\chi = \varphi\psi = \varphi\psi'$ и в силу нормальности φ в χ $\psi' = \beta\psi$, для некоторого автоморфизма β. Но тогда $v' = \beta v$.

Необходимость. Из нормальности φ в u следует, что для любого $v \in \varphi\backslash u$ существует автоморфизм β такой, что $v = \beta\psi w$, где $\psi \in \varphi\backslash\chi$.

3.6. Предложение. *Расширение полей $A\varphi B$ конечной степени трансцендентности нормально относительно алгебраически замкнутого расширения полей BvW в категорном смысле тогда и только тогда, когда φ — нормальное алгебраическое расширение или v — тривиальное расширение.*

Доказательство. Пусть сначала φ — трансцендентное расширение и $(t_i, i \in I)$ — его конечный базис трансцендентности. Предположим кроме того, что

(*) существует элемент $t \in W$, не принадлежащий $B \equiv v(B)$ и такой, что семейство $(t, t_i, i \in I \setminus \nu)$ алгебраически свободно над A (ν — некоторый элемент из I).

Тогда согласно свойству продолжения изоморфизмов существует морфизм v' удовлетворящий условиям

$$\varphi v' = \varphi v,\ v'(t_i) = v(t_i),\ \text{Если}\ \ i \in I \setminus \nu,\ \text{и}\ v'(t_\nu) = t.$$

Для такого морфизма v' не существует эндоморфизма β подчиняющегося равенству $\beta v = v'$. Это ясно из того, что образ t_ν относительно βv принадлежит B, тогда как $v'(t_\nu) = t \notin B$. Таким образом, при условии (*) φ не нормально относительно v.

Условие (*) выполнено в следующих двух случаях.

1) W трансцендентно над B. Тогда достаточно взять элемент t трансцендентным над B, а в качестве ν — произвольный элемент I.

2) $W \setminus B$ содержит элемент t, алгебраический над B, но не алгебраический над A. В этом случае t будет алгебраичным и над чисто трансцендентным расширением $A(t_i | i \in I)$ поля A, причем его неприводимый многочлен над этим полем будет иметь хотя бы один коэффициент, зависящий от некоторого t_ν, $\nu \in I$. При этом семейство $(t, t_i | i \in I \setminus \nu)$ будет алгебраически свободным над A, потому что в противном случае существовал

бы многочлен с коэффициентами из поля $A(t_i | i \in I \setminus \nu)$, обнуливающийся в t, что противоречит выбору ν.

Итак, если нормальное относительно алгебраически замкнутого расширения полей v расширение φ трансцендентно, то v — алгебраическое расширение и все элементы $W \setminus B$ алгебраичны над A.

Если $c \in W \setminus B$ — алгебраический над A элемент, а $t \in B$— произвольный трансцендентный над A элемент, то элемент $ct \in W \setminus B$ также должен быть алгебраичным над A, что противоречит трансцендентности t над A. Значит $B = W$, т.е. расширение BvW тривиально, и, следовательно, $A\varphi B$ — алгебраически замкнутое расширение. Тогда $A\varphi B$ нормально относительно тождественного морфизма 1_B.

Действительно, если $\varphi v = \varphi$, то используя конечность степени трансцендентности расширения φ, получим, что B и $v(B) \subset B$ являются алгебраическими замыканиями чисто трансцендентного расширения $A(v(t_i) | i \in I)$, поэтому совпадают. Следовательно v — автоморфизм .

Осталось исследовать случай алгебраического расширения $A\varphi B$. В силу алгебраической замкнутости расширения BvW множество C всех элементов W, алгебраических над A, будет алгебраическим замыканием поля A. Пусть $A\chi C$ и CwW — естественные вложения, так что $\chi w = \varphi v = u$. Ввиду алгебраичности расширения $A\varphi B$ существует (неканоническое) вложение $B\psi C$ и $\chi = \varphi\psi$.

Для любого $v' \in \varphi\backslash u$ образ $v'(B)$ лежит в C, ибо состоит из алгебраических над A элементов, следовательно, v' делится на w. Поэтому согласно предложению 3.5 φ нормально относительно v тогда и только тогда, когда φ нормально в χ. Последнее в свою очередь означает, что $A\varphi B$ — нормальное алгебраическое расширение (Теорема 4, §3, гл. 7, [3]).

3.7. Предложение. *Пусть композиция $A\chi C$ морфизмов $A\varphi B$ и $B\psi C$ нормальна в морфизме AuW. Тогда для нормальности ψ в $v \in \varphi\backslash u$ необходимо и достаточно, чтобы v делилось на ψ. Последнее условие выполняется , если φ регулярно в u.*

Доказательство. Необходимость очевидна. В обратную сторону надо только проверить, что для любых $w, w' \in \psi\backslash v$ найдется автоморфизм γ, подчиняющийся равенству $w' = \gamma w$. А это немедленно следует из нормальности χ в u, потому, что $w, w' \in \chi\backslash u$. Если φ регулярно в u, то из равенств $\varphi v = \varphi\psi w = u$ вытекает, что $v = \psi w\omega$ при подходящем автоморфизме ω.

Заметим, что в отличие от соответствующих свойств регулярности нормальность φ в u из нормальности χ в u, а также нормальность композиции $\chi = \varphi\psi$ в u при условии нормальности φ в u и ψ в некотором $v \in \varphi\backslash u$ не следуют даже в категории полей (см. [3], гл. 7,§3).

3.8. Предложение. *Пусть композиция $A\chi C$ морфизмов $A\varphi B$ и $B\psi C$ нормальна в морфизме AuW и каждый морфизм из $\varphi\backslash u$ делится на ψ. Тогда следующие условия эквивалентны :*

(i) морфизм φ нормален в u.

(ii) морфизм φ нормален в χ.

(iii) морфизм ψ перестановочен со всеми автоморфизмами $\gamma \in G^{\chi}$.

Доказательство. Импликация (i) $\Longrightarrow$ (ii) верна без всяких дополнительных условий лишь бы u делилось на χ (Предложение. 3.5 (a)). Импликация (ii) $\Longrightarrow$ (iii) суть Предложение 3.2. Проверим импликацию (iii) $\Longrightarrow$ (i).

Пусть $w \in \chi\backslash u$ и $v' \in \varphi\backslash u$. Тогда согласно предпосылкам $v' = \psi w'$ с $w' \in \chi\backslash u$ и $w' = \gamma w$, при подходящем автоморфизме γ. Отсюда $u = \chi w = \chi\gamma w$ и, следовательно, $\chi = \varphi\psi = \varphi\psi\gamma$. Согласно (iii) существует автоморфизм β такой, что $\psi\gamma = \beta\psi$. Поэтому, $v' = \psi\gamma w = \beta v$, $v = \psi w$.

3.9. Предложение. *Пусть композиции морфизмов $A\varphi_i B_i$ и $B_i v_i W$ $(i = 1,2)$ равны u. Пусть CwW — их композит, $B_i\psi_i C$ — ассоциированные с композитом морфизмы, а пара морфизмов $(B\eta_1 B_1, B\eta_2 B_2)$ представляет коамальгаму пары (v_1, v_2), т.е. сквозной морфизм $v = \eta_1 v_1 = \eta_2 v_2$ представляет пересечение подобъектов v_1 и v_2. Пусть $A\varphi B$ — морфизм , однозначно определяемый равенствами $\varphi\eta_i = \varphi_i$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) Из нормальности φ_1 в u следует нормальность ψ_2 в v_2, если и только если для любого $\beta \in G^{\varphi_1}$ такого, что $\beta\psi_1 w = \psi_1 w'$ при некотором w'.

удовлетворяющем равенству $\psi_2 w = \psi_2 w'$, *существует автоморфизм* $\gamma \in G^{\psi_2}$ *такой, что* $\beta\psi_1 = \psi_1\gamma$.

(б) Из нормальности φ_i *в* u $(i = 1, 2)$ *следует нормальность* $\chi = \varphi_1\psi_1 = \varphi_2\psi_2$ *в* u *тогда и только тогда, когда для любых автоморфизмов* $\beta_i \in G^{\varphi_i}$ *таких, что* $\beta_i\psi_i w = \psi_i w'$ $(i = 1, 2)$, *при некотором* w', *удовлетворяющем равенству* $\chi w = \chi w'$, *существует автоморфизм* $\gamma \in G^{\chi}$ *такой, что* $\beta_i\psi_i = \psi_i\gamma$.

(в) Из нормальности φ_i *в* u $(i = 1, 2)$ *следует нормальность* φ *в* u, *если морфизм* φ *регулярен в морфизме* u.

Доказательство. (а) Пусть $v_2 = \psi_2 w = \psi_2 w'$. Тогда $\varphi_2 v_2 = \varphi_2\psi_2 w = \varphi_2\psi_2 w'$ и, следовательно, $u = \varphi_1\psi_1 w = \varphi_1\psi_1 w'$. Из-за нормальности φ_1 в u существует автоморфизм $\beta \in G^{\varphi_1}$ такой, что $\psi_1 w' = \beta\psi_1 w$. Согласно наложенному условию $\beta\psi_1 = \psi_1\gamma$ при некотором $\gamma \in G^{\psi_2}$. Поэтому $\psi_1 w' = \psi_1\gamma w$ и $\psi_2 w' = \psi_2\gamma w$. Так как пара морфизмов (ψ_1, ψ_2) — плотная, по определению композита, получаем $w' = \gamma w$.

Обратно, предположим, что φ_1 нормально в u, ψ_2 нормально в v_2. Тогда если w' удовлетворяет равенству $\psi_2 w = \psi_2 w'$, то $w' = \gamma w$, при некотором $\gamma \in G^{\psi_2}$ и условие $\beta\psi_1 w = \psi_1 w'$ влечет равенство $\beta\psi_1 = \psi_1\gamma$.

(б) Прежде всего, равенство $\chi = \varphi_1\psi_1 = \varphi_2\psi_2$ получается из равенства $u = \varphi_1 v_1 = \varphi_2 v_2$ после подстановки $v_i = \psi_i w$ и сокращения на w. В остальном доказательство проводится аналогично предыдущему.

(в) Пусть $u = \varphi v = \varphi v'$. Согласно наложенному условию $v' = v\omega$, $\omega \in G^u$, и вследствие нормальности φ_i в u найдется автоморфизм $\beta_i \in G^{\varphi_i}$ такой, что $\beta_i v_i = v_i\omega$ ($i = 1$ и 2). При этом $(\eta_i\beta_i)v_i = v'$ и по определению коамальгамы существует морфизм $B\beta B$ такой, что $\beta\eta_i = \eta_i\beta_i$. Тогда $v' = \beta v$.

Проверим, что β — изоморфизм. Поскольку $(\eta_i\beta_i^{-1})v_i = \eta_i v_i\omega^{-1} = v\omega^{-1}$ совпадают при $i = 1, 2$, существует морфизм $B\beta' B$ такой, что $\beta'\eta_i = \eta_i\beta_i^{-1}$. Тогда $\beta'\beta\eta_i = \eta_i$ при $i = 1, 2$. Поскольку коамальгама (η_1, η_2) — разделяющая пара морфизмов, $\beta'\beta = 1$ и аналогично $\beta\beta' = 1$.

Замечание. Громоздкие необходимые и достаточные условия пп. (а) и (б) можно заменить простыми и "естественными", но лишь достаточными условиями : пара морфизмов (ψ_1, ψ_2) является амальгамой пары (φ_1, φ_2) и сквозной морфизм $\chi = \varphi_i\psi_i$ (а при (а) — ψ_2) регулярен относительно морфизма w.

Действительно, например, в случае (а) $\varphi_1\beta\psi_1 w = \varphi_1\psi_1 w' = \varphi_2\psi_2 w' = \varphi_2\psi_2 w$, поэтому $\varphi_1(\beta\psi_1) = \varphi_2\psi_2$. По определению амальгамы существует морфизм $C\gamma C$ такой, что $\beta\psi_1 = \psi_1\gamma$, $\psi_2 = \psi_2\gamma$. Из-за регулярности ψ_2 относительно w имеем $w' = w\omega$, $\omega \in G^u$, следовательно, $\beta^{-1}\psi_1 u = \psi_1 w\omega^{-1}$. Как и выше проверяется , что $\varphi_1(\beta^{-1}\psi_1) = \varphi_2\psi_2$, поэтому $\psi_1\gamma' = \beta^{-1}\psi_2$ и $\psi_2\gamma' = \psi_2$ для некоторого $C\gamma' C$. Тогда $\gamma\gamma'$ и $\gamma'\gamma$ принадлежат изотропным группам G^{ψ_1} и G^{ψ_2} и в силу плотности амальгамы (ψ_1, ψ_2) $\gamma\gamma' = \gamma'\gamma = 1$, т.е. γ — автоморфизм .

§4. СТЕПЕНЬ СЕПАРАБЕЛЬНОСТИ

4.1. Степенью сепарабельности морфизма $A\varphi B$ в морфизме $A\chi C$ называется мощность $|\varphi\backslash\chi|$ множества левых частных $\varphi\backslash\chi$. Обозначение — $\mathrm{sep}_\chi\varphi$.

Если морфизм φ регулярен в морфизме χ, то множество левых частных $\varphi\backslash\chi$ биективно множеству левых смежных классов $G^\psi\backslash G^\chi$ при любом $\psi \in \varphi\backslash\chi$ (п. 2.1). Поэтому $\mathrm{sep}_\chi\varphi$ равна индексу подгруппы G^ψ изотропной группы G^χ. Если морфизм φ нормален в морфизме χ, то $\varphi\backslash\chi$ биективно изотропной группе G^φ (п. 3.1), следовательно, $\mathrm{sep}_\chi\varphi = |G^\varphi|$.

4.2. Пусть морфизм $A\chi C$ есть композиция морфизмов $A\varphi B$ и $B\psi C$. Тогда определено стандартное отображение для AuW :

$$(\chi\backslash u)\psi^*(\varphi\backslash u), \quad w\psi^* = \psi w.$$

Слоем точки $v \in \varphi\backslash u$ этого отображения служит множество частных $\psi\backslash v$. Поэтому

(а) $\chi\backslash u = \bigcup_{v\in\varphi\backslash u} \psi\backslash v$;

(б) отображение ψ^* сюръективно, если и только если $\psi\backslash v \neq \emptyset$ при любом $v \in \varphi\backslash u$, т.е. выполняется условие (0) п. 1.4.

В качестве следствия (а) получаем соотношение .

$$\mathrm{sep}_u\chi = \sum_{v\in\varphi\backslash u} \mathrm{sep}_v\psi.$$

Если слои $\psi\backslash v$ всех точек $v \in \varphi\backslash u$ равномощны (в частности, выполняется свойство (б)), то

$$\mathrm{sep}_u\chi = \mathrm{sep}_u\varphi \cdot \mathrm{sep}_v\psi.$$

Это равенство известно под названием свойство мультипликативности степени сепарабельности. Здесь предполагается конечность степеней сепарабельности.

4.3. **Предложение**. *Если морфизм φ и композиция $\chi = \varphi\psi$ регулярны в u, то степень сепарабельности $\mathrm{sep}_u\chi$ мультипликативна относительно разложения $\chi = \varphi\psi$.*

Достаточно заметить, что для любых двух точек $v, v' \in \varphi\backslash u$ существует автоморфизм ω такой, что $v' = v\omega$ и отображение

$$(\psi\backslash v)\omega_*(\psi\backslash v'), \quad w\omega_* = w\omega$$

биективно.

§5. ЧИСТАЯ НЕСЕПАРАБЕЛЬНОСТЬ

5.1. Морфизм $A\varphi B$ называется *чисто несепарабельным* относительно морфизма BvW (в морфизме $u = \varphi v$), если v — единственный морфизм, подчиняющийся равенству $u = \varphi v$. Последнее условие означает, что

$$|\varphi\backslash u| = \mathrm{sep}_u\varphi = 1.$$

Всякий эпиморфизм чисто несепарабелен в любом делящемся на него слева морфизме. В частности, произвольный изоморфизм $A\varphi B$ чисто несепарабелен в любом морфизме $A\chi C$ потому, что $\varphi\backslash\chi = \{\varphi^{-1}\chi\}$.

Из определения сразу следует, что, если мономорфизм φ чисто несепарабелен относительно v (в $u = \varphi v$), то он регулярен и нормален относительно v (в u).

Если морфизм φ чисто несепарабелен относительно v (в u), то совпадают изотропные полугруппы S^v, S^u и группы G^v, G^u а множество биизотропных элементов $\varphi\backslash u/v$, изотропные полугруппы S^φ и группа G^φ тривиальны.

5.2. Предложение. *(а) Если морфизм φ чисто несепарабелен относительно морфизма v, то он чисто несепарабелен и относительно любого его левого делителя ψ.*

(б) Пусть морфизм φ чисто несепарабелен относительно морфизма ψ, а композиция $\chi = \varphi\psi$ нормальна относительно морфизма w. Тогда для чистой несепарабельности φ относительно $v = \psi w$ необходимо и достаточно, чтобы φ было регулярным относительно v.

Доказательство. (а) Пусть $v = \psi w$. Если $\varphi\psi = \varphi\psi'$, то $\varphi v = \varphi\psi w = \varphi\psi' w$, следовательно, $v = \psi w = \psi' w$. Сокращая на w, получаем $\psi = \psi'$.

(б) Необходимость очевидна. Проверим достаточность. В силу регулярности φ относительно v, для любого $v' \in \varphi\backslash u$ существует $\omega \in G^u$ такой, что $v' = \psi w\omega$. Ввиду нормальности χ относительно w, имеем $w\omega = \gamma w$ для некоторого автоморфизма γ. Тогда $\varphi\psi w = \varphi\psi w\omega = \varphi\psi\gamma w$ и после сокращения на w, получаем $\varphi\psi = \varphi\psi\gamma = \chi$. Из чистой несепарабельности φ в χ имеем $\gamma \in G^\psi$ и $v' = v$.

5.3. Предложение. *(а) Пусть композиция $A\chi C$ морфизмов $A\varphi B$ и $B\psi C$ чисто несепарабельна относительно морфизма CwW. Тогда*

(i) ψ чисто несепарабелен относительно w;

(ii) φ чисто несепарабелен относительно $v = \psi w$ (или в $u = \varphi v$), если и только если все $v' \in \varphi\backslash u$ делятся на ψ, эквивалентно, φ регулярно в u;

(б) Обратно, если ψ чисто несепарабельно относительно w, а φ — относительно композиции $v = \psi w$, то $\chi = \varphi\psi$ чисто несепарабельно относительно w

Доказательство. (а) Из равенства $\psi w = \psi w'$ следует равенство $\chi w = \chi w'$, откуда в силу чистой несепарабельности χ относительно w, имеем $w = w'$, что доказывает (i).

Если φ чисто несепарабельно относительно w то, как мы уже знаем, φ регулярно относительно w, а при этом выполняется условие (0) п. 1.4. Если же все элементы множества частных $\varphi\backslash u$ делятся на ψ, то из равенства $\varphi v = \varphi v' = u$ следует равенство $\chi w = \chi w'$, где $v' = \psi w'$. Так как χ чисто несепарабельно относительно w, имеем $w = w'$ и, следовательно, $v = v'$.

(б) Пусть $\chi w = \chi w' = u$. Тогда $\varphi(\psi w) = \varphi(\psi w') = u$ и ввиду чистой несепарабельности φ в u, имеем $\psi w = \psi w'$, а из чистой несепарабельности ψ относительно w получаем $w = w'$.

Заметим, что если потребовать регулярность φ в u, то все результаты доказанного предложения следуют из свойства мультипликативности степени сепарабельности.

5.4. **Предложение.** *Пусть композиции морфизмов $A\varphi B$ и BvW, $A\bar{\varphi}\bar{B}$ и $\bar{B}\bar{v}W$ равны AuW. Пусть CwW — композит морфизмов v и $\bar{v}$, а $B\psi C$ и $\bar{B}\bar{\psi}C$ — ассоциированные с композитом морфизмы. Тогда*

(а) Если φ чисто несепарабелен в u, то $\bar{\psi}$ чисто несепарабелен относительно w.

(б) Если φ и $\bar{\varphi}$ чисто несепарабельны в u, то $\chi = \varphi\psi = \bar{\varphi}\bar{\psi}$ чисто несепарабелен в u.

Доказательство. Из равенства $\bar{\psi}w = \bar{\psi}w'$ следует, что $\bar{\varphi}\bar{\psi}w = \bar{\varphi}\bar{\psi}w' = u$, а значит и $\varphi\psi w = \varphi\psi w' = u$. Согласно свойству чистой несепарабельности φ в u имеем $\psi w = \psi w'$. Пара морфизмов $(\psi, \bar{\psi})$ ассоциированная с композитом, является плотной, поэтому $w = w'$. Утверждение (б) сразу следует из утверждения (а) и Предложения 5.3 (б).

§6. СЕПАРАБЕЛЬНОСТЬ

6.1. Мономорфизм $A\varphi B$ называется *сепарабельным* относительно мономорфизма BvW, если из равенства множеств частных $\eta\backslash\eta v = \eta'\backslash\eta' v$ для правых мономорфных делителей $X\eta B$ и $X'\eta' B$ морфизма φ следует существование изоморфизма $X\sigma X'$ такого, что $\eta' = \sigma\eta$. В дальнейшем предполагаем, что в рассматриваемой категории все морфизмы являются мономорфизмами.

При любом $X\eta B$, делящем $A\varphi B$, множество частных $\eta\backslash\eta v$ лежит в множестве частных $\varphi\backslash u$, где $u = \varphi v$. Поэтому имеем отображение

$$\mathcal{P}_\varphi(B) b_v B(\varphi\backslash u), \quad \eta \longmapsto \eta b_v = \eta\backslash\eta v,$$

где $\mathcal{P}_\varphi(B)$ — множество подобъектов объекта B, содержащих подобъект φ, а $B(\varphi\backslash u)$ — булиан множества частных $\varphi\backslash u$. Сепарабельность морфизма φ относительно морфизма v эквивалентна условию инъективности отображения b_v.

Морфизм $A\varphi B$ называется *сепарабельным* в морфизме AuW, если φ сепарабельно относительно любого $v \in \varphi\backslash u$.

6.2. Если морфизм $A\varphi B$ регулярен в морфизме AuW, то из сепарабельности φ относительно некоторого морфизма $v \in \varphi\backslash u$, следует его сепарабельность относительно любого $v' \in \varphi\backslash u$.

Действительно, по определению регулярности имеем $v' = v\omega$ при подходящем автоморфизме ω. Поэтому для любых правых делителей $X\eta B$ и $X'\eta' B$ морфизма φ имеем

$$\eta\backslash\eta v \cdot \omega = \eta\backslash\eta v', \quad \eta'\backslash\eta' v \cdot \omega = \eta'\backslash\eta' v'.$$

Следовательно, равенство $\eta\backslash\eta v' = \eta'\backslash\eta' v'$ влечет равенство $\eta\backslash\eta v = \eta'\backslash\eta' v$, и значит существование изоморфизма σ такого, что $\eta' = \sigma\eta$.

Таким образом, в случае регулярности морфизма φ в u сепарабельность φ в u сводится к сепарабельности φ относительно некоторого $v \in \varphi\backslash u$.

Кроме того, если φ регулярен относительно v, то и любой его правый делитель η регулярен относительно v, т.е. $\eta\backslash\eta v = vG^{\eta v}$. Поэтому равенство $\eta\backslash\eta v = \eta'\backslash\eta' v$ влечет равенства $vG^{\eta v} = vG^{\eta' v}$ и, следовательно, $G^{\eta v} = G^{\eta' v}$. Действительно, для всякого $\omega' \in G^{\eta' v}$ найдется $\omega \in G^{\eta v}$ такой, что $v\omega = v\omega'$. Отсюда $v = v\omega'\omega^{-1}$ и, следовательно, $\omega' \in G^v\omega$. Поскольку $G^v\omega \subset G^{\eta v}$, из сказанного следует, что $G^{\eta' v} \subset G^{\eta v}$ и аналогично $G^{\eta v} \subset G^{\eta' v}$.

Предложение. *Если морфизм $A\varphi B$ регулярен относительно морфизма BvW, то для сепарабельности φ относительно v необходимо и достаточно, чтобы* *в случае равенства изотропных групп $G^{\eta v} = G^{\eta' v}$ для правых делителей $X\eta B$ и $X'\eta' B$ морфизма φ, выполнялось равенство $\eta' = S^{(\psi)}\eta$ при подходящем изоморфизме $S^{(\psi)}$, т.е. отображение*

$$\mathcal{P}_{\varphi}(B)a_v\mathcal{P}(G^{\eta v}), \quad \eta a_v = G^{\eta v}$$

было инъективным. Регулярный в AuW морфизм $A\varphi B$ сепарабелен в нем, если он сепарабелен относительно некоторого $v \in \varphi\backslash u$.

6.3. В случае, когда для любых морфизмов, делящих морфизм $A\varphi B$, существует композит, условие сепарабельности φ относительно морфизма BvW можно заменить несколько более слабым условием :

для любого разложения морфизма $A\varphi B$ в композицию морфизмов $A\xi X$, $X\eta Y$ и $Y\zeta B$, равенство множеств частных $\eta\zeta\backslash\eta\zeta v = \zeta\backslash\zeta v$ возможно только при изоморфизме η.

Достаточно проверить, что из этого условия следует условие сепарабельности (ибо обратное очевидно).

Лемма. *Пусть η_1' и η_2' — правые делители морфизма φ, а ζ — их композит. Тогда*

$$\eta_1'\backslash\eta_1' v \cap \eta_2'\backslash\eta_2' v = \zeta\backslash\zeta v.$$

Доказательство. Пусть $\eta_i' = \eta_i\zeta$, $i = 1,2$. Согласно Предложению 1.2

$$\zeta\backslash\zeta v \subset \eta_1'\backslash\eta_1' v \cap \eta_2'\backslash\eta_2' v.$$

Обратное включение следует из того, что равенство $\eta_i' v = \eta_i' v'$ можно переписать в виде $\eta_i\zeta v = \eta_i\zeta v'$, $i = 1,2$ и на основании плотности пары морфизмов (η_1, η_2), ассоциированой с композитом ζ, вывести, что $\zeta v = \zeta v'$.

Теперь, если η_1' и η_2' правые делители морфизма φ со свойством $\eta_1'\backslash\eta_1' v = \eta_2'\backslash\eta_2' v$ и ζ — их композит, то, как следует из леммы, $\zeta\backslash\zeta v$ совпадает с предыдущими множествами частных. Поскольку при этом η_1' и η_2' делятся на ζ, согласно новому условию, $\eta_i' = \eta_i\zeta$, $i = 1,2$ при подходящих изоморфизмах η_i. Отсюда $\eta_2' = \eta_2\eta_1^{-1}\eta_1'$.

6.4. Условие $\eta\zeta\backslash\eta\zeta v = \zeta\backslash\zeta v$ означает чистую несепарабельность η относительно ζv, если только любой морфизм множества частных $\eta\backslash\eta\zeta v$ делится на ζ. Действительно, в этом случае всякий морфизм из $\eta\backslash\eta\zeta v$ имеет вид $\zeta v'$, где v' принадлежит множествам частных $\eta\zeta\backslash\eta\zeta v = \zeta\backslash\zeta v$. Поэтому $\zeta v' = \zeta v$ и, следовательно, $|\eta\backslash\eta\zeta v| = 1$.

В другую сторону, предположим, что $\eta\backslash\eta\zeta v$ состоит из единственного морфизма, к тому же делящегося на ζ. Тогда этим морфизмом должна быть композиция ζv. Поэтому если $v' \in \eta\zeta\backslash\eta\zeta v$, то $\zeta v' \in \eta\backslash\eta\zeta v$ и $\zeta v' = \zeta v$, т.е. $v' \in \zeta\backslash\zeta v$. Тем самым справедливо включение $\eta\zeta\backslash\eta\zeta v \subset \zeta\backslash\zeta v$. Обратное включение верно в силу Предложения 1.2.

Отметим, что каждый морфизм из $\eta\backslash\eta\zeta v$ делится на ζ, если η регулярно относительно ζv. Обратное утверждение верно, если φ регулярно относительно v (Предложение 2.5).

6.5. Рассмотрим случай, когда морфизм $A\varphi B$ нормален относительно морфизма BvW (или в композиции $u = \varphi v$).

Предложение. *Если морфизм φ сепарабелен относительно некоторого морфизма $v \in \varphi\backslash u$, то он сепарабелен относительно любого морфизма $v' \in \varphi\backslash u$ и, следовательно, сепарабелен в u. Для сепарабельности φ относительно v необходимо и достаточно, чтобы равенство групп изотропии $G^\eta = G^{\eta'}$ влекло равенство $\eta' = \sigma\eta$ при подходящем изоморфизме σ, где η и η' правые делители морфизма φ.*

Доказательство. Поскольку любой правый делитель η морфизма φ, нормального относительно v, нормален относительно произвольного $v' \in \varphi\backslash\varphi v$ (т.е. $\eta\backslash\eta v' = G^\eta v'$), то равенство множеств частных $\eta\backslash\eta v = \eta'\backslash\eta' v$ эквивалентно равенству групп изотропии $G^\eta = G^{\eta'}$.

6.6. **Предложение**. *Пусть $v = \psi w$, $\chi = \varphi\psi$ и $u = \varphi v = \chi w$, где $A\varphi B$, $B\psi C$ и CwW морфизмы.*

(a) Если морфизм φ сепарабелен относительно ψ (в χ), то он сепарабелен и относительно v (в u).

(б) Обратно, если морфизм φ сепарабелен относительно v (в морфизме

и), то он сепарабелен и относительно ψ (в χ) при условии (1) п. 1.4.

Доказательство следует из Предложений 1.5 и 1.2.

6.7. Предложение. *Если композиция χ морфизмов $A\varphi B$ и $B\psi C$ сепарабельна относительно морфизма CwW, то морфизм ψ сепарабелен относительно w, а φ сепарабелен относительно $v = \psi w$.*

Доказательство. Пусть $\psi = \xi_1\eta_1 = \xi_2\eta_2$ и $\eta_1\backslash\eta_1 w = \eta_2\backslash\eta_2 w$. Тогда $\chi = (\varphi\xi_1)\eta_1 = (\varphi\xi_2)\eta_2$ и в силу сепарабельности χ относительно w имеем $\eta_2 = \sigma\eta_1$ для подходящего изоморфизма σ. Если же $\varphi = \xi_1\eta_1 = \xi_2\eta_2$ и $\eta_1\backslash\eta_1 v = \eta_2\backslash\eta_2 v$, то $\eta_1\psi\backslash\eta_1\psi w = \eta_2\psi\backslash\eta_2\psi w$ и опять ввиду сепарабельности χ относительно w имеем $\eta_2\psi = \sigma\eta_1\psi$, для некоторого изоморфизма σ. Сокращая на ψ, получаем $\eta_2 = \sigma\eta_1$.

6.8. Предложение. *Пусть морфизм $B\psi C$ сепарабелен относительно морфизма CwW, а морфизм $A\varphi B$ регулярен и сепарабелен относительно композиции $v = \psi w$. Тогда морфизм $\chi = \varphi\psi$ сепарабелен относительно морфизма w, если выполняются следующие условия :*

(i) для любого правого делителя $X\eta C$ морфизма χ существуют композит $Y\sigma C$ и пересечение $Z\tau C$ подобъектов η и ψ, причем изотропная группа $G^{\tau w}$ порождается изотропными группами $G^{\eta w}$ и $G^{\psi w}$;

(ii) решётка подобъектов объекта C модулярна.

Доказательство. Пусть $\chi = \xi_1\eta_1 = \xi_2\eta_2$ и $\eta_1\backslash\eta_1 w = \eta_2\backslash\eta_2 w$. Пусть $Y_i\sigma_i C$ — композиты морфизма ψ с η_i $(i = 1, 2)$. Согласно Лемме 6.3

$$\sigma_1\backslash\sigma_1 w = \psi\backslash\psi w \cap \eta_1\backslash\eta_1 w = \psi\backslash\psi w \cap \eta_2\backslash\eta_2 w = \sigma_2\backslash\sigma_2 w.$$

Следовательно, по определению сепарабельности ψ относительно w подобъекты σ_1 и σ_2 равны.

Теперь пусть $Z_i\tau_i C$ — пересечение η_i с ψ $(i = 1, 2)$. Из $\eta_1\backslash\eta_1 w = \eta_2\backslash\eta_2 w$ легко вывести, что $G^{\eta_1 w} = G^{\eta_2 w}$. Но тогда $G^{\tau_1 w} = G^{\tau_2 w}$, поскольку согласно условию (i) они порождаются предыдущими изотропными группами и группой $G^{\psi w}$. В силу сепарабельности φ относительно ψw подобъекты τ_1 и τ_2 совпадают.

Итак, композиты (объединения) и пересечения подобъектов η_1 и η_2 объекта C с подобъектом ψ совпадают. Вследствие модулярности решетки подобъектов объекта C мы имеем равенство $\eta_1 = \eta_2$.

6.9. Предложение. *Пусть композиции морфизмов $A\varphi_i B_i$ и $B_i v_i W$ равны u $(i = 1, 2)$, CwW — композит v_1 и v_2, $B_i\psi_i C$ — ассоциированные с композитом морфизмы. Из сепарабельности морфизма φ_1 относительно морфизма v_1 следует сепарабельность морфизма ψ_2 относительно w, если*

(i) множество $\mathcal{P}_\chi(C)$ подобъектов объекта C, содержащих подобъект $\chi = \varphi_i\psi_i$, является модулярной решеткой с композитами в качестве объединений;

(ii) каждый морфизм $v_1' \in \varphi_1\backslash u$ делится на ψ, причем, существует морфизм $w' \in \psi_1\backslash v_1'$, принадлежащий $\psi_2\backslash v_2$.

Условие (ii) выполняется, если морфизм φ_1 регулярен относительно v_1 и $G^u = G^{v_1} G^{v_2}$.

Доказательство. Пусть $\psi_2 = \tau\zeta = \tau'\zeta'$ и $\zeta\backslash\zeta w = \zeta'\backslash\zeta' w$. Рассмотрим пересечения $\kappa = \eta\zeta = \rho\psi_1$ и $\kappa' = \eta'\zeta' = \rho'\psi_1$ подобъектов ζ и ζ' с ψ_1 и морфизмы ξ и ξ', однозначно определяемые равенствами

$$\xi\rho = \xi'\rho' = \varphi_1, \quad \xi\eta = \varphi_2\tau, \quad \xi'\eta' = \varphi_2\tau'.$$

В силу модулярности решетки $\mathcal{P}_\chi(C)$ имеем

$$\kappa \cup \psi_2 = (\zeta \cap \psi_1) \cup \psi_2 = \zeta \cap (\psi_1 \cup \psi_2) = \zeta \cap 1_C = \zeta,$$

причем согласно (i), ζ является композитом κ и ψ_2. Множества частных $\rho\backslash\rho v_1$ и $\rho'\backslash\rho' v_1$ равны, потому что они соответственно равны совпадающим множествам $\psi_1(\zeta\backslash\zeta w)$ и $\psi_1(\zeta'\backslash\zeta' w)$. Включение $\psi_1(\zeta\backslash\zeta w) \subset \rho\backslash\rho v_1$ очевидно. Обратно, возьмем произвольный $v' \in \rho\backslash\rho v_1$. Согласно (ii) $v_1' = \psi_1 w'$ с $w' \in \psi_2\backslash v_2$. Поэтому

$$\eta(\zeta w') = \rho\psi_1 w' = \rho\psi_1 w = \eta(\zeta w), \quad \tau(\zeta w') = \psi_2 w' = \psi_2 w = \tau(\zeta w).$$

Так как пара морфизмов, ассоциированная с композитом, является плотной, получаем, что $\zeta w' = \zeta w$, т.е. $w' \in \zeta\backslash\zeta w$.

Итак, $\xi(\rho v_1) = \xi'(\rho' v_1)$ и $\rho\backslash\rho v_1 = \rho'\backslash\rho' v_1$. Согласно сепарабельности φ относительно v_1 подобъекты κ и κ' (т.е. пересечения ζ и ζ' с ψ_1) совпадают. Объединения ζ и ζ' с ψ_1 лежат в объединении ψ_2 с ψ_1, поэтому равны тотальному подобъекту 1_C. Вследствие модулярности решетки $\mathcal{P}_\chi(C)$, подобъекты ζ и ζ' равны. Сепарабельность ψ_2 относительно w доказана.

Проверим последнее утверждение предложения. По определению регулярности имеем $v_1' = v_1\omega = \psi_1 w\omega$, где $\omega \in G^u$. Следовательно, $\omega = \omega_1\omega_2$ с компонентами $\omega_i \in G^{v_i}$. Тогда $v_1' = \psi_1(w\omega_2)$ и $\psi_2 v w\omega_2 = v_2\omega_2 = v_2$, т.е. $w' = w\omega_2 \in \psi_2\backslash v_2$.

Следствие. В условиях (i), (ii) Предложения 6.9 и $G^u = G^{v_1}G^{v_2}$, κ сепарабелен относительно w, если φ_2 регулярен и сепарабелен относительно v_2.

Доказательство. Достаточно применить Предложения 6.9 и 6.8.

6.10. В заключение этого параграфа отметим, что введенное общекатегорное понятие сепарабельности морфизма $A\varphi B$ в морфизме AuW в категории полей совпадает с классическим понятием сепарабельности алгебраического расширения полей φ, если в качестве u взять, например, алгебраическое замыкание поля A.

Действительно, сепарабельность конечного расширения полей $A\varphi B$ можно определить условием равенства степени этого расширения и его сепарабельной степени ([3], гл. 7, §4). Ввиду мультипликативности степени и сепарабельной степени расширения получаем, что, если в разложении морфизма $\varphi = \xi\eta\zeta$, расширение η чисто несепарабельно, то η является изоморфизмом.

Обратно, если φ сепарабельно в категорном смысле, то, взяв его разложение в композицию чисто несепарабельного и сепарабельного морфизмов (в классическом смысле), получим, что чисто несепарабельный морфизм является изоморфизмом. Здесь мы пользуемся очевидным фактом, что классическое и категорное понятия чистой несепарабельности полностью адекватны.

§7. МОРФИЗМЫ ГАЛУА

7.1. Морфизм $A\chi C$ называется *морфизмом Галуа* относительно CwW (или в $u = \chi w$), если он регулярен, нормален и сепарабелен относительно w (соотв., в u). Определяемый морфизмом Галуа подобъект объекта C называется *подобъектом Галуа*.

Группа изотропии G^{χ} морфизма (подобъекта) Галуа χ называется *группой Галуа*. Из Предложений 2.5(a), 3.7 и 6.7 следует, что любой морфизм $B\psi C$ делящий χ справа, также будет морфизмом Галуа. Соответствующие им подгруппы группы Галуа называются *подгруппами Галуа*.

7.2. Предложение. *Если $A\chi C$ — морфизм Галуа и композит любой пары морфизмов в C существует, то любой правый делитель $B\psi C$ морфизма χ есть стабилизация по своей группе Галуа G^{ψ}.*

Доказательство. Поскольку каждый морфизм ψ стабилен относительно своей группы изотропии G^{ψ}, надо только проверить, что любой морфизм $X\xi C$, стабильный относительно G^{ψ}, делится на ψ. Пусть $B_{\xi}\psi_{\xi}C$ — композит морфизмов ψ и ξ, $B\psi'_{\xi}B_{\xi}$, $X\xi' B_{\xi}$ ассоциированные с ним морфизмы. Согласно Предложению 1.12 [1] имеем $G^{\psi_{\xi}} = G^{\xi}\cap G^{\psi} = G^{\psi}$. Так как морфизм χ регулярен, нормален и сепарабелен относительно w, в силу п. 3.3 и Предложению 6.2 существует изоморфизм σ такой, что $\psi_{\xi} = \sigma\psi$. Поэтому $\xi = \xi'\psi_{\xi} = \xi'\sigma\psi$.

Следствие. Пусть χ — морфизм Галуа, $\mathcal{P}_{\chi}(C)$ — множество всех подобъектов объекта C, содержащих подобъект χ, $\mathcal{P}_{Gal}(G)$ — множество всех подгрупп Галуа группы Галуа $G = G^{\chi}$. Пара отображений

$$(i)\quad \mathcal{P}_{\chi}(C)g\mathcal{P}_{Gal}(G),\quad \psi g = G^{\psi},$$

$$(ii)\quad \mathcal{P}_{Gal}(G)h\mathcal{P}_{\chi}(C),\quad Hh = \text{стабилизация } C \text{ по } H$$

образует соответствие Галуа, причем $\mathcal{P}_{\chi}(C)$, $\mathcal{P}_{Gal}(G)$ являются множествами замкнутых относительно этого соответствия Галуа элементов. Поэтому $\mathcal{P}_{\chi}(C)$ биективно $\mathcal{P}_{Gal}(G)$.

Доказательство. Прежде всего, стабилизации по подгруппам галуа H группы G существуют согласно доказанному предложению. То, что отображения (i) и (ii) образуют соответствие Галуа, является общим фактом и доказано в [1]. Наконец, $\mathcal{P}_{Gal}(G)$ — множество замкнутых автоморфизмов по определению и свойству квазиобратности соответствий Галуа, а $\mathcal{P}_\chi(C)$ — множество замкнутых морфизмов согласно доказанному предложению.

7.3. Предложение. *Пусть $A\chi C$ — морфизм Галуа относительно CwW (в $u = \chi w$), $A\varphi B$ — его левый делитель и $\psi \in \varphi\backslash\chi$.*

(а) Если φ — морфизм Галуа относительно $v = \psi w$ (в u), то φ — морфизм Галуа и относительно ψ (в χ).

(б) Если φ — морфизм Галуа относительно ψ (в χ), то он является морфизмом Галуа относительно v (в u) тогда и только тогда, когда выполняется условие (1) п. 1.4.

Доказательство. Из нормальности φ относительно ψ следует его нормальность относительно v согласно Предложению 3.5(а). Согласно Предложению 3.5(б), из нормальности φ относительно v следует выполнение условия (1) п. 1.4, поэтому согласно Предложению 6.6(б) морфизм φ сепарабелен относительно ψ, если он сепарабелен относительно v. Регулярность φ относительно ψ устанавливается на основании Предложения 3.4.

Обратно, из сепарабельности φ относительно ψ следует его сепарабельность относительно v согласно Предложению 6.6(а). Поскольку φ регулярен относительно ψ, предполагается выполнение условия (1) п. 1.4 и $\chi = \varphi\psi$ регулярен относительно v, в силу Предложения 2.6 морфизм φ регулярен относительно v. Наконец, на основании Предложения 3.5(б) при нормальности φ относительно ψ, необходимым и достаточным условием нормальности φ относительно v является условие (1) п. 1.4.

7.4. Предложение. *Пусть $A\chi C$ — морфизм Галуа относительно w (в $u = \chi w$) и $\chi = \varphi\psi$.*

(а) Если φ — морфизм Галуа относительно $v = \psi u$ (в u), то группа Галуа G^ψ является нормальным делителем группы Галуа G^χ.

(б) Если G^{ψ} — нормальный делитель группы G^{χ}, то φ — морфизм Галуа относительно v (в u) при условии выполнения свойств (0) и (1) п. 1.4 и существования композитов любых двух морфизмов в объект C.

Доказательство. Согласно Предложению 7.3, если φ — морфизм Галуа относительно v, то φ — морфизм Галуа относительно ψ, а при условии (1) п. 1.4 верна и обратная импликация. Утверждение (а) немедленно следует из п. 3.3(б).

Обратно, на основании п. 3.3(г) и Предложения 7.2 следует совпадение ψ со стабилизацией по своей изотропной группе и из нормальности подгруппы G^{ψ} в G^{χ} вытекает нормальность φ относительно ψ, если только φ регулярно относительно ψ. На основании Предложения 2.5(б) и условия (0) п. 1.4, получаем что морфизм φ регулярен относительно v.

Регулярность и сепарабельность φ относительно ψ следуют соответственно из Предложений 3.4, 6.7 и 6.6(б) ввиду условия (1) п. 1.4.

7.5. Замечание. Если χ нормально относительно w, то условие (0) влечет условие (1) п. 1.4.

Пусть v' произвольный морфизм из $\varphi\backslash u$. Согласно условию (0), существует морфизм w' такой, что $v' = \psi w'$. При этом $\chi w' = \varphi\psi w' = u = \chi w$ и в силу нормальности χ относительно w имеем $w' = \gamma w$, где γ — автоморфизм. Отсюда $v' = \psi\gamma w$.

Отметим, что условие (0) похоже на "свойство продолжения изоморфизмов" классической теории Галуа.

7.6. Теорема. *Пусть $A\chi C$ — морфизм Галуа относительно CwW (в $u = \chi w$) и $\chi = \varphi\psi$ — произвольное разложение. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(а) Морфизм ψ является морфизмом относительно w (в $v = \psi w$);

(б) Если существует композит любых двух морфизмов в объект C, то существуют стабилизации по всем подгруппам Галуа H группы Галуа G^{χ} и пара отображений из Следствия 7.2 составляет соответствие Галуа с множествами замкнутых элементов $\mathcal{P}_{\chi}(C)$ и $\mathcal{F}_{Gal}(G)$, которые a posteriori

биективны.

(в) Если морфизм φ является морфизмом Галуа относительно v (в u), то группа Галуа G^{ψ} является нормальным делителем группы Галуа G^{χ}. Обратная импликация выполняется в случае, когда для всяких двух морфизмов в объект C существует композит и каждый морфизм множества частных $\varphi\backslash u$ делится на ψ. При этом группа Галуа G^{φ} изоморфна факторгруппе $G^{\chi}\backslash G^{\psi}$.

§8. РЕГУЛЯРНЫЕ ЗАМЫКАНИЯ

8.1. Всякий изоморфизм — (более общо, любой эпиморфизм, а при наших ограничениях на рассматриваемую категорию — каждый биморфизм) $A\varphi B$ чисто несепарабелен относительно произвольного морфизма $B\psi C$, следовательно, в любом морфизме $\chi = \varphi\psi$.

Объект A называется *регулярно замкнутым*, если из регулярности морфизма $A\varphi B$ относительно некоторого морфизма $B\varphi C$ (или в морфизме $\chi = \varphi\psi$) следует, что φ — изоморфизм.

8.2. Морфизм AuW называется *регулярным замыканием* объекта A, если

(i) объект W регулярно замкнут ;

(ii) морфизм $A\varphi B$ регулярен относительно морфизма $B\psi C$ (в $\chi = \varphi\psi$) тогда и только тогда, когда $u = \chi w$ делится на χ.

Отметим, что в силу условия (ii) каждый левый делитель морфизма u регулярен в нем.

В случае существования, регулярное замыкание объекта A определяется однозначно, с точностью до изоморфизма объекта W. Действительно, предположим, что AuW и $Au'W'$ — регулярные замыкания объекта A. Тогда согласно (ii) u' регулярно в себе, следовательно, делит u слева. Аналогично u делит слева u'. Частные $\sigma \in u'\backslash u$ и $\sigma' \in u\backslash u'$ в композиции дают элемент изотропной полугруппы $S^u = u\backslash u$, совпадает с изотропной группой G^u ввиду регулярности u в u. Отсюда нетрудно вывести, что σ и σ' — изоморфизмы. С другой стороны, очевидно, что если AuW — регулярное замыкание объекта A, а $W\sigma W'$ — изоморфизм, то и $u' = u\sigma$ — регулярное замыкание объекта A.

Пример. Рассмотрим категорию, объектами которой служат поля, а морфизмами — алгебраические расширения полей. В этой категории любой объект имеет регулярное замыкание, совпадающее с алгебраическим замыканием поля (точнее, с естественным морфизмом данного поля в его алгебраическое замыкание).

8.3. Предположим, что объект A обладает регулярным замыканием. Тогда всякий морфизм $A\varphi B$, регулярный в каком-нибудь морфизме $A\chi C$, регулярен в алгебраическом замыкании AuW т.е. существует универсальный морфизм, в котором регулярны все регулярные в каком-нибудь морфизме морфизмы из A. Поэтому можно ввести (безотносительное) понятие регулярности морфизма $A\varphi B$, всегда имея в виду его регулярность в регулярном замыкании объекта A.

Отметим, что это определение корректно, потому что не зависит от выбора регулярного замыкания объекта A. Более того, аналогично можно ввести (безотносительные) понятия нормальности и сепарабельности морфизма $A\varphi B$.

8.4.**Предложение.** *Пусть $A:W$ — регулярное замыкание объекта A, $A\chi C$ — произвольный регулярный морфизм, $A\varphi B$ — левый делитель морфизма χ. Тогда*

(а) морфизм φ регулярен относительно любого морфизма $v \in \varphi\backslash u$;

(б) для любого морфизма $\psi \in \varphi\backslash\chi$ выполняется условие (0) п. 1.4, т.е. каждый морфизм $v \in \varphi\backslash u$ делится на ψ;

(в) каждый морфизм $\psi \in \varphi\backslash\chi$ регулярен относительно всякого морфизма $w \in \chi\backslash u$ или в любом морфизме $v \in \varphi\backslash u$.

Доказательство. (а) Морфизм φ делит χ и, следовательно, и слева. Значит он регулярен согласно условию (ii) определения регулярного замыкания.

(б) следует из Предложения 2.5 (б) и п. (а) настоящего предложения.

(в) есть непосредственное следствие Предложения 2.5(а).

8.5.**Предложение.** *Если объект A обладает регулярным замыканием AuW, $A\varphi B$ — регулярный морфизм, то любой морфизм $BvW \in \varphi\backslash u$ будет* *регулярным замыканием обьекта B при условии, что B обладает регулярным замыканием.*

Доказательство. Пусть $Bv'W'$ — регулярное замыкание B. Согласно Предложению 8.4(в) морфизм v регулярен в себе. Поэтому согласно (ii) определения регулярного замыканил v делит v'. Аналогично морфизму v частное $\sigma \in v\backslash v'$ регулярно в себе. По определению регулярной замкнутости объекта W это возможно, только если σ — изоморфизм. Поэтому $v = v'\sigma^{-1}$ — регулярное замыкание объекта B.

Замечание. Условие (i) выполняется без предположения существования регулярного замыкания объекта B.

8.6. Теорема 7.6 принимает вполне классический вид. если предположить, что объект A облалает регулярным замыканием, а обьект C — композитами подобъектов. Таким образом, в классическом виде Теорема Галуа верна для произвольных категорий с регулярными замыканиями и композитами подобъектов.

ABSTRACT. Connections between semigroups and groups associated with a morphism and its intermediate subobjects are investigated in case of an abstract category. Results similar to the statements of the main theorem of Galois theory are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Далалян,"Основная теорема в категорной теории Галуа", Изв. Акад. Наук Армении. Математика, [Английский перевод : Journal of Contemporary Math. Anal. (Armenian Academy of Sciences)], том 27, № 4, стр. 1 - 36, 1992.
2. Н. Бурбаки, Алгебра. Многочлены и Поля. Упорядоченные Группы. М., Наука, 1965.
3. С. Ленг, Алгебра, М., Мир, 1968.

22 Декабря 1992 Ереванский государственный университет