# ПАРАМЕТРИКС СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Р. Г. Айрапетян, Г. Р. Александрян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 27. № 6, 1992

В работе построен параметрикс смешанной задачи для гиперболической системы в ситуации, когда бихарактеристики системы трансверсальны боковой границе. Параметрикс построен в виде глобального Интегрального Оператора Фурье (ИОФ). Тем самым, конструкция параметрикса смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка, предложенная Ж. Шазареном, распространена на гиперболические системы. В качестве канонического отношения этого оператора выступает многообразие ломанных бихарактеристик $C$, оснащённое структурой однородного иммерсированного лагранжева подмногообразия. Символ ИОФ построен в виде асимптотической суммы гладких сечений определённым образом выбранных векторных расслоений над $C$.

## §1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе конструкция параметрикса смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка, предложенная Ж. Шазареном в работах [1-2] распространяется на случай строго гиперболической системы уравнений в частных производных первого порядка. Как и в работах [1] и [2], предполагается, что бихарактеристики системы не касаются боковой границы. Параметрикс построен в виде глобального Интегрального Оператора Фурье (каноноческий оператор Маслова). В §2 описано каноническое отношение этого оператора, для чего введено многообразие ломаных бихарактеристик. В §3 и §5 выписан символ этого оператора. Построение символа основано на гладком продолжении канонического отношения (§4). Основной результат работы сформулирован в §6 и доказан в §7.

Микролокальный параметрикс смешанной задачи, в случае когда бихарактеристики касаются границы области, построен в [3-10].

Пусть $X$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial X$. Обозначим $Q = \mathbb{R}_+ \times X$, $Q_0 = \{0\} \times X$, $\partial Q = \mathbb{R}_+ \times \partial X$. Рассмотрим следующие классы распределений :

$$\mathcal{E}'_{r,\delta}(\partial Q) = \{g = (g_1, \dots, g_r): \quad g_j \in \mathcal{E}'(\partial Q),$$

$$\operatorname{singsupp} g_j \subset [\delta, +\infty) \times \partial X, \ j = 1, \dots, r\}:$$

$$\mathcal{D}'_{m,\delta}(Q_0) = \{u = (u_1, \dots, u_m): \quad u_j \in \mathcal{D}'(Q_0),$$

$$\operatorname{singsupp} u_j \subset Q_0, \ \operatorname{dist}(\operatorname{singsupp} u_j, \partial Q) \geq \delta, \ j = 1, .., m\};$$

$$\mathcal{D}'_m(Q) = \{u = (u_1, \dots, u_m): \quad u_j \in \mathcal{D}'(Q)$$

и существует продолжение $\widetilde{u}_j \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ такое, что

$$WF(\widetilde{u}_j) \cap [N_{Q_0}(\mathbb{R}^{n+1}) \cup N_{\partial Q}(\mathbb{R}^{n+1})] = 0, \ j = 1, \dots, m\}.$$

Отметим, что распределения из класса $\mathcal{D}'_m(Q)$ имеют ограничения на $Q_0$ и $\partial Q$.

Пусть $A_j(x)$, $j = 0, 1, \dots, n$ — гладкие матрично-значные функции (размера $m \times m$), определённые в некоторой окрестности $\overline{Q}$, $B(x)$ — гладкая матрично-значная функция (размера $r \times m$), определённая на $\partial Q$.

В работе рассматривается следующая смешанная задача

$$Au = \frac{\partial u}{\partial x_0} - \sum_{j=1}^{n} A_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} - A_0(x)u = 0 \quad \text{в} \quad Q, \tag{1.1}$$

$$u|_{Q_0} = u_0, \quad Bu|_{\partial Q} = g, \tag{1.2}$$

где $x = (x_0, x')$, $x_0 \in \mathbb{R}_+$, $x' = (x_1, \dots, x_n) \in X$, $u_0 \in \mathcal{D}'_{m,\delta}(Q_0)$, $g \in \mathcal{E}'_{r,\delta}(\partial Q)$, и решение $u$ ищется в классе $\mathcal{D}'_m(Q)$.

**Определение 1.1.** Оператор $E_\delta$ называется параметриксом задачи (1.1) – (1.2), если

$$E_\delta : \mathcal{E}'_{r,\delta}(\partial Q) \times \mathcal{D}'_{m,\delta}(Q_0) \longmapsto \mathcal{D}'_m(Q) \tag{1.3}$$

и $E_\delta(g, u_0) - u \in C^\infty(\overline{Q})$, где $u$ точное решение задачи.

Наша цель заключается в построении параметрикса задачи (1.1) – (1.2) в форме глобального Интегрального Оператора Фурье (ИОФ).

Для $z = (x,\xi) \in T^*\overline{Q}$, обозначим через $\sigma_A(z)$ главный символ оператора $A$, т. е. матрицу $\xi_0 I - \sum_{j=1}^{n} A_j(x)\xi_j$, где $I$ — единичная матрица и $\xi = (\xi_0,\xi')$, $\xi_0 \in \mathbb{R}$, $\xi' = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Будем использовать также следующее обозначение : $p(z) = \det\sigma_A(z)$. Предположим, что система (1.1) строго гиперболична, т. е. выполнено следующее условие.

**Условие 1.** *Для каждого* $x \in Q, \xi' \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ уравнение $p(x,\xi) = 0$ относительно $\xi_0$ имеет ровно $m$ различных действительных корней.

Мы предполагаем также нехарактеристичность границы, т. е. предполагается выполненным

**Условие 2.** *Для каждого* $z$ из конормального расслоения $N(\partial Q)$,

$$p(z) \neq 0.$$

Пусть $\pi_Q$: $T^*\overline{Q} \mapsto \overline{Q}$ — естественная проекция. Введём следующие обозначения

$$\mathrm{Char}A = \{z \in T^*\overline{Q}: \quad p(z) = 0\}$$

$$\mathrm{Char}_b A = \{z \in \mathrm{Char}A: \pi_Q z \in \partial Q, \ \frac{\partial p}{\partial \xi_0}(z) > 0\}.$$

Пусть $\Phi_s$: $\mathrm{Char}A \longmapsto \mathrm{Char}A$ бихарактеристический поток, т. е. $\Phi_s$ — поток гамильтонова векторного поля $H_p$. Обозначим

$$\mathrm{Char}_b^+ A = \{z \in \mathrm{Char}_b A: \quad \text{существует } \varepsilon > 0$$

такое, что для любого $s \in (0,\varepsilon)$, $\pi_Q \Phi_s z \in Q\}$

$$\mathrm{Char}_b^- A = \{z \in \mathrm{Char}_b A: \quad \text{существует } \varepsilon > 0$$

такое, что для любого $s \in (0,\varepsilon)$, $\pi_Q \Phi_s z \notin \overline{Q}\}$.

Обозначим также через $\pi_b$ каноническую проекцию $\pi_b$: $T^*\overline{Q}|_{\partial Q} \longmapsto T^*(\partial Q)$.

**Условие 3.** Отображение

$$\pi_b: \quad \mathrm{Char}_b^+ A \longmapsto T^*(\partial Q)$$

является $r$– кратным накрытием.

Условие 3 означает, что из каждой точки границы в область $\dot{T}^*Q$ входят ровно $r$ бихарактеристик.

**Условие 4.** Каждая бихарактеристика исходящая из $\dot{T}^*Q$ трансверсальн пересекает границу области $Q$.

Мы таюже предполагаем, что выполнено условие Лопатинского. Дл того, чтобы сформулировать его в удобной для нас форме, рассмотри тривиальное векторное расслоение $E^m$ над $\dot{T}^*\overline{Q}$, где слоем является $\mathbb{R}^m$

Поскольку для любого $z \in \dot{T}^*Q$ матрица $\sigma_A(z)$ имеет $m$ различных дейст вительных собственных значений, слой над точкой $z$ разлагается в пря мую сумму $m$ инвариантных подпространств матрицы $\sigma_A(z)$. Рассмотри сужение этого векторного расслоения на $\mathrm{Char}A$, т. е. тривиальное век торное расслоение $\mathrm{Char}A \times \mathbb{R}^m \longmapsto \mathrm{Char}A$. Это векторное расслоени имеет линейное подрасслоение $K \longmapsto \mathrm{Char}A$, в котором слоем над точкой $z \in \mathrm{Char}A$ является $\mathrm{Ker}\,\sigma_A(z)$ (см. [11]). Аналогично рассмотрим три виальное векторное расслоение $E^m(\dot{T}^*\partial Q) = \mathbb{R}^m \times \dot{T}^*\partial Q \longmapsto \dot{T}^*\partial Q$ и три виальное гладкое расслоение $G_{m,r}(\dot{T}^*\partial Q)$, где слоем над точкой $m \in \dot{T}^*\partial Q$ является грассманово многообразие $r$–мерных подпространств в $\mathbb{R}^m$. Из условия 3 следует, что для каждого $z \in \dot{T}^*\partial Q$ имеем $\pi_b^{-1}(z) = (z_1, ..., z_r)$, где $z_j \in \mathrm{Char}_b^+ A$, $j = 1, ..., r$.

Пусть $V(z)$ — сечение расслоения $G_{m,r}(\dot{T}^*\partial Q)$ определённое следующим образом :

$$V(z) = K(z_1) + K(z_2) + ... + K(z_r),$$

где $\{z_1, ..., z_r\} = \pi_b^{-1}(z)$.

**Условие 5.** *Для каждого* $z \in \dot{T}^*\partial Q$, $B \in \mathrm{ls}(V, E^r(\dot{T}^*\partial Q))$.

## §2. КАНОНИЧЕСКОЕ ОТНОШЕНИЕ

Пусть

$$\mathrm{Ref}\,A = \{(z_+, z_-): \quad z_\pm \in \mathrm{Char}_b^\pm A, \pi_Q z_+ = \pi_Q z_-, \; z_+ - z_- = 0 \quad \text{на} \quad T_{\pi_Q z_+}\partial Q\}.$$

Обозначим

$$\mathrm{Char}_0 A = \{z \in \mathrm{Char}A: \quad \pi_Q z \in Q_0\}.$$

**Определение 2.1.** (см. [12]). Ломанной бихарактеристикой оператора $A$ назовём отображение

$$\gamma: \quad [s_0, s_1] \setminus J_\gamma \longmapsto \dot{T}^* Q,$$

где $J_\gamma = \{\widehat{s}_0, \ldots, \widehat{s}_{k(\gamma)}\}$ — конечное подмножество $[s_0, s_1]$ такое, что

(i) если $I$ – интервал лежащий в $[s_0, s_1] \setminus J_\gamma$, то кривая $I \ni s \longmapsto \gamma(s)$ есть бихарактеристика оператора $A$ лежащая над $Q$;

(ii) $s_0 = \widehat{s}_0 < \widehat{s}_1 < \ldots < \widehat{s}_{k(\gamma)} < s_1$, $\gamma(s_0) \in \mathrm{Char}_0 A \cup \mathrm{Char}_b^+ A$;

(iii) существуют пределы $\gamma(\widehat{s}_0 + 0)$, $\gamma(\widehat{s}_j \pm 0)$ и

$$(\gamma(\widehat{s}_j + 0), \gamma(\widehat{s}_j - 0)) \in \mathrm{Rel} A, \tag{2.1}$$

где $j = 1, \ldots, k(\gamma)$.

Обозначим через $C$ — множество ломанных бихарактеристик, а через $C_i$ — множество, состоящее из ломанных бихарактеристик имеющих $i$ отражений от границы, т. е. $C_i = \{\gamma \in C: \quad k(\gamma) = i\}$.

Пусть $\pi_0: \dot{T}^* \overline{Q}\big|_{Q_0} \longmapsto \dot{T}^* Q_0$ — естественная проекция. Определим отображение $\pi$

$$\pi: \quad (\mathrm{Char}_0 A \cup \mathrm{Char}_b^+ A) \longmapsto \dot{T}^* Q_0 \cup \dot{T}^* (\partial Q)$$

следующим образом $\pi|_{\mathrm{Char}_0 A} = \pi_0$, $\pi|_{\mathrm{Char}_b^+ A} = \pi_b$. Рассмотрим также отображения

$$\kappa_0: \quad C_i \longmapsto \mathrm{Char} A \cup \mathrm{Char}^+ A, \quad \kappa_j: \quad C_i \longmapsto \mathrm{Char}_b^+ A,$$

$$j = 1, \ldots, i, \quad \chi: C_i \longmapsto \dot{T}^* Q$$

определённые следующим образом :

$$\kappa_j(\gamma) = \gamma(\widehat{s}_j + 0), \; j = 0, 1, \ldots, i, \; \chi(\gamma) = \gamma(s_1). \tag{2.2}$$

Открытыми множествами на $C_i$ назовём прообразы открытых множеств при этих отображениях. На $C_i, i = 0, 1, \ldots$ введём топологии, порождённые этими открытыми множествами. Эти топологии, в свою очередь, порождают топологии на $C$.

Покажем, что для любой $\gamma \in C$ существует окрестность $U_\gamma \subset C$ такая, что отображение $\chi|_{U_\gamma}$ есть биекция на образ. Действительно, пусть $U_j$ такая окрестность точки $\gamma(\widehat{s}_j + 0)$, что равенство $\pi z_1 = \pi z_2$ влечёт $z_1 = z_2$ для всех $z_1, z_2 \in U_j$. Существование такой окрестности следует из Условия 4. Теперь в качестве $U_\gamma$ возьмём

$$U_\gamma = \bigcap_{j=0}^{k(\gamma)} \kappa_j^{-1}(U_j).$$

Покроем $C$ такими окрестностями, а в качестве координатных отображений возьмём композиции отображения $\chi$ с координатными отображениями многообразия $\mathrm{Char}A$. Получаем атлас на $C$, порождающий $C^\infty$–структуру, которая превращает $C$ в $(2n+1)$ – мерное многообразие.

Обозначим через $\imath$ следующее отображение

$$\imath: C \longmapsto \mathrm{Char}A \times (\dot{T}^*Q_0 \cup \dot{T}^*\partial Q), \tag{2.3}$$

где

$$\imath(\gamma) = (\chi(\gamma), \pi \circ \kappa_0(\gamma)). \tag{2.4}$$

Многообразие $C$ имеет следующую стратификацию

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3,$$

где $C_1 = \kappa_0^{-1}(\mathrm{Char}_b^+ A)$, $C_2 = \kappa_0^{-1}(\mathrm{Char}_0 A)$, $C_3 = (\pi_Q \circ \kappa_0)^{-1}(\overline{\partial Q} \cap \overline{Q}_0)$.

Легко видеть, что $C_1$ и $C_2$ — $(2n+1)$–мерные, а $C_3$ — $2n$–мерное многообразия.

Рассмотрим симплектические многообразия $\dot{T}^*Q \times \dot{T}^*(\partial Q)$ и $\dot{T}^*Q \times \dot{T}^*(Q_0)$ с каноническими 2-формами $\omega_b = \sigma_{T^*Q} - \sigma_{T^*(\partial Q)}$ и $\omega_0 = \sigma_{T^*Q} - \sigma_{T^*Q_0}$ соответственно.

**Теорема 2.1.** $(C_1, \imath)$ и $(C_2, \imath)$ суть однородные лагранжевы подмногообразия в $\dot{T}^*Q \times \dot{T}^*(\partial Q)$ и $\dot{T}^*Q \times \dot{T}^*(Q_0)$ соответственно.

**Доказательство.** Докажем теорему только для многообразия $(C_1, \imath)$ (для $(C_2, \imath)$ доказательство аналогично). По определению формы $\omega_b$ имеем

$$\imath^*\omega_b = \chi^*\sigma_{T^*Q} - (\pi \circ \kappa_0)^*\sigma_{T^*\partial Q}. \tag{2.5}$$

Легко показать, что каждая точка $\gamma_0 \in C_1$ имеет такую окрестность $U_{\gamma_0}$, что отображение

$$\varkappa_0 = \pi \circ \kappa_0 \colon U_{\gamma_0} \longmapsto \pi \circ \kappa_0(U_{\gamma_0})$$

является диффеоморфизмом. Следовательно,

$$i^* \omega_b = i_0^* (i_0^{-1} \chi^* \sigma_{T^*Q} - \sigma_{T^*\partial X}). \tag{2.6}$$

Определим отображение

$$\widetilde{\Phi} \colon \varkappa_0(U_{\gamma_0}) \longmapsto \chi(U_{\gamma_0})$$

следующим образом : $\widetilde{\Phi} = \chi \circ \varkappa_0^{-1}$. Покажем, что $\widetilde{\Phi}$ — симплектоморфизм, т. е.

$$\widetilde{\Phi}^* \sigma_{T^*Q} - \sigma_{T^*\partial Q} = 0. \tag{2.7}$$

$\widetilde{\Phi} z_0 = z$ влечёт существование такой $\gamma \in U_{\gamma_0}$, что $\kappa_0(\gamma) = z_0$, $\chi(\gamma) = z$. Окрестность $U_{\gamma_0}$ может быть выбрана так, что для каждого $\gamma \in U_{\gamma_0}$, $k(\gamma) = k(\gamma_0)$. В случае, когда $k(\gamma_0) = 0$ имеем, что $\widetilde{\Phi} = \Phi_{s_1 - s_0}$ и равенство (2.7) следует из известного результата о том, что $\Phi_s$ — симплектоморфизм. Покажем, что оно сохраняется и при наличии отражений ($k(\gamma_0) > 0$). Пусть

$$S_j^{\pm} = \{z \in \mathrm{Char}_b^{\pm} A: \quad \text{существует } \gamma \in U_{\gamma_0} \text{ такое что } z = \gamma(\widehat{s}_j \pm 0)\}. \tag{2.8}$$

Определим отображение

$$r_j \colon S_j^- \longmapsto S_j^+,$$

где $r_j(z_-) = z_+$, если существует $\gamma \in U_{\gamma_0}$ такое, что $z_\pm = \gamma(\widehat{s}_j \pm 0)$.

Пусть $k(\gamma_0) = k > 0$, тогда

$$\widetilde{\Phi} = \Phi_{s_1 - \widehat{s}_k} \circ r_k \circ \Phi_{\widehat{s}_k - \widehat{s}_{k-1}} \circ r_{k-1} \circ \ldots \circ r_1 \circ \Phi_{\widehat{s}_1 - s_0}. \tag{2.9}$$

Для того, чтобы показать, что $\widetilde{\Phi}$ — симплектоморфизм, достаточно показать, что $r_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$ имеют то же свойство. В достаточно малой окрестности $V_j$ точки $\pi_Q \gamma(\widehat{s}_j + 0)$ выберем систему координат таким образом.

чтобы граница области $Q$ записывалась как $x_n = 0$. Пусть $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ — двойственные координаты, тогда

$$r_j(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, 0, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, 0, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \tilde{\xi}_n) \tag{2.10}$$

и

$$\sigma = \sum_{j=0}^{n} d\xi_j \wedge dx_j.$$

Заметим, что на $TS_j^{\pm}$ форма $dx_n$ равна нулю, и

$$r_j^* \sigma - \sigma = 0. \tag{2.11}$$

Из (2.5) и (2.6) следует, что $(C_1, \imath)$ — лагранжево. Докажем, что оно однородное.

Определим на $C$ действие группы $\mathbb{R}_+$, порождённое действием этой группы на $T^*\overline{Q}$, т. е. паре $\gamma \in C$ и $\rho \in \mathbb{R}_+$ ставится в соответствие ломанная бихарактеристика $\rho\gamma$ следующим образом

$$[\rho^{1-m}\hat{s}_0, \rho^{1-m}\hat{s}_1] \setminus \{\rho^{1-m}\hat{s}_0, \dots, \rho^{1-m}s_{k(\gamma)}\} \ni s \longmapsto \rho\gamma = \rho_0\gamma(s) \in \dot{T}^*Q. \tag{2.12}$$

Для того, чтобы убедится в том, что $\rho\gamma$ действительно являéтся ломанной бихарактеристикой достаточно заметить, что система Гамильтона–Якоби и условие (2.1) инвариантны относительно следующей замены переменной :

$$s \longmapsto \rho^{1-m}s, \; x \longmapsto x, \; \xi \longmapsto \rho\xi.$$

Из определения действия группы $\mathbb{R}_+$ на $C$ следует, что

$$\imath \circ \rho = \rho \circ \imath. \tag{2.13}$$

Пусть $\zeta$ — векторное поле на $C_1$, порождённое действием группы $\mathbb{R}_+$. Из (2.13) получаем, что векторные поля $d\chi(\zeta)$ и $d(\pi \circ \kappa_0)\zeta$ порождаются действием группы $\mathbb{R}_+$ на $T^*Q$ и $T^*\partial Q$. Поэтому

$$\imath^*\alpha = \chi^*\alpha_{T^*Q} - (\pi \circ \kappa_0)^*\alpha_{T^*\partial Q} = \chi^*(d\chi(\zeta) \rfloor \sigma_{T^*Q}) - (\pi \circ \kappa_0)^*(d(\pi \circ \kappa_0)\zeta \rfloor \sigma_{T^*\partial Q}) = 0,$$

т. е. $C_1$ — однородное лагранжево многообразие.

## §3. ГЛАВНЫЙ СИМВОЛ ИОФ $F_0$

Пусть $\Omega^{1/2}(\mathrm{Char}A)$ — линейное расслоение полуплотностей на $\mathrm{Char}A$. Обозначим через $K_\Omega$ — линейное расслоение над $\mathrm{Char}A$, являющееся тензорным произведением расслоений $K$ и $\Omega^{1/2}$. Рассмотрим проектор

$$P(z)\colon \mathbb{R}^m \longmapsto \mathrm{Ker}\,\sigma_A(z),$$

порождённый разложением $\mathbb{R}^m$ в прямую сумму инвариантных подпространств матрицы $\sigma_A(z)$. Соответственно, обозначим через

$$P_\Omega\colon \mathbb{R}^m \bigotimes \Omega^{1/2}(\mathrm{Char}A) \longmapsto K_\Omega$$

гомоморфизм векторных расслоений, порождённых проектором $P(z)$.

*Для произвольной точки* $z_0 \in \mathrm{Char}A$ существуют окрестность $U_{z_0} \subset T^*Q$ и гладкая функция $\lambda(z)$, определённая на $U_{z_0}$ такие, что для каждого $z \in U_{z_0}$, $\lambda(z)$ есть собственное значение матрицы $\sigma_A(z)$ обращающееся в нуль в точке $z_0$. Таким образом, в некоторой окрестности $\mathrm{Char}A$ определена гладкая функция $\lambda(z)$, обращающаяся в нуль на $\mathrm{Char}A$. Пусть $v$ — гладкое сечение расслоения $K_\Omega$. Определим следующую скобку Пуассона

$$\{\sigma_A - \lambda I, v\} = \sum_{j=0}^{n} [(\sigma_A - \lambda I)_{\xi_j} v_{x_j} - (\sigma_A - \lambda I)_{x_j} v_{\xi_j}]. \qquad (3.1)$$

Для того, чтобы убедится в корректности этого определения, покажем, что дифференцирование сечения $v$ в правой части (3.1) производится по касательным к $\mathrm{Char}A$ направлениям. В окрестности точки $z_0 \in \mathrm{Char}A$ рассмотрим собственный вектор $v(z)$ матрицы $\sigma_A(z)$, соответствующий собственному значению $\lambda(z)$ и гладко зависящий от $z$. Продифференцировав равенство $(\sigma_A - \lambda I)v = 0$ по $\xi_0$ и воспользовавшись очевидным соотношением $(\sigma_A)_{\xi_0} = I$ получаем

$$v + \sigma_A v_{\xi_0} - \lambda v_{\xi_0} - \lambda_{\xi_0} v = 0.$$

Теперь применим к обеим частям этого равенства проектор $P(z)$. Так как $P(z)\sigma_A(z) = 0$ мы получаем, что $\lambda_{\xi_0} = 1$ на $\mathrm{Char}A$. Продифференцировав равенство $(\sigma_A - \lambda I)v = 0$ по $\xi_0$ и $x_0$ получаем

$$(\sigma_A - \lambda I)\, v_{\xi_0 x_0} + (\sigma_A - \lambda I)_{\xi_0} v_{x_0} + (\sigma_A - \lambda I)_{x_0} v_{\xi_0} - \lambda_{x_0 \xi_0} = 0.$$

Применяя проектор $P(z)$ к этому равенству получаем, что

$$(\sigma_A - \lambda I)_{x_0} v_{\xi_0} = \lambda_{x_0\xi_0} v \tag{3.2}$$

на $\mathrm{Char}A$. Для $i = 1, .., n$ аналогично получаем

$$(\sigma_A - \lambda I)_{x_i} v_{\xi_0} = \lambda_{x_i\xi_0} v, \tag{3.3}$$

$$(\sigma_A - \lambda I)_{\xi_i} v_{\xi_0} = \lambda_{\xi_i\xi_0} v. \tag{3.4}$$

Так как гамильтоново векторное поле $H_\lambda$ касается $\mathrm{Char}A$, имеем

$$\{\lambda, \sigma_A\} v_{\xi_0} = \{\lambda, \lambda_{\xi_0}\} v = (H_\lambda \lambda_{\xi_0}) v = 0. \tag{3.5}$$

Следозательно, на $\mathrm{Char}A$

$$\{\sigma_A, v\} = \{\sigma_A, v\} + \{\lambda, \sigma_A\} v_{\xi_0} = \sum_{j=0}^{n} (\sigma_A)_{\xi_j} (\lambda_{\xi_0} v_{x_j} - \lambda_{x_j} v_{\xi_0}) - \\ - \sum_{j=1}^{n} (\sigma_A)_{x_j} (\lambda_{\xi_0} v_{\xi_j} - \lambda_{\xi_j} v_{\xi_0}). \tag{3.6}$$

1–форма $d\lambda$ обращается в нуль на векторных полях $\lambda_{\xi_0} \dfrac{\partial}{\partial x_j} - \lambda_{x_j} \dfrac{\partial}{\partial \xi_0}$ и $\lambda_{\xi_0} \dfrac{\partial}{\partial \xi_j} - \lambda_{\xi_j} \dfrac{\partial}{\partial \xi_0}$, $j = 1, ..., n$, и поэтому они касаются $\mathrm{Char}A$. Для завершения доказательства остаётся заметить, что $\{\lambda I, v\} = H_\lambda v$ и что векторное поле $H_\lambda$ касается $\mathrm{Char}A$.

Рассмотрим ненулевое гладкое сечение $v(z)$ расслоения $K_\Omega$ в окрестности $U_{z_0}$ точки $z_0 \in \mathrm{Char}A$. Определим функцию $\mu(z)$ на $U_{z_0}$ с помощью соотношения

$$\mu(z) v(z) = P(z) [\sigma_1(z) v(z) + \{\sigma_A - \lambda I, v\}], \tag{3.7}$$

где $\sigma_1(z)$ — субсимвол оператора $A$, т. е.

$$\sigma_1(z) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} A_j - A_0 = \frac{1}{2} \sigma(A + A^*). \tag{3.8}$$

Покажем, что функция $\mu(z)$ не зависит от выбора локального сечения $v(z)$ и, следовательно, инвариантным образом определена на всём $\mathrm{Char}A$.

Другими словами, $\mu(x)$ инвариантна при замене $v(x) \longmapsto \rho(x)v(x)$, где $\rho(x)$ произвольная скалярная гладкая функция определённая на $U_{x_0}$. Для того, чтобы показать это, заметим, что на $\mathrm{Char}A$

$$P(x)\left[\sigma_1(x)\rho(x)v(x) + \{\sigma_A - \lambda I, \rho v\}\right] - \rho(x)\,P(x)\left[\sigma_1(x)\,v(x) + \{\sigma_A - \lambda I, v\}\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left[\rho_{x_j}P(x)(\sigma_A - \lambda I)_{\xi_j}v - \rho_{\xi_j}P(x)(\sigma_A - \lambda I)_{x_j}v\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\rho_{x_j}P(x)\left[\lambda_{\xi_0}(\sigma_A - \lambda\Gamma)_{\xi_j} - \lambda_{\xi_j}(\sigma_A - \lambda\Gamma)_{\xi_0}\right]v(x) -$$

$$- \sum_{j=0}^{n}\rho_{\xi_j}P(x)\left[\lambda_{\xi_0}(\sigma_A - \lambda\Gamma)_{x_j} - \lambda_{x_j}(\sigma_A - \lambda\Gamma)_{\xi_0}\right]v(x).$$

Покажем, что последнее выражение равно нулю. Для этого достаточно применить векторные поля

$$\lambda_{\xi_0}\frac{\partial}{\partial\xi_j} - \lambda_{\xi_j}\frac{\partial}{\partial\xi_0}, \quad j = 0;1,\ldots,n,$$

и

$$\lambda_{\xi_0}\frac{\partial}{\partial x_j} - \lambda_{x_j}\frac{\partial}{\partial\xi_0}, \quad j = 0,1,\ldots,n$$

к обеим частям равенства $(\sigma_A - \lambda I)v = 0$ а затем подействовать проектором $P(x)$. Определим на $C$ функцию $\mu_C$ следующим образом :

$$\mu_C(\gamma) = \int_{s_0}^{s_1}\mu(\gamma(s))\,ds.$$

Далее, на линейном расслоении $K_\Omega$ определим линейную связность $\nabla$. Пусть $\eta$ — векторное поле на $\mathrm{Char}A$, $v(x)$ — сечение расслоения $K_\Omega$, рассматриваемое как сечение тривиального векторного расслоения

$$\Omega^{1/2}(\mathrm{Char}A) \times \mathbb{R}^m \longmapsto \mathrm{Char}A.$$

Определим

$$\nabla_\eta v(x) = P(x)\left[D_\eta v(x)\right], \tag{3.9}$$

где $D_\eta$ — производная Ли сечения $v$ вдоль векторного поля $\eta$. Эта связность имеет простой геометрический смысл : для того, чтобы осуществить параллельный перенос вектора из слоя расслоения $K_\Omega$ вдоль некоторой кривой

$\gamma$ нужно параллельно перенести его вдоль кривой.как вектор из слоя три
ального расслоения $\Omega^{1/2}(\mathrm{Char}A)\bigotimes \mathbb{R}^m \longmapsto \mathrm{Char}A$, а затем полученный ве
тор спроектировать с помощью проектора $P(z)$.

Пусть $\gamma(z_1,z_2)$ — бихарактеристика, соединяющая $z_1,z_2 \in \dot{T}^*\overline{Q}$. Обоз
начим через $R^{\nabla,K}_{z_1,z_2}$ оператор параллельного переноса в расслоении $K_\Omega$ вдол
кривой $\gamma(z_1,z_2)$, порождённый связностью $\nabla$. Таким образом, если $v_1 \in K_{z_1}$
то $R^{\nabla,K}_{z_1,z_2}v_1 = v_2 \in K_{z_2}$, причём существует сечение $s$ расслоения $K_\Omega$ дл
которого $\nabla s = 0$, $s(z_1) = v_1$, $s(z_2) = v_2$.

Рассмотрим векторное расслоение $\mathcal{M}^r_K = K \times K \times \ldots \times K$ ($r$ со
множителей) над $\mathrm{Char}A$. Слоем в $\mathcal{M}^r_K$ является $r$-мерное векторное про
странство матриц размера $m \times r$, столбцы которых принадлежат слою рас
слоения $K$. Таким образом, оператор $R^{\nabla,K}_{z_1,z_2}$, действующий в $K_\Omega$, порожда
оператор параллельного переноса $R^{\nabla}_{z_1,z_2}$, действующий в расслоении $\mathcal{M}^r_K$.

Полагая $z_0 \in \dot{T}^*\partial Q$, из Условия 3 находим $\pi_b^{-1}z = \{z_1,\ldots,z_r\}$, где
$z_j \in \mathrm{Char}^+_b A$, $j = 1,\ldots,r$. Пусть $U_{z_0}$ — окрестность точки $z_0$ такая, что
существуют гладкие ненулевые сечения $v_i(z)$ линейного векторного расс
лоения $K_\Omega$, определённые в окрестностях $U_{z_i^0}$ точек $z_i^0$ и $U_{z_0} \subset \pi_b U_{z_i^0}$ для
$i = 1,\ldots,r$. Поэтому можно определить гладкую матричнозначную функцию
$V(z)$ в $U_{z_0}$, столбцами которой являются $v_1(z),\ldots,v_r(z)$.

Теперь определим следующие матричные функции в $U_{z_0}$ (см. [13])

$$W(z) = V(z)\left[B(z)V(z)\right]^{-1}. \tag{3.10}$$

Наше определение корректно, так как из Условия 5 следует, что $B(z)V(z)$
есть невырожденная матрица. $W(z)$ не зависит от выбора $V(z)$, и, поэтому,
она определена на $\dot{T}^*\partial Q$. Рассмотрим следующие сечения $\Omega_0$ и $\Omega$ расслоения
$\mathcal{M}^r_K$:

$$\Omega_0(z) = P(z)W(\pi_i z), \tag{3.11}$$

$$\Omega(z) = -P(z)W(\pi_b z)B(\pi_b z). \tag{3.12}$$

Обозначим через $\mathcal{M}^r_K(C_1)$ векторное расслоение полученное поднятием
слоёв расслоения $\mathcal{M}^r_K$ относительно отображения $\chi\colon C_1 \longmapsto \mathrm{Char}A$. Опре-

делим главный символ оператора $\mathcal{F}_0$ как гладкое сечение расслоения $M_K^r(C_1) \bigotimes \Omega^{1/2}(C_1)$.

Пусть $\nu_{\partial Q}$ — произвольное ненулевое сечение расслоения $\Omega^{1/2}(\partial Q) \longmapsto \partial Q$, $\gamma \in C_1$, и главный символ $\sigma_{\mathcal{F}_0}$ определяется формулой

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathcal{F}_0}(\gamma) = \chi^* \exp[-\mu_C(\gamma)]\, \mathbf{R}^{\nabla}_{\kappa_{k(\gamma)-1}(\gamma),\chi(\gamma)} \Omega(\kappa_{k(\gamma)-1}(\gamma)) \circ \\ \circ \mathbf{R}^{\nabla}_{\kappa_{k(\gamma)-2}(\gamma),\kappa_{k(\gamma)-1}(\gamma)} \Omega(\kappa_{k(\gamma)-2}(\gamma)) \ldots \circ \\ \circ \mathbf{R}^{\nabla}_{\kappa_1(\gamma),\kappa_2(\gamma)} \Omega(\kappa_1(\gamma)) \circ \mathbf{R}^{\nabla}_{\kappa_0(\gamma),\kappa_1(\gamma)} \Omega_0(\kappa_0(\gamma)) \bigotimes \\ \bigotimes \pi_Q^* |dx|^{1/2}) \bigotimes \pi_Q^* \nu_{0Q})).\end{aligned} \tag{3.13}$$

Заметим, что поднятие полуплотностей с $Q$ и $\partial Q$ на $\mathrm{Char}A$ и $\mathrm{Char}_b^+ A$ относительно отображения $\pi_Q$ и с $\mathrm{Char}A$ на $C$ относительно отображения $\chi$ корректно, поскольку отображения $\pi_Q$: $\mathrm{Char}A \longmapsto Q$, $\pi_Q$: $\mathrm{Char}_b^+ A \longmapsto \partial Q$ и $\chi$: $C \longmapsto \mathrm{Char}A$ сюръективны.

Аналогично, обозначим через $M_K^m(C_2)$ векторное расслоение над $C_2$ полученное поднятием слоёв расслоения $M_K^m$ над $\mathrm{Char}A$ относительно отображения $\chi$: $C_2 \longmapsto \mathrm{Char}A$. Соответственно, для $\gamma \in C_2$ определим $\sigma_{\mathcal{F}_0}(\gamma)$ как гладкое сечение расслоения $M_K^m(C_2) \bigotimes \Omega^{1/2}(C_2)$ формулой :

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathcal{F}_0}(\gamma) = \chi^* \exp[-\mu_C(\gamma)]\, \mathbf{R}^{\nabla}_{\kappa_{k(\gamma)-1}(\gamma),\chi(\gamma)} \Omega(\kappa_{k(\gamma)-1}(\gamma)) \circ \\ \circ \mathbf{R}^{\nabla}_{\kappa_{k(\gamma)-2}(\gamma),\kappa_{k(\gamma)-1}(\gamma)} \Omega(\kappa_{k(\gamma)-2}(\gamma)) \ldots \circ \\ \circ \mathbf{R}^{\nabla}_{\kappa_1(\gamma),\kappa_2(\gamma)} \Omega(\kappa_1(\gamma)) \circ \mathbf{R}^{\nabla}_{\kappa_0(\gamma),\kappa_1(\gamma)} \Omega(\kappa_0(\gamma)) \bigotimes \\ \bigotimes \pi_Q^* |dx|^{1/2}) \bigotimes \pi_{Q_0}^* dx')).\end{aligned} \tag{3.14}$$

## §4. ПРОДОЛЖЕННОЕ КАНОНИЧЕСКОЕ ОТНОШЕНИЕ

Обозначим через $\tilde{Q}$ открытую окрестность множества $\overline{Q}$, в которой определены коэффициенты оператора $A$. Соответственно

$$\widetilde{\mathrm{Char}}^{\pm} A = \{z \in \dot{T}^* \tilde{Q}: \quad p(z) = 0,\ \pm \frac{\partial p}{\partial \xi_0} > 0\}. \tag{4.1}$$

Пусть $\mathrm{Bich}^{\pm} A$ — множества бихарактеристик оператора $A$ направленных относительно оси $t$ вверх (+) или вниз (−), т. е. $\mathrm{Bich}A$ есть множество отображений $\gamma$ таких, что

$$(-\infty,\infty)\supset[s_0,s_1]\ni s\longmapsto\gamma(s)\in\widetilde{\mathrm{Char}}^{\pm}A,\ s_0<s_1.$$

Рассмотрим отображения $\beta_j$: $\mathrm{Bich}^{\pm}A\longmapsto\widetilde{\mathrm{Char}}^{\pm}A, j=0,1$ такие, что $\beta_j(\gamma)=\gamma(s_j)$. Наделим $\mathrm{Bich}^{\pm}A$ структурой $(2n+2)$-мерного $C^{\infty}$-многообразия, порождённой отображением

$$\beta=\beta_0\times\beta_1:\quad \mathrm{Bich}^{\pm}A\longmapsto\widetilde{\mathrm{Char}}^{\pm}A\times\widetilde{\mathrm{Char}}^{\pm}A.$$

Обозначим

$$\mathrm{Bich}_{\flat}^{\pm}A=\{\gamma\in\mathrm{Bich}^{\pm}A:\quad \beta_0(\gamma)\in\mathrm{Char}_{\flat}^{+}A\},$$

$$\mathrm{Bich}_{\flat}A=\mathrm{Char}_{\flat}^{+}A\cup\mathrm{Bich}_{\flat}^{+}A\cup\mathrm{Bich}_{\flat}^{-}A.$$

Для того, чтобы продолжить отображения $\beta_0,\beta_1,\beta$ на $\mathrm{Bich}_{\flat}A$ доопределим их на $\mathrm{Char}_{\flat}^{+}A$ следующим образом :

$\beta_i|_{\mathrm{Char}_{\flat}^{+}A}=\mathrm{id}$, $\beta=\beta_0\times\beta_1$. При этом $\mathrm{Bich}_{\flat}A$ наделяется структурой гладкого $(2n+1)$-мерного многообразия.

**Определение 4.1.** Отображение

$$\gamma:[s_0,s_1]\setminus J\ni s\longmapsto\gamma(s)\in\mathrm{Char}A,$$

мы называем продолженной до границы ломанной бихарактеристикой оператора $A$, если выполнены следующие условия :

1) для любого $\tilde{s}_1\in(s_0,s_1)\setminus J$ ограничение $\gamma$ на $[s_0,\tilde{s}_1]$ является ломанной бихарактеристикой оператора $A$ ;

2) $\chi(\gamma)=\gamma(s_1-0)\in\mathrm{Char}_{\flat}^{+}A$.

Обозначим через $\hat{C}$ множество всех продолженных до границы ломанных бихарактеристик оператора $A$. Введём на $\hat{C}$ топологию, являющуюся прообразом топологии на $\mathrm{Char}_{\flat}^{+}A$ относительно отображений $\kappa_0,\dots,\kappa_{k(\gamma)},\chi$. Затем мы наделяем $\hat{C}$ структурой $2n$-мерного $C^{\infty}$-многообразия с помощью $\chi$.

В многообразии $(\mathrm{Char}_{\flat}^{+}A\cup\hat{C})\times\mathrm{Bich}_{\flat}A$ рассмотрим следующие подмногообразия :

$$\tilde{C}_{1,i}=\{(\gamma_1,\gamma_2):\quad \gamma_1\in\mathrm{Char}_{\flat}^{+}A,\ \gamma_2\in\mathrm{Char}_{\flat}^{+}A\cup\mathrm{Bich}_{\flat}^{+}A \text{ для } i=1 \text{ и}$$

$$\gamma_2\in\mathrm{Bich}_{\flat}^{-}A \text{ для } i=2,\ \gamma_1=\beta_0(\gamma_2)\},$$

$$\tilde{C}_{2,i} = \{(\gamma_1, \gamma_2): \quad \gamma_1 \in \hat{C},\ \gamma_2 \in \mathrm{Char}_b^+ A \cup \mathrm{Bich}_b^+ A \text{ для } i = 1 \text{ и}$$

$$\gamma_2 \in \mathrm{Bich}_b^- A \text{ для } i = 2,\ (\beta_0(\gamma_2), \chi(\gamma_1)) \in \mathrm{Ref} A\}.$$

Пусть $\tilde{C} = \tilde{C}_{11} \cup \tilde{C}_{12} \cup \tilde{C}_{21} \cup \tilde{C}_{22}$. В силу Условия 4 $\tilde{C}$ является $(2n+1)$–мерным $C^\infty$–многообразием и $C \subset \tilde{C}$. Заметим, что

$$\tilde{C} = \tilde{C}_1 \cup \tilde{C}_2 \cup \tilde{C}_3 \quad \text{и} \quad C_i \subset \tilde{C}_i,\ i = 1,2,3.$$

Рассмотрим отображение $\tau$: $\tilde{C} \longmapsto \dot{T}^*(\tilde{Q}) \times (\dot{T}^*(\partial Q) \times \dot{T}^*(Q_0))$, определённое следующим образом $\tau = \beta_1 \times \pi \circ \kappa_0$, где $\kappa_0$ доопределено на $\mathrm{Char}_b^+ A$ как тождественное отображение.

Аналогично тому, как вто было сделано при доказательстве Теоремы 2.1, можно показать, что $(\tilde{C}_1, \tau)$ и $(\tilde{C}_2, \tau)$ — иммерсированные однородные лагранжевы подмногообразия в $\dot{T}^*(\tilde{Q}) \times \dot{T}^*(\partial Q)$ и $\dot{T}^*(\tilde{Q}) \times (\dot{T}^*(Q_0)$. Назовём $(\tilde{C}, \tau)$ продолженным каноническим отношением. Если $\overline{C}$ — замыкание $C$ в $\tilde{C}$, то

$$\partial C = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in \tilde{C}_{1,1} \cup \tilde{C}_{2,1}: \quad \beta_1(\gamma_2) \in \dot{T}^* \overline{Q}\Big|_{\partial Q}\}.$$

Границу $\partial C$ можно представить в виде обьединения непересекающихся подмногообразий

$$\partial C = \partial_0 C \cup \partial_+ C \cup \partial_- C, \tag{4.2}$$

где

$$\partial_0 C = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in \tilde{C}_{1,1}: \quad \gamma_1 = \gamma_2\} \sim \mathrm{Char}_b^+ A,$$

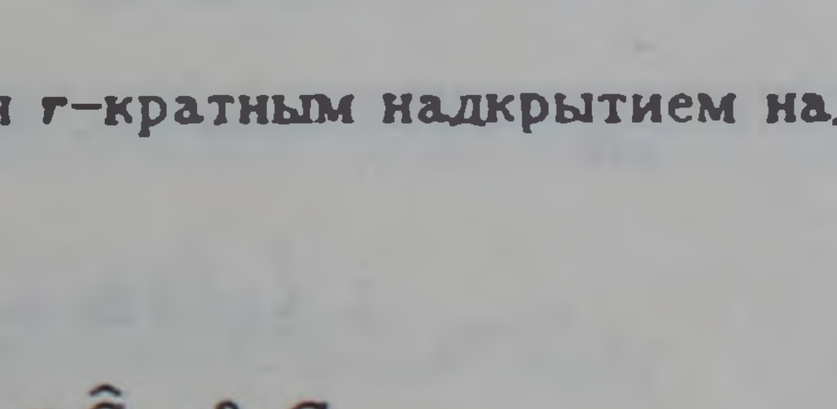
$$\partial_+ C = \partial C \cap \tilde{C}_{2,1} = \{(\gamma_1, \gamma_2): \quad \gamma_1 \in \hat{C},\ \gamma_2 \in \mathrm{Char}_b^+ A,\ (\chi(\gamma_1), \gamma_2) \in \mathrm{Ref} A\},$$

$$\partial_- C = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in \partial C: \quad \gamma_2 \in \mathrm{Bich}_b^+ A\} \sim \hat{C}.$$

Из Условия 3 следует, что $\partial_+ C$ является $r$–кратным надкрытием над $\partial_- C$ относительно отображения

$$\partial_+ C \ni (\gamma_1, \gamma_2) \longmapsto \gamma_1 \in \hat{C} \sim \partial_- C.$$

Наша цель продолжить ИОФ $\mathcal{F}_0$ до ИОФ $\tilde{\mathcal{F}}_0$ с каноническим отношением $\tilde{C}$. Таким образом, мы должны продолжить главный символ оператора $\mathcal{F}_0$



с $C$ на $\tilde{C}$. С этой целью рассмотрим линейное расслоение $\tilde{K}_\Omega \longmapsto \widetilde{\mathrm{Char}A}$, определённое аналогично расслоению $K_\Omega \longmapsto \mathrm{Char}A$.

Естественным образом продолжим функцию $\mu(z)$ с $\mathrm{Char}A$ на $\widetilde{\mathrm{Char}A}$ и линейную связность $\nabla$ с $K$ на $\tilde{K}$. Соответственно, определим оператор параллельного переноса $R^{\nabla,\tilde{K}}_{x_1,x_2}$. Определим теперь главный символ оператора $\tilde{\mathcal{F}}_0$ следующим образом :

1) если $(\gamma_1,\gamma_2) \in C_{1,1} \cup C_{1,2}$, то

$$\sigma_{\tilde{\mathcal{F}}_0}(\gamma_1,\gamma_2) = R^{\nabla,\tilde{K}_\Omega}_{\beta_1(\gamma_2),\beta_0(\gamma_2)} \Omega_0(\pi_b\gamma_1) \bigotimes \beta_1^* |dx|^{1/2} \bigotimes \beta_0^* \nu_{\partial Q}. \tag{4.3}$$

2) если $(\gamma_1,\gamma_2) \in \tilde{C}_{2,1} \cup \tilde{C}_{2,2}$, то

$$\sigma_{\tilde{\mathcal{F}}_0}(\gamma_1,\gamma_2) = R^{\nabla,\tilde{K}_\Omega}_{\beta_1(\gamma_2),\beta_0(\gamma_2)} \Omega(\pi_b\beta_0(\gamma_2)) \sigma_{\mathcal{F}_0}(\gamma_1), \tag{4.4}$$

где $\sigma_{\mathcal{F}_0}$ определён на продолженных до границы ломанных бихарактеристиках по непрерывности.

Таким образом, построен ИОФ $\tilde{\mathcal{F}}_0$: $\mathcal{E}'_{r,\delta}(\partial Q) \times D'_{m,\delta}(Q_0) \longmapsto \tilde{\mathcal{D}}'_m(Q)$ такой, что для любого $(g,u) \in \mathcal{E}'_{r,\delta}(\partial Q) \times D'_{m,\delta}(Q_0)$

$$\tilde{\mathcal{F}}_0(g,u)\Big|_Q = \mathcal{F}_0(g,u). \tag{4.5}$$

## §5. ГЛАВНЫЕ СИМВОЛЫ ОПЕРАТОРОВ ИОФ $\mathcal{F}_j$, $j \geq 1$

Мы начнём с описания процедуры интегрирования сечений линейного расслоения со связностью вдоль кривых лежащих на базе.

Пусть M — произвольное гладкое многообразие, $L$ — линейное расслоение над M, $\nabla$ — линейная связностпе на $L$, $v$ — сечение $L$ и $\gamma$: $[s_0,s_1] \longmapsto$ M — непрерывная кривая на M.

Определим интеграл от $v$ по $\gamma$ следующим образом :

$$\int v(s)\,ds = \int_{s_0}^{s_1} f(\gamma(s))\,\omega(\gamma(s_1))\,ds, \tag{5.1}$$

где $\omega$ — горизонтальное относительно связности $\nabla$ ненулевое сечение расслоения $L$ над кривой $\gamma$, $f$ — функция, определённая на кривой $\gamma$ соотношением $v = f\omega$. Заметим, что интеграл в (5.1) не зависит от выбора

горизонтального сечения $\omega$. Действительно, пусть $\omega_1$ — другое горизонтальное ненулевое сечение такое, что $\omega = \rho\omega_1$ и $\xi$ — векторное поле $d\gamma\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$, тогда

$$0 = \nabla_\xi \omega = \nabla_\xi(\rho\omega_1) = (\xi\rho)\omega_1 + \rho\,\nabla_\xi\,\omega_1 = (\xi\rho)\omega_1,$$

и $\rho = \mathrm{const}$ вдоль кривой $\gamma$. Поэтому $v = f_1\omega_1$ влечёт $f_1 = \rho f$ и

$$\int_{s_0}^{s_1} f(\gamma(s))\,\omega(\gamma(s_1))\,ds = \int_{s_0}^{s_1} f_1(\gamma(s))\,\omega_1(\gamma(s_1))\,ds.$$

Обозначим через $\mathcal{F}_b$ ИОФ с каноническим отношением

$$C_b = \{(z_1, z_2) \in \dot{T}^*\partial Q \times \dot{T}^*\partial Q: \quad \pi_Q z_2 \in \partial Q,\ \pi_b z_2 = z_1\} \tag{5.2}$$

и символом $B(\pi_Q z_1) \bigotimes \nu_{\partial Q} \bigotimes |dx|^{1/2}$ ([14]). Заметим, что

$$\mathcal{F}_b \in I^{1/4}(\partial Q, \tilde{Q}, C_b, \Omega^{1/2}_{\partial Q\times\tilde{Q}} \times \mathrm{Hom}(E^r(\partial Q), E^m(\tilde{Q})).$$

Нашей целью является построение последовательности ИОФ $\tilde{\mathcal{F}}_j$, $j = 1, 2, \ldots$, с одним и тем же каноническим отношением $\tilde{C}$ и главными символами, определёнными рекурентными соотношениями и удовлетворяющими следующим условиям :

$$\tilde{\mathcal{F}}_j \in I^{\frac{-1}{4}-j}(\tilde{Q}, \partial Q, \tilde{C}, \Omega^{1/2}_{\tilde{Q}\times\partial Q} \bigotimes \mathrm{Hom}(E^m(\tilde{Q}), E^r(\partial Q))), \tag{5.3}$$

$$A \circ \sum_{j=0}^{l} \tilde{\mathcal{F}}_j \in I^{\frac{-1}{4}-i}(\tilde{Q}, \partial Q, \tilde{C}, \Omega^{1/2}_{\tilde{Q}\times\partial Q} \bigotimes \mathrm{Hom}(E^m(\tilde{Q}), E^r(\partial Q))), \tag{5.4}$$

$$\mathcal{F}_b \circ \sum_{j=0}^{l} \tilde{\mathcal{F}}_j - Id \in I^{-1-l}(\partial Q, \partial Q, C_b \circ \tilde{C}, \Omega^{1/2}_{\partial Q\times\partial Q} \bigotimes \mathrm{Hom}(E^r(\tilde{Q}).E^r(\partial Q))), \tag{5.5}$$

$$l = 0, 1, \ldots.$$

На языке символов соотношение (5.4) можно записать следующим образом :

$$\sigma\left(A \circ \sum_{j=0}^{l} \tilde{\mathcal{F}}_j\right) \in S^{\frac{1}{2}-1-l}(\tilde{C}, \Omega^{1/2}_{\tilde{C}} \bigotimes \mathrm{Hom}(E^m(\tilde{C}), E^r(\tilde{C})). \tag{5.6}$$

Будем предполагать, что выполнено также следующее соотношение

$$P\sigma\left(A \circ \sum_{j=0}^{l} \tilde{\mathcal{F}}_j\right) \in S^{\frac{1}{2}-1-l}(\tilde{C}, \Omega^{1/2}_{\tilde{C}} \bigotimes \mathrm{Hom}(E^m(\tilde{C}), E^r(\tilde{C})). \tag{5.7}$$

Отметим, что композиция ИОФ $\mathcal{F}_i$ и $\tilde{\mathcal{F}}_j$ корректно определены, потому что из Условия 4 следует, что композиция канонических отношений $C_i$ и $\tilde{C}$ трансверсальна (§7). Также отметим, что ИОФ $\tilde{\mathcal{F}}_0$ построенный в §§2,3 удовлетворяет всем этим условиям для $l = 0$ (это будет показано в §7).

Пусть $z_0 \in \mathrm{Char}A$, $M_1(z)$ — гладкая матричнозначная (размера $(m-1) \times m$) функция, столбцами которой являются базисные векторы пространства $(I - P(z))\mathbf{R}^m$. Матрица $M_1(z)$ определена с точностью до правого действия группы $GL(m-1, \mathbf{R})$.

Из Условия 1 следует, что $\sigma_A(z)$ — автоморфизм подпространства $(I - P(z))\,\mathbf{R}^m$.

В окрестности $z_0$ рассмотрим гладкую матричнозначную (размера $m \times m$) функцию

$$M(z) = M_1(z)\left[M_1^{\mathrm{tr}}(z)\,\sigma_A(z)\,M_1(z)\right]^{-1} M_1^{\mathrm{tr}}(z). \tag{5.8}$$

Из инвариантности $M(z)$ относительно правого действия $GL(m-1, \mathbf{R})$ на $\widetilde{M}_1(z)$ следует, что $M(z)$ не зависит от выбора базиса в $(I - P(z))\mathbf{R}^m$ и поэтому $M(z)$ определена на всём $\widetilde{\mathrm{Char}}A$.

Обозначим через $M_C(\gamma)$, $\tilde{K}_C$ и $\tilde{\nabla}_C$ гладкую матричнозначную функцию, линейное расслоение и линейную связность, полученные поднятием $M(z)$, $\tilde{K}_C$ и $\nabla$ относительно отображения $\tilde{\chi}$: $\tilde{C} \longmapsto \widetilde{\mathrm{Char}}A$.

Рассмотрим векторное расслоение $\mathrm{Hom}(E^r(\widetilde{\mathrm{Char}}A),\ E^m(\widetilde{\mathrm{Char}}A))$ над $\widetilde{\mathrm{Char}}A$, слоем которого является векторное пространство матриц размера $m \times r$. Пусть $\mathcal{M}$ есть векторное расслоение, полученное поднятием $\mathrm{Hom}(E^r(\widetilde{\mathrm{Char}}A), E^m(\widetilde{\mathrm{Char}}A))$ относительно $\chi$: $\tilde{C} \longmapsto \widetilde{\mathrm{Char}}A$. Обозначим через $\mathcal{M}_\Pi$ тензорное произведение $\mathcal{M} \otimes \Omega^{1/2}$ над $\tilde{C}$. Главные символы операторов $\tilde{\mathcal{F}}_j$ будут сечениями этого расслоения. Рассмотрим гладкие сечения

$$f_j(\gamma) = M(\gamma)\,\sigma\left(A \circ \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{\mathcal{F}}_j\right) \tag{5.9}$$

расслоения $\mathcal{M}_Q$ и ИОФ $\tilde{\mathcal{F}}_{j,1}$ с каноническим отношением $\tilde{C}$ и главными символами $f_j$. Из (5.8) следует, что

$$P\sigma(A\circ\mathcal{F}_{j,1})\in S^{\frac{1}{2}-1-j}(\tilde{C},\Omega^{1/2}_{\tilde{C}}\bigotimes \mathrm{Hom}(E^m(\tilde{C}),E^r(\tilde{C})). \qquad (5.10)$$

Определим процедуру поднятия ломанной бихарактеристики $\gamma\in\tilde{C}$ из $\mathrm{Char}A$ в $\tilde{C}$ следующим способом :

каждой ломанной бихарактеристике $\gamma\in\tilde{C}$, $\gamma\colon\ [s_0,s_1]\setminus J\longmapsto \mathrm{Char}A$, сопоставим кусочно–непрерывную функцию $\gamma\in\tilde{C}$, $\gamma\colon\ [s_0,s_1]\setminus J\longmapsto\tilde{C}$ такую, что для $\tilde{s}\in[s_0,s_1]\setminus J$, $\gamma(\tilde{s})\colon\ [s_0,\tilde{s}]\setminus J\longmapsto \mathrm{Char}A$ и $\tilde{\gamma}(\tilde{s})=\gamma|_{[s_0,s_1]\setminus J}$. Рассмотрим гладкое сечение

$$\sigma^j=-P\sigma\left(A\tilde{\mathcal{F}}_{j,1}+\sum_{i=0}^{j-1}A\tilde{\mathcal{F}}_i\right) \qquad (5.11)$$

расслоения $\mathcal{M}_\Omega$. Пусть $\gamma\in\tilde{C}$ и $\tilde{\gamma}$ — соответствующая ломанная на $\tilde{C}$.

Для произвольных точек $\gamma_1$ и $\gamma_2$ принадлежащих $\tilde{\gamma}$ обозначим через $\mathrm{R}^C_{\gamma_{1,2}}$ оператор параллельного переноса вдоль бихарактеристической дуги $\gamma_{1,2}$ соединяющей точки $\tilde{\gamma}_1=\tilde{\gamma}(\tilde{s}_1)$ и $\tilde{\gamma}_2=\tilde{\gamma}(\tilde{s}_2)$. Обозначим через $\mathrm{S}^{Cj}_{\tilde{\gamma}_1,\tilde{\gamma}_2}$ оператор переноса в слоях расслоения $\mathcal{M}_\Omega$, порождённый интегрированием гладкого сечения $\sigma^j$ вдоль дуги $\tilde{\gamma}_{1,2}$, т. е. если $v$ принадлежит слою над точкой $\tilde{\gamma}_1$ расслоения $\mathcal{M}_\Omega$, то

$$\mathrm{S}^{Cj}_{\tilde{\gamma}_1,\tilde{\gamma}_2}v=\mathrm{R}^C_{\tilde{\gamma}_1,\tilde{\gamma}_2}v+\int_{\tilde{\gamma}_{1,2}}\exp\mu_C(\tilde{\gamma}(s))\,\sigma^j(\tilde{\gamma}(s))\,ds \qquad (5.12)$$

принадлежит слою над точкой $\tilde{\gamma}$.

Пусть $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ — проекции $\dot{T}^*\tilde{Q}\times\dot{T}^*\partial Q$, соответственно на первый и второй сомножители. Рассмотрим композицию

$$C_b\circ\tilde{C}=\{(z_1,z_2,\gamma)\colon\quad (z_1,z_2)\in C_b,\ \gamma\in\partial C,\ \tilde{\pi}_1\circ\tau(\gamma)=z_2\} \qquad (5.13)$$

канонических отношений $C_b$ и $\tilde{C}$, и отображение $\imath_b\colon\ C_b\circ\tilde{C}\longmapsto\dot{T}^*\partial Q\times\dot{T}^*\partial Q$, действующее по правилу $\imath_b(z_1,z_2,\gamma)=(z_1,\tilde{\pi}_2(\tau(\gamma))$. Тогда $(C_b\circ\tilde{C},\imath_b)$ — однородное иммерсированное лагранжево подмногообразие в $\dot{T}^*\partial Q\times\dot{T}^*\partial Q$.

Определим отображение $\varphi\colon\ \partial C\longmapsto C_b\circ\tilde{C}$ :

$$\varphi(\gamma)=((\pi_b\circ\tilde{\pi}_1\circ\tau)(\gamma),(\pi_1\circ\tau)(\gamma),\gamma). \qquad (5.14)$$

являющееся диффеоморфизмом, $\imath_b \circ \varphi = (\pi_b \circ \beta_1) \times (\pi_b \circ \kappa_0)$. Поэтому, $(\partial C, \imath_b \circ \varphi$ — однородное иммерсированное лагранжево подмногообразие в $\dot{T}^* \partial Q$ $\dot{T}^* \partial Q$ и существует диффеоморфизм из $(\partial C, \imath_b \circ \varphi)$ в $(C_b \circ \tilde{C}, \imath_b)$.

Обозначим через $\mathcal{M}_\Omega(\partial C)$ ограничение расслоения $\mathcal{M}_\Omega$ на $\partial C \subset \tilde{C}$. Рас смотрим гладкое сечение расслоения $\mathcal{M}_\Omega(\partial C)$ определённое следующи образом

$$\sigma_b^j(\gamma) = \Omega_0(\chi(\gamma))\, \sigma_{Id - \mathcal{F}_b \circ \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{\mathcal{F}}_i}(\gamma), \tag{5.15}$$

где $\gamma \in \partial C$. Пусть теперь $\gamma \in \tilde{C}$, $J_\gamma = (s_0, s_1, \ldots, s_k)$, и $\tilde{\gamma}$ — соответ твующая ломанная на $\tilde{C}$. Заметим, что $\tilde{\gamma}(s_1), \ldots, \tilde{\gamma}(s_k) \in \tilde{C} \sim \partial_- C \subset \partial C$ $\kappa_0(\gamma) \in \mathrm{Char}_b^+ A \sim \partial_0 C \subset \partial C$.

Главный символ ИОФ $\mathcal{F}_{j,2}$ определим формулой :

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{F}_{j,2}}(\gamma) = \exp[-\mu_C(\gamma)]\, \mathbf{S}^{Cj}_{\tilde{\gamma}(s_k),\gamma} \Big[ \sigma_b^j(\tilde{\gamma}(s_k)) + \\ + \Omega(\kappa_k(\gamma))\, \mathbf{S}^{Cj}_{\tilde{\gamma}(s_{k-1}),\tilde{\gamma}(s_k)} \Big[ \sigma_b^j(\tilde{\gamma}(s_{k-1})) + \Omega(\kappa_{k-1}(\gamma))\, \mathbf{S}^{Cj}_{\tilde{\gamma}(s_{k-2}),\tilde{\gamma}(s_{k-1})} \cdots \\ \cdots \Big[ \sigma_b^j(\tilde{\gamma}(s_1)) + \Omega(\kappa_1(\gamma))\, \mathbf{S}^{Cj}_{\tilde{\gamma}(s_1),\tilde{\gamma}(s_0)} \sigma_b^j(\kappa_0(\gamma)) \Big] \ldots \Big] . \end{aligned} \tag{5.16}$$

Наконец, ИОФ $\tilde{\mathcal{F}}_j$ определим как сумму

$$\tilde{\mathcal{F}}_j = \tilde{\mathcal{F}}_{j,1} + \tilde{\mathcal{F}}_{j,2}.$$

Заметим, что если $\tilde{\mathcal{F}}_j$ есть ИОФ с каноническим отношением $C$ и главны символом $\sigma_{\mathcal{F}_j} = \sigma_{\tilde{\mathcal{F}}_j}\big|_C$, тогда для любого $g \in \mathcal{E}'(\partial Q)$ получаем

$$\mathcal{F}_j g = \tilde{\mathcal{F}}_j g\big|_Q . \tag{5.17}$$

## §6. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим асимптотическую сумму

$$\mathcal{F} \sim \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{F}_j \tag{6.1}$$

и функцию $\rho_\delta(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ такую, что $\rho_\delta(x) = 0$ в $\delta/2$–окрестности $\partial Q \cap Q$ и $\rho_\delta(x) = 1$ вне $\delta$–окрестности $\partial Q \cap Q_0$.

Определим сператор

$$E^\delta: \quad \mathcal{E}'_{r,\delta}(\partial Q) \times D'_{m,\delta}(Q_0) \longmapsto \dot{\mathcal{D}}'_m(Q) \tag{6.2}$$

следующим образом

$$E^\delta(g, u_0) \bigotimes |dx|^{1/2} = \rho_\delta(x) \times \mathcal{F}(g \bigotimes \nu_{\partial Q}, u_0 \bigotimes |dx'|^{1/2}), \tag{6.3}$$

где $\nu_{\partial Q}$ — ненулевая полуплотность на $\partial Q$, введённая в §3.

Для формулировки теоремы необходимо следующее

**Условие 6.** Для любого $x \in \overline{Q}$ множество $\chi^{-1}(x)$ — конечно.

**Теорема 6.1.** Если Условия 1 – 6 выполнены то оператор $E_\delta$ является параметриксом Задачи (1.1) — (1.2).

## §7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1

Пусть $X$ и $Y$ — $C^\infty$-многообразия, $E \mapsto X$, $F \mapsto Y$ — векторные расслоения и $(C, \varkappa)$ — каноническое отношение из $Y$ в $X$. Будем называть $(C, \varkappa)$ локально-конечным каноническим отношением, если для любого $z \in \varkappa(C)$ существуют окрестность $U_z \subset \dot{T}^*X \times \dot{T}^*Y$ и натуральное число $k_z$, такие, что ограничение $\varkappa$ на $\varkappa^{-1}(U_z)$ есть $k_z$-листное накрытие.

Пусть $(C_1, \varkappa_1)$ и $(C_2, \varkappa_2)$ — локально-конечные канонические отношения из $Y$ в $X$. Будем говорить, что $(C_1, \varkappa_1)$ редуцируется к $(C_2, \varkappa_2)$, если существует гладкое отображение $f$ из $C_1$ в $C_2$ такое, что $\varkappa_1 = \varkappa_2 \circ f$. Пусть $\mathcal{F}_i \in I^m(X \times Y, C_i)$, $i = 1, 2$, и отображение $f$ редуцирует $(C_1, \varkappa_1)$ к $(C_2, \varkappa_2)$. Обозначим через $\tilde{\mathcal{F}}_1$ ИОФ с каноническим отношением $(C_2, \varkappa_2)$ и главным символом

$$\sigma_{\tilde{\mathcal{F}}_1}(\gamma) = \sum \sigma_{\mathcal{F}_1}(\gamma_i), \tag{7.1}$$

где суммирование ведётся по всем прообразам $\gamma_i \in C_1$ точки $\gamma \in C_2$ относительно отображения $f$. Тогда

$$\tilde{\mathcal{F}}_1 \in I^m(X \times Y, C_2)$$

и

$$\tilde{\mathcal{F}}_1 = \mathcal{F}_2 (\mathrm{mod} I^{m-1}(X \times Y, C_2)). \tag{7.2}$$

Далее, пусть $X, Y, Z$ — $C^\infty$-многообразия, $E \mapsto X$, $F \mapsto Y$, $G \mapsto Z$ — векторные расслоения, $(C_i, \imath_i)$, $i = 1, 2$ — однородные иммерсированные лагранжевы подмногообразия симплектических многообразий $(\dot{T}^*X \times \dot{T}^*Y, \omega_1)$ и $(\dot{T}^*Y \times \dot{T}^*Z, \omega_2)$, соответственно, где $\omega_1 = \omega_{T^*X} - \omega_{T^*Y}$, $\omega_2 = \omega_{T^*Y} - \omega_{T^*Z}$.

Тогда $(C_1 \times C_2, \imath_1 \times \imath_2)$ — иммерсированное подмногообразие в $\dot{T}^*X \times \dot{T}^*Y \times \dot{T}^*Y \times \dot{T}^*Z$. Пусть $\Delta$ — диагональ в $\dot{T}^*Y \times \dot{T}^*Y$. Обозначим через $C$ прообраз множества $\dot{T}^*X \times \Delta \times \dot{T}^*Z$ относительно отображения $\imath_1 \times \imath_2$. Будем предполагать, что отображение $\imath_1 \times \imath_2$ трансверсально к $\dot{T}^*X \times \Delta \times \dot{T}^*Z$. Тогда $C$ есть подмногообразие в $C_1 \times C_2$ (см. [15]).

Пусть

$$\pi_{X \times Z}: \quad T^*X \times T^*Y \times T^*Y \times T^*Z \longmapsto T^*X \times T^*Z$$

каноническая проекция и

$$\imath = \pi_{X \times Z} \circ (\imath_1 \times \imath_2)|_C: \quad C \longmapsto T^*X \times T^*Z. \tag{7.3}$$

Однородное иммерсированное лагранжево подмногообразие $(C, \imath)$ в $(\dot{T}^*X \times \dot{T}^*Z, \omega_{T^*X} - \omega_{T^*Z})$ будем называть трансверсальной композицией канонических отношений $(C_1, \imath_1)$ и $(C_2, \imath_2)$. Заметим, что если $(C_1, \imath_1)$ и $(C_2, \imath_2)$ локально-конечны, то их трансверсальная композиция также локально-конечна.

Перейдём к доказательству теоремы. Рассмотрим иммерсированное лагранжево подмногообразие $(T^*\partial Q \cup \hat{C}, \hat{\imath})$ в $T^*\partial Q \times T^*\partial Q$, где

$$\hat{\imath}|_{T^*\partial Q} = \mathrm{id} \times \mathrm{id}, \quad \hat{\imath}|_{\hat{C}} = \chi \times (\pi_1 \circ \chi_0).$$

Определим отображение $f: \partial C \mapsto T^*\partial Q \cup \hat{C}$ следующим образом: $f|_{\partial_0 C} = \pi$ — $r$-листное накрытие, $f|_{\partial_- C}: \partial_- C \mapsto \hat{C}$ — диффеоморфизм, $f|_{\partial_+ C}$: $\partial_+ C \mapsto \partial_- C \sim \hat{C}$ — $r$-листное накрытие. Выполнено следующее соотношение

$$i \circ f = \imath_1 \circ \varphi. \tag{7.4}$$

Рассмотрим ИОФ $\mathcal{F}_i \circ \tilde{\mathcal{F}}_j$ с каноническим соотношением $C_i \circ \tilde{C}$. Отображение $f$ редуцирует $C_i \circ \tilde{C}$ к $(T^*\partial Q \cup \hat{C}, \hat{\imath})$. Из диаграммы (7.4) и формулы (7.1)

следует, что

$$\mathcal{F}_b \circ \tilde{\mathcal{F}}_j = \dot{\mathcal{F}}_j(\mathrm{mod} I^{j-1}(\partial Q, \partial Q, T^*\partial Q \cup \hat{C}, \Omega^{1/2}_{\partial Q \times \partial Q} \bigotimes \mathrm{Hom}(E^*(\partial Q), E^*(\partial Q)))), \tag{7.5}$$

где $\dot{\mathcal{F}}_j$ — ИОФ с каноническим отношением $(T^*\partial Q \cup \hat{C}, \mathrm{i})$ и главным символом :

а) для $\gamma \in T^*\partial Q$

$$\sigma_{\dot{\mathcal{F}}_j}(\gamma) = \sum_{j=1}^{r} \sigma_{\mathcal{F}_b \circ \tilde{\mathcal{F}}_j}(\tilde{\gamma}_j), \tag{7.6}$$

б) для $\gamma \in \hat{C}$

$$\sigma_{\dot{\mathcal{F}}_j}(\gamma) = \sigma_{\mathcal{F}_b \circ \tilde{\mathcal{F}}_j}(\gamma) + \sum_{j=1}^{r} \sigma_{\mathcal{F}_b \circ \tilde{\mathcal{F}}_j}(\tilde{\gamma}_j), \tag{7.7}$$

где $(\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_r) = f^{-1}(\gamma)$.

Для того, чтобы доказать (5.5) при $l = 0$, выпишем главный символ оператора $\mathcal{F}_b \circ \tilde{\mathcal{F}}_0$. Поскольку $\varphi: \partial C \mapsto C_b \circ \tilde{C}$ — диффеоморфизм, мы имеем

$$\varphi^* \sigma_{\mathcal{F}_b \circ \tilde{\mathcal{F}}_0} \in S^{n/2}(\partial C, \Omega^{1/2}_{\partial C} \bigotimes \mathrm{Hom}(E^*(\partial C), E^*(\partial C))).$$

Из соотношений (3.13), (4.3), (4.4) и формулы композиции для ИОФ (см. [12]), получаем

а) для $\gamma \in \mathrm{Char}^+_b A \sim \partial_0 C$

$$\Phi^* \sigma_{\mathcal{F}_b \circ \tilde{\mathcal{F}}_0} = B(\pi_Q \circ \pi_b(\gamma)) \Omega_0(\pi_b(\gamma)) \bigotimes \pi_b^* \nu_{\partial Q} \bigotimes \pi_b^* \nu_{\partial Q}. \tag{7.8}$$

б) для $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \partial_+ C \cup \partial_- C$

$$\begin{aligned} \varphi^* \sigma_{\mathcal{F}_0 \tilde{\mathcal{F}}} = {} & \exp[-\mu_c(\gamma_1)]\, \pi_Q^* \nu_{\partial Q} \bigotimes B(\pi_Q \circ \pi_b(\gamma_2)) \pi_Q^* |dx|^{-1/2} \times \\ & \times R^{\nabla}_{\kappa_{k(\gamma_1)-1}(\gamma_1), \kappa(\gamma_1)} \Omega(\kappa_{k(\gamma_1)-1}(\gamma_1) \circ \ldots \\ & \ldots \circ R^{\nabla}_{\kappa_0(\gamma_1), \kappa_1(\gamma_1)} (\Omega_0(\kappa_0(\gamma_1)) \bigotimes \\ & \bigotimes \pi_Q^* |dx|^{1/2}) \bigotimes \pi_Q^* \nu_{\partial Q}. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Из соотношений (7.6) – (7.9) получаем

а) для $\gamma \in T^*\partial Q$

$$\sigma_{\mathcal{F}_0}(\gamma) = \sum_{j=1}^{r} B(\pi_Q \circ \pi_b(\tilde{\gamma}_j)) \Omega_0(\pi_b(\tilde{\gamma}_j)) \bigotimes \pi_b^* \nu_{\partial Q} \bigotimes \pi_b^* \nu_{\partial Q}. \tag{7.10}$$

Отсюда и из соотношений (3.10), (3.11) следует, что

$$\sigma_{\hat{f}_0}(\gamma) = B(\pi_Q(\gamma)) \sum_{j=1}^{r} P(\tilde{\gamma}_j) V(\gamma) [B(\gamma)V(\gamma)]^{-1} \bigotimes \pi_b^* \nu_{\partial Q} \bigotimes \pi_b^* \nu_{\partial Q}. \qquad (7.11)$$

Пусть $E_+(\gamma)$ — линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$, натянутое на столбцы матрицы $V(\gamma)$. Проектор $\sum_{j=1}^{r} P(\tilde{\gamma}_j)$ действует на $E_+(\gamma)$ как тождественный оператор. Следовательно, получаем

$$\sigma_{\hat{f}_0}(\gamma) = \mathrm{Id} \bigotimes \pi_b^* \nu_{\partial Q} \bigotimes \pi_b^* \nu_{\partial Q}. \qquad (7.12)$$

б) для $\gamma \in \widehat{C}$

$$\sigma_{\hat{f}_0}(\gamma) = \exp[-\mu_C(\gamma)]\, \pi_Q^* \nu_{\partial Q} \bigotimes B(\pi_Q \circ \chi(\gamma)) \pi_Q^* |dx|^{-1/2} \times$$

$$\times R^{\nabla}_{\kappa_{k(\gamma)-1}(\gamma), \chi(\gamma)} \Omega(\kappa_{k(\gamma)-1}(\gamma) \circ \ldots$$

$$\ldots \circ R^{\nabla}_{\kappa_0(\gamma), \kappa_1(\gamma)} (\Omega_0(\kappa_0(\gamma) \bigotimes \pi_Q^* |dx|^{1/2}) \bigotimes \pi_Q^* \nu_{\partial Q} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} \exp[-\mu_c(\tilde{\gamma}_j)]\, \pi_Q^* \nu_{\partial Q} \bigotimes B(\pi_Q \circ \chi(\tilde{\gamma}_j)) \bigotimes \pi_Q^* |dx|^{-1/2} \times \Omega(\kappa(\tilde{\gamma}_j))$$

$$R^{\nabla}_{\kappa_{k(\tilde{\gamma}_j)-1}(\tilde{\gamma}_j), \chi(\tilde{\gamma}_j)} \Omega(\kappa_{k(\tilde{\gamma}_j)-1}(\tilde{\gamma}_j) \circ \ldots \circ R^{\nabla}_{\kappa_0(\tilde{\gamma}_j), \kappa_1(\tilde{\gamma}_j)} (\Omega_0(\kappa_0(\tilde{\gamma}_j) \bigotimes$$

$$\bigotimes \pi_Q^* |dx|^{1/2}) \bigotimes \pi_Q^* \nu_{\partial Q},$$

где $(\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_r) = f^{-1}(\gamma)$.

Заметим, что

$$\pi_Q \circ \chi(\tilde{\gamma}_j) = \pi_Q \circ \chi(\gamma),\ \kappa_i(\tilde{\gamma}_j) = \kappa_i(\gamma),$$

$$R^{\nabla}_{\kappa_i(\tilde{\gamma}_j), \kappa_{i+1}(\tilde{\gamma}_j)} = R^{\nabla}_{\kappa_i(\gamma), \kappa_{i+1}(\gamma)},\ i = 0, \ldots, k_\gamma - 1,\ \mu_C(\tilde{\gamma}_j) = \mu_C(\gamma),\ j = 1, \ldots, r.$$

Таким образом, получаем

$$\sigma_{\hat{f}_0}(\gamma) = \exp[-\mu_c(\gamma)]\, \pi_Q^* \nu_{\partial Q} \bigotimes B(\pi_Q \circ \chi(\gamma)) \pi_Q^* |dx|^{-1/2} \times$$

$$(I + \sum_{j=1}^{r} \Omega(\chi(\tilde{\gamma}_j))) R^{\nabla}_{\kappa_{k(\gamma)-1}(\gamma), \chi(\gamma)} \Omega(\kappa_{k(\gamma)-1}(\gamma) \circ \ldots \qquad (7.13)$$

$$\ldots \circ R^{\nabla}_{\kappa_0(\gamma), \kappa_1(\gamma)} (\Omega_0(\kappa_0(\gamma) \bigotimes \pi_Q^* |dx|^{1/2}) \bigotimes \pi_Q^* \nu_{\partial Q}.$$

Из (3.12) следует, что

$$B(\pi_Q \circ \chi(\gamma))(I + \sum_{j=1}^{r} \Omega(\chi(\tilde{\gamma}_j))) =$$

$$= B(\pi_Q \circ \chi(\gamma)) - \sum_{j=1}^{r} P(\chi(\tilde{\gamma}_j)) \times W(\pi_b \circ \chi(\tilde{\gamma}_j)) B(\pi_Q \circ \chi(\tilde{\gamma}_j)) =$$

$$= B(\pi_Q \circ \chi(\tilde{\gamma}_j)) - B(\pi_Q \circ \chi(\gamma)) \times \left( \sum_{j=1}^{r} P(\chi(\tilde{\gamma}_j)) \right) \times \tag{7.14}$$

$$\times W(\pi_b \circ \chi(\gamma)) B(\pi_Q \circ \chi(\gamma)).$$

Проектор $\sum_{j=1}^{r} P(\chi(\tilde{\gamma}_j))$ действует на $E_+(\chi(\gamma))$ как тождественный оператор, поэтому используя соотношение (3.10), получаем

$$B(\pi_Q \circ \chi(\gamma)) \times \left( \sum_{j=1}^{r} P(\chi(\tilde{\gamma}_j)) \right) \times W(\pi_b \circ \chi(\gamma)) B(\pi_Q \circ \chi(\gamma)) =$$

$$B(\pi_Q \circ \chi(\gamma)) \times \left( \sum_{j=1}^{r} P(\chi(\tilde{\gamma}_j)) \right) V(\pi_b \circ \chi(\gamma)) [B(\pi_Q \circ \chi(\gamma)) \times \tag{7.15}$$

$$\times V(\pi_b \circ \chi(\gamma))]^{-1} B(\pi_Q \circ \chi(\gamma)) = B(\pi_Q \circ \chi(\gamma)).$$

Из (7.13) – (7.15) следует, что $\sigma_{\mathcal{F}_0}(\gamma) = 0$ для $\gamma \in \hat{C}$. Тем самым (5.5) доказано для $l = 0$. Соотношение (5.5) для $l = 1, 2, \ldots$ доказываются аналогично.

Мы не будем останавливаться на доказательстве (5.6), поскольку оно проводится стандартными рассуждениями, и перейдём к доказательству (5.7).

Покажем, что

$$P\sigma_{-1}(A\mathcal{F}_0) = 0. \tag{7.16}$$

Хорошо известно (см. [12], [16]), что

$$\sigma_{-1}(A\mathcal{F}_0) = \{\sigma_A, \sigma_{\mathcal{F}_0}\} + \sigma_{-1}(A)\sigma_{\mathcal{F}_0}.$$

Отсюда

$$P\sigma_{-1}(A\mathcal{F}_0) = P(\{\sigma_A - \lambda I, \sigma_{\mathcal{F}_0}\} + \sigma_{-1}(A)\sigma_{\mathcal{F}_0}) + P\{\lambda, \sigma_{\mathcal{F}_0}\} = \mu\sigma_{\mathcal{F}_0} + PD_{H_\gamma}\sigma_{\mathcal{F}_0} =$$

$$= \mu\sigma_{\mathcal{F}_0} + \nabla_{H_\gamma}\sigma_{\mathcal{F}_0} = (\nabla_{H_\gamma} + \mu)\exp[-\mu_C(\gamma)] \times \chi^* R^{\nabla}_{\kappa_b(\gamma)-\iota(\gamma),\chi(\gamma)} v =$$

$$\nabla_{H_\gamma} R^{\nabla} v = 0.$$

Аналогично,

$$P\sigma(A \circ \mathcal{F}_j) = P\sigma(A \circ \mathcal{F}_{j,1}) + P\sigma(A \circ \mathcal{F}_{j,2}) = P\sigma(A \circ \mathcal{F}_{j,1}) + (\nabla_{H_\gamma} + \mu)\sigma(\mathcal{F}_{j,2}).$$

Используя (5.16), (5.12) и (5.11) последнее выражение можно переписать в виде

$$P\sigma(A \circ \mathcal{F}_{j,1}) - P\sigma(A \circ \widetilde{\mathcal{F}}_{j,1}) - P\sigma(\sum_{i=0}^{j-1} A \circ \mathcal{F}_j),$$

т. е. выполнены соотношения (5.7).

Нам осталось показать, что разность между $E_\delta(g, u_0)$ и точным решением задачи (1.1) – (1.2) принадлежит $C^\infty(\overline{Q})$. Пусть $V_\delta(\partial Q)$ — $\delta$–окрестность множества $\partial Q$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. Для $x \notin V_\delta(\partial Q)$ имеем

$$\widetilde{\mathcal{F}}(g, u_0) - E^\delta(g, u_0) = (1 - \rho_\delta(x))\,\widetilde{\mathcal{F}}(g, u_0) = 0.$$

С другой стороны, $\widetilde{\mathcal{F}}(g, u_0) \in C^\infty(\overline{Q} \subset V_\delta(\partial Q))$. Поэтому $\omega = E_\delta(g, u_0) -$ — решение смешанной задачи с бесконечно дифференцируемыми данными и эти данные $C^\infty$–согласованны.

ABSTRACT. In the paper a parametrix for mixed problem for a hyperbolic system in a situation where the bicharacteristics are transversal to the boundary is constructed in the form of a global Fourier Integral Operator (FIO). So the construction of the parametrix of a mixed problem for second order hyperbolic equations, suggested by J.Chazarain, is extended to hyperbolic systems. The manifold of broken bicharacteristics supplied with a structure of a homogeneous immersed Lagrangian submanifold, playes the role of the canonical relation for FIO. The symbol of FIO is constructed as an asymptotic sum of smooth sections of certain vector bundls on $C$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. J. Chazarain, "Construction de la parametrix du probleme mixte hyperbolique pour l'equation des ondes", C. R. Acad. Sc. Paris, vol. 276, ser. A, pp. 1213 – 1215, 1973.
2. J. Chazarain, "Parametrix du probleme mixte pour l'equation des ondes a l'interieur dun domaine convexepour les bicharacteristiques", Asterisque, vol. 34 – 35, pp. 165 – 181, 1976.
3. R. B. Melrose, "Microlocal parametrices for difractive boundary value problems", Duke Math. J., vol. 42, pp. 583 – 604, 1975.
4. M. Taylor, "Grasing rays and reflection of singularities of solutions to wave equations", Comm. Pure Appl. Math., vol. 29, pp. 1 – 38, 1976.
5. G. Eskin, "Parametrix and propagation of singularities for the interior mixed hyperbolic problem", J. Analyse Math., vol. 32, pp. 17 – 62, 1977.
6. G. Eskin, "General initial–boundary problems for second order hyperbolic equations", In : Sing. in boundary value problems. D.Reidel Publ. So., Dordrecht, Boston, London, pp. 19 – 54, 1981.
7. G. Eskin, "Initial boundary value problem for second order hyperbolic equations

with general boundary conditions I", J. Analyse, Math., vol. 40. pp. 43 – 89, 1981.
8. R. B. Melrose, J. Sjostrand, "Singularities of boundary value problems 1, 2", Comm. Pure Appl. Math., vol. 31, pp. 593 – 617, 1978 ; vol. 35, pp. 129 – 168, 1982.
9. K. Kubota, "Microlocal parametrices and propagation of singularities near gliding points for hyperbolic mixed problems", Hokk. Math. J., vol. 15, no. 2, pp. 243 – – 308, 1986.
10. Р. Г. Айрапетян, "Фундаментальное решение модельной смешанной задачи для нестрого вогнутых областей," Изв. Акад Наук Армении, Математика [английский перевод : Journal of Contemporary Math. Anal. (Armenian Academy of Sciences)], том 26, № 4, стр. 1 – 20, 1991.
11. В. Гийемин, С. Стернберг, Геометрические Асимптотики, Мир, Москва, 1981.
12. Л. Хермандер, Анализ Линейных Дифференциальных Операторов, том 3, Мир, Москва, 1987.
13. K. Kasahara, "On weak well-posedness of mixed problems for hyperbolic systems," Publ. RIMS Kyoto Univ., vol. 6, no. 3, pp. 503 – 514, 1971.
14. J. J. Duistermaat, Fourier Integral Operators. Courant Inst. of Math. Sciences. New York University, 1973.
15. М. Голубицкий, В. Гиймин, Устойчивые Отображения и их Особенности, Мир, Москва, 1977.
16. Ф. Трев, Введение в Теорию Псевдодифференциальных Операторов и Интегральных операторов Фурье, тома 1, 2, Мир, Москва, 1984.

5 Ноября 1992

Республика Армения
Межвузовский научный центр по
Прикладным проблемам Математики,
Ереванский государственный университет