

О ПОСТРОЕНИИ МЕР В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМЫХ ФИНСЛЕРОВЫМИ МЕТРИКАМИ

В. К. Оганян, А. Абдалла

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 27, № 5, 1992

финслерова метрика ρ описывается своей плотностью (финслеровой плотностью), которая является функцией $f(x, y, \varphi)$ зависящей от $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, и $\varphi \in S_1$ (S_1 – окружность направлений на плоскости). В статье доказано, что если неотрицательная локально-выпуклая функция f определённая на $\mathbb{R}^2 \times S_1$ удовлетворяет дифференциальному уравнению: $-\frac{\partial f}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \varphi} \sin \varphi = 0$, то f – финслерова плотность и соответствующая метрика ρ определяет меру $m(\cdot)$ в пространстве G прямых на плоскости. Если условие локальной выпуклости и неотрицательности функции f опустить, то для того, чтобы существовала бы обобщённая мера $m(\cdot)$ в G необходимо и достаточно, чтобы функция f удовлетворяла бы этому дифференциальному уравнению. Если f достаточно гладкая, то $m(\cdot)$ необходимо имеет плотность, для которой найдено точное выражение в терминах f .

§1. ВВЕДЕНИЕ

Флаг на плоскости $\mathbb{R}^2$ есть пара

$$(\mathcal{P}, \varphi) = (x, y, \varphi),$$

где $\mathcal{P} = (x, y)$ – точка на плоскости, и $\varphi \in S_1$ (S_1 – окружность направлений на плоскости).

Пусть $f(\mathcal{P}, \varphi) = f(x, y, \varphi)$ – неотрицательная функция определённая в пространстве флагов $\mathbb{R}^2 \times S_1$. Рассмотрим интегралы

$$\rho(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \int_{\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2} f(F, \varphi) dl, \quad (1)$$

где интеграл берётся по всем точкам F принадлежащим отрезку $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2$, dl – элемент длины на этом сегменте. Значение параметра φ в аргументе f совпадает с направлением отрезка $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2$.

f называется финслеровой метрикой, если $\rho(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ определённая по (1) есть метрика на плоскости (см. [4]).

Очевидно, что функция ρ определённая по (1) аддитивна и непрерывна. Следовательно, если ρ – метрика, то по хорошо известной теореме комбинаторной интегральной геометрии ([1], [2]) существует (единственная) мера m в пространстве $\mathbf{G}$ прямых на плоскости такая, что

$$\rho(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = m([\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2]), \quad (2)$$

где $[\mathcal{P}, \mathcal{Q}] = \{g \in \mathbf{G} : \text{прямая } g \text{ разделяет точки } \mathcal{P} \text{ и } \mathcal{Q}\}$.

Этим путём финслеровы плотности $f(x, y, \varphi)$ всегда определяют меры в пространстве $\mathbf{G}$.

В этой статье мы доказываем следующее утверждение: если локально-выпуклая функция $f(x, y, \varphi)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\frac{\partial f}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \varphi} \sin \varphi = 0, \quad (3)$$

то f необходимо финслерова плотность.

Отсюда следует, что (3) есть достаточное условие для того, чтобы f определяла бы по (1) – (2) меру в пространстве $\mathbf{G}$.

И обратно, если мы имеем меру m в $\mathbf{G}$, которая имеет плотность $\gamma(g)$, $g \in \mathbf{G}$, то функция ρ заданная по (2) есть финслерова метрика и её финслерова плотность f удовлетворяет уравнению (3).

При некоторых дополнительных условиях гладкости на функцию f , в §3 мы находим точное выражение (23) для γ в терминах f .

Пусть μ – мера в $\mathbf{G}$, инвариантная относительно евклидовых движений плоскости (μ единственна с точностью до постоянного множителя). Ниже мы рассматриваем меры $m(\cdot)$, которые абсолютно непрерывны относительно μ :

$$dm = \gamma(g) dg, \quad (4)$$

где dg – элемент меры μ .

Функцию $\gamma(g)$ мы назовём плотностью меры $m(\cdot)$.

Заметим, что если $m = \mu$, то $f(x, y, \varphi) = c$ — постоянная, и $m([P_1, P_2]) = c \cdot |P_1, P_2|$, где $|P_1, P_2|$ — длина отрезка $P_1 P_2$. Если $m(\cdot)$ — трансляционно-инвариантная мера, то $f(x, y, \varphi) = f(\varphi)$ и $m([P_1, P_2]) = f(\varphi) \cdot |P_1, P_2|$.

§2. ПЛОТНОСТЬ КАК ПРЕДЕЛ КРОФТОНА

Пусть $m(\cdot)$ — мера в G , которая имеет плотность $\gamma(g)$. Тогда метрика ρ (соответствующая мере $m(\cdot)$ по формуле (2)) имеет финслерову плотность f .

Рассмотрим диаграмму на Рис. 1, представляющую два бесконечно малых отрезка a_1, a_2 ; мы предполагаем, что точки $A, B \in g$ также как и углы α_1, α_2 остаются фиксированными, тогда как длины отрезков стремятся к нулю.

Плотность γ на g можно вычислить как предел

$$\gamma(g) = \lim_{\substack{a_1 \downarrow \{A\} \\ a_2 \downarrow \{B\}}} \frac{m([a_1] \cap [a_2])}{\mu([a_1] \cap [a_2])}, \quad (5)$$

где $[a] = \{g \in G : g \cap a \neq \emptyset\}$.

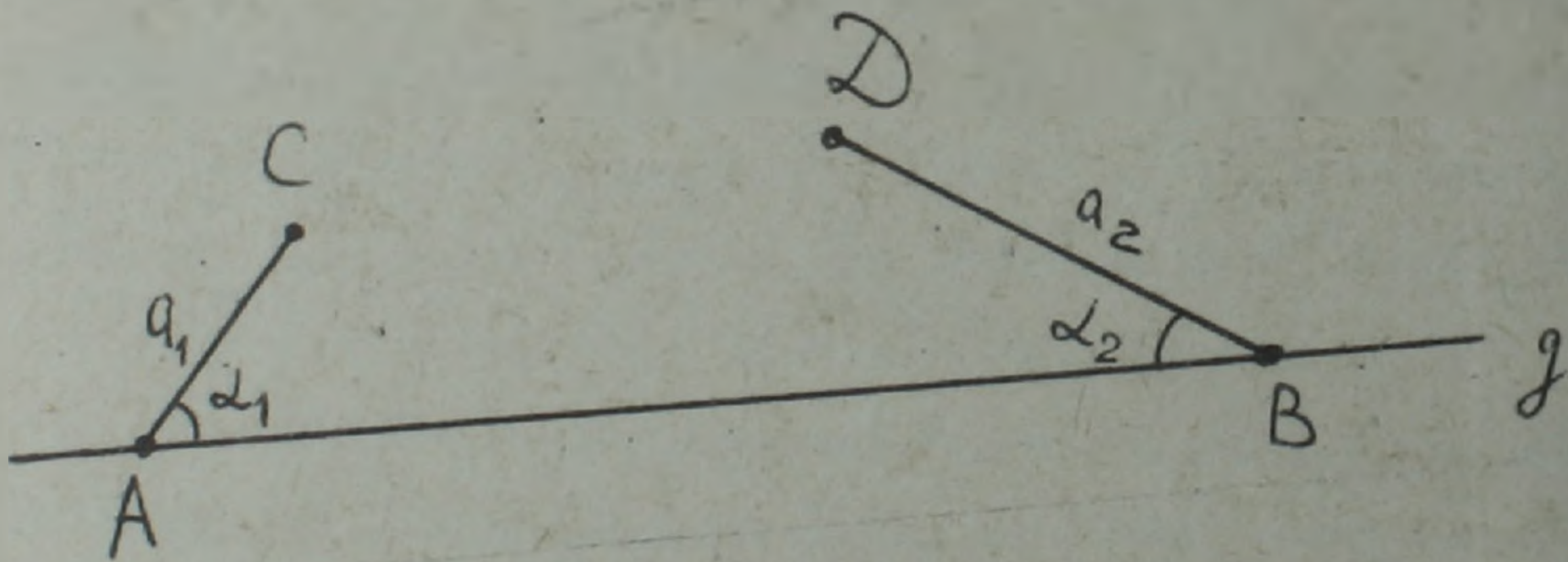


Рис. 1

По обобщённой формуле Крофтона (см. [2], стр. 26)

$$2m([a_1] \cap [a_2]) = m([AD]) + m([BC]) - m([AB]) - m([CD]). \quad (6)$$

Мы также имеем

$$\mu([a_1] \cap [a_2]) = \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2}{|L|} \cdot a_1 \cdot a_2 \quad (a_i \rightarrow 0). \quad (7)$$

Используя (1), (5), (6) и (7) получим

$$\gamma_f(g) = \frac{|L|}{2} \lim_{\substack{a_1 \downarrow \{A\} \\ a_2 \downarrow \{B\}}} \left\{ \left(\int_{AD} f(x, y, \varphi_1) dl + \int_{BC} f(x, y, \varphi_2) dl - \int_L f(x, y, \varphi) dl - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{CD} f(x, y, \varphi_3) dl \right) (\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot a_1 \cdot a_2)^{-1} \right\}, \quad (8)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и φ — направления отрезков AD, BC, CD и AB соответственно.

Мы приходим к следующему заключению :

Если f — финслерова плотность, которая соответствует мере $m(\cdot)$ обладающей непрерывной плотностью, то предел Крофтона (8) необходимо существует.

Пусть f — произвольная флаговая функция (априори не финслерова плотность). Возникают два естественных вопроса :

1. Какими условиями должна обладать f , чтобы существовал бы предел Крофтона (8).

2. При каких дополнительных условиях на f -предел Крофтона (8) будет зависеть только от прямой g .

Заметим, что, априори, предел Крофтона может зависеть от таких параметров как положение точек A и B на прямой g , а также от углов α_1, α_2 .

Согласно результату Р. В. Амбарцумяна (опубликованному в этом номере, [3]), второй вопрос можно заменить следующим

2'. При каких дополнительных условиях отношение в (8) ограничено снизу:

Ниже мы получим условие, которое влечёт как 2 так и 2' одновременно.

§3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА КРОФТОНА

Предполагая достаточную гладкость функции f , разложим интегралы в (8) по степеням бесконечно малых величин a_1, a_2 с точностью до второго порядка. Мы убедимся, что числитель в (8) эквивалентен $c \cdot a_1 \cdot a_2$ и поэтому предел (8) существует для любой достаточно гладкой флаговой функции.

Пусть направление оси X нашей координатной системы совпадает с направлением прямой g_0 (см. Рис. 2). Мы начнём с разложения интеграла

$$\int_{CD} f(F, \varphi_3) dl. \quad (9)$$

Координаты точки $F \in CD$ суть $F = (x, y(x, a_1, a_2))$ (для обозначений см. Рис. 2), где

$$y(x, a_1, a_2) = \frac{(a_1 \sin \alpha_1 - a_2 \sin \alpha_2) \cdot x + a_1 a_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - l_2 a_1 \sin \alpha_1 + l_1 a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 - (l_2 - l_1)} \quad (10)$$

и направление отрезка CD есть

$$\varphi_3(a_1, a_2) = \operatorname{arctg} \frac{a_1 \sin \alpha_1 - a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 - (l_2 - l_1)}. \quad (11)$$

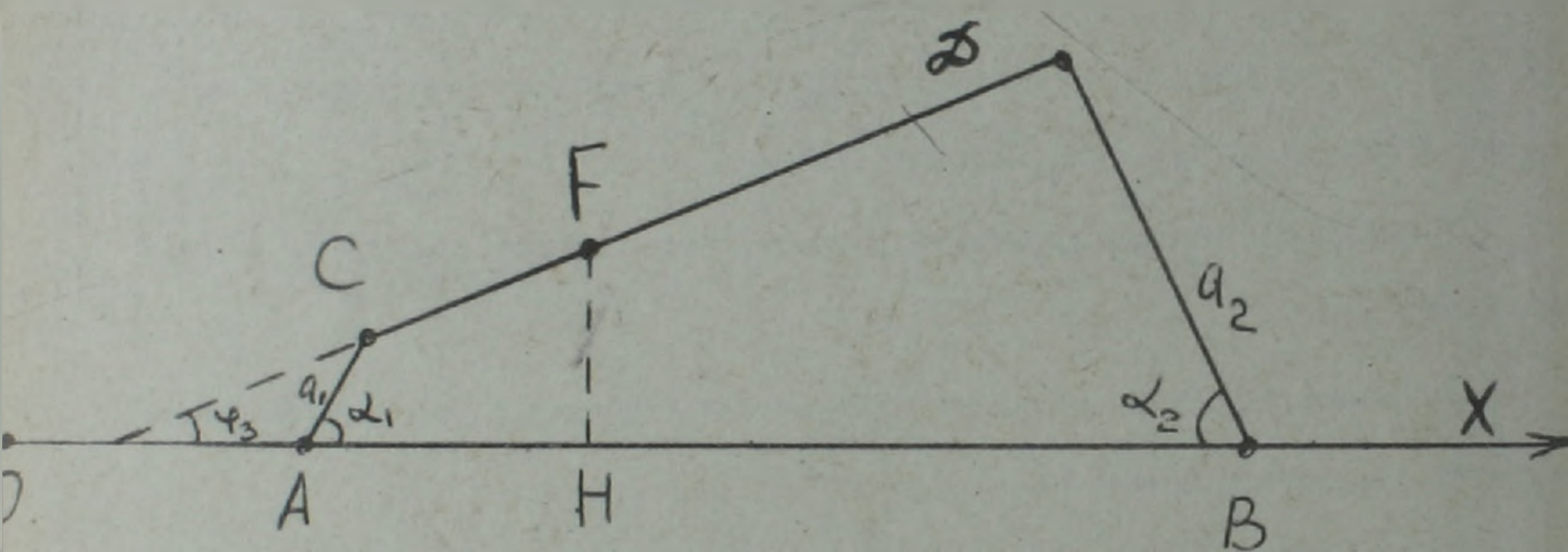


Рис. 2 $OH = x, OA = l_1, OB = l_2, FH = y(x, a_1, a_2), AC = a_1, BD = a_2$.

Очевидно, что

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y(x, a_1, a_2)}{\partial x} \right)^2} dx = I(a_1, a_2) dx. \quad (12)$$

Мы будем использовать следующее приближённое выражение для $I(a_1, a_2)$, которое следует из (12) с помощью формулы Тейлора :

$$I(a_1, a_2) = 1 + \frac{1}{2(l_2 - l_1)^2} (a_1^2 \sin^2 \alpha_1 + a_2^2 \sin^2 \alpha_2 - 2a_1 \cdot a_2 \cdot \sin \alpha_1 \sin \alpha_2). \quad (13)$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} \int_{CD} f(F, \varphi_3(a_1, a_2)) dl &= \int_{l_1}^{l_2} f(x, y(x, a_1, a_2), \varphi_3(a_1, a_2)) \cdot I(a_1, a_2) dx - \\ &- \int_{l_1}^{l_1 + a_1 \cos \alpha_1} f \cdot \varphi(a_1, a_2) dx - \int_{l_2 - a_2 \cos \alpha_2}^{l_2} f \cdot \varphi(a_1, a_2) dx \end{aligned} \quad (14)$$

Запишем разложение Тейлора для $f(F, \varphi_3)$ как функции от a_1, a_2 в точке $a_1 = a_2 = 0$. Заметим, что предельное положение флага (F, φ_3) есть флаг $(H, 0) = (x, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} f(x(l), y(x, a_1, a_2, \varphi_3(a_1, a_2))) = f(x, 0, 0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial a_1} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial a_1} \right] a_1 + \\ + \left[\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial a_2} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial a_2} \right] a_2 + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial a_1} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial a_1^2} + \right. \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial a_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial a_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial a_1} + \left. \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial a_1^2} \right] \frac{a_1^2}{2} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial a_2} \right)^2 + \right. \\ + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial a_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial a_2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial a_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial a_2} + \left. \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial a_2^2} \right] \frac{a_2^2}{2} + \\ + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial a_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \varphi} \left(\frac{\partial y}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial a_2} + \frac{\partial y}{\partial a_2} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial a_1} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_2} + \right. \\ + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial a_2} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial a_1 \partial a_2} \right] a_1 \cdot a_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Значения производных функций $y(x, a_1, a_2)$ и $\varphi_3(a_1, a_2)$ в точке $a_1 = a_2 = 0$ можно найти из (10) и (11).

Мы должны подставить окончательное выражение, а также (13) в интегралы в правой части (14). Заметим, что в случаях двух последних интегралов (где интеграл берётся по бесконечно малым интервалам) достаточно подставить только первые три слагаемых из (15). После некоторых преобразований, которые очень громоздки для того, чтобы воспроизвести их здесь, мы получаем нужное нам выражение для интеграла (9).

$$\begin{aligned} \int_{CD} f \cdot ds = A_1 + A_2 - \int_{l_1}^{l_2} f(x, 0, 0) dx + \left[\frac{1}{(l_2 - l_1)^2} \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \times \right. \\ \times \left(- \int_{l_1}^{l_2} f(x, 0, 0) dx - \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (l_2 - x)(l_1 - x) dx + \right. \\ + \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \varphi} (l_2 - x) dx - \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \varphi} (x - l_1) dx \Big) - \\ - \frac{\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2}{(l_2 - l_1)^2} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial f}{\partial y} (x - l_1) dx - \frac{\sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1}{(l_2 - l_1)^2} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial f}{\partial y} (l_2 - x) dx - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2}{(l_2 - l_1)^2} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} dx - \frac{\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2}{(l_2 - l_1)^2} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial f}{\partial \varphi} dx - \\
& - \left[\frac{\sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1}{l_2 - l_1} \cdot \frac{\partial f(l_1, 0, 0)}{\partial \varphi} - \frac{\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2}{l_2 - l_1} \cdot \frac{\partial f(l_2, 0, 0)}{\partial \varphi} \right] a_1 \cdot a_2.
\end{aligned} \quad (16)$$

Здесь A_i — квадратный многочлен по a_i ($i = 1, 2$) :

$$\begin{aligned}
A_i = & \int_{l_1}^{l_2} f(x, 0, 0) dx + \left[\left(\int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial f(x, 0, 0)}{\partial y} \cdot (l_s - x) dx - \right. \right. \\
& - \left. \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial f(x, 0, 0)}{\partial \varphi} dx \right) \cdot (-1)^s \cdot \frac{\sin \alpha_i}{l_2 - l_1} - f(l_i, 0, 0) \cos \alpha_i \Big] \cdot a_i + \\
& + \left[(-1)^i \frac{\partial f(l_i, 0, 0)}{\partial x} \cdot \frac{\cos^2 \alpha_i}{2} - \frac{\partial f(l_i, 0, 0)}{\partial y} \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos \alpha_i - \right. \\
& - (-1)^s \cdot \frac{\partial f(l_i, 0, 0)}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \alpha_i \cdot \cos \alpha_i}{l_2 - l_1} + \int_{l_1}^{l_2} f(x, 0, 0) dx \cdot \frac{\sin \alpha_i}{2(l_2 - l_1)^2} + \\
& + \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial^2 f(x, 0, 0)}{\partial y^2} \cdot (l_s - x)^2 dx \cdot \frac{\sin^2 \alpha_i}{2(l_2 - l_1)^2} + \\
& + \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial f(x, 0, 0)}{\partial y} \cdot (l_s - x) dx \cdot (-1)^s \cdot \frac{\sin \alpha_i \cdot \cos \alpha_i}{(l_2 - l_1)^2} - \\
& - \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial^2 f(x, 0, 0)}{\partial y \partial \varphi} \cdot (l_s - x) dx \cdot \frac{\sin \alpha_i}{(l_2 - l_1)^2} + \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial^2 f(x, 0, 0)}{\partial \varphi^2} dx \times \\
& \times \frac{\sin^2 \alpha_i}{2(l_2 - l_1)^2} + (-1)^i \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial f(x, 0, 0)}{\partial \varphi} dx \cdot \frac{\sin \alpha_i \cdot \cos \alpha_i}{(l_2 - l_1)^2} \Big] \cdot a_i^2,
\end{aligned} \quad (17)$$

где $s = \begin{cases} 1 & \text{если } i = 2 \\ 2 & \text{если } i = 1. \end{cases}$

Интегралы $\int_{AD} f dl$ и $\int_{BC} f dl$ зависят только от a_2 и a_1 соответственно.

Действуя как и выше, получим

$$\int_{AD} f dl = A_2 + o(a_2^2), \quad (18)$$

$$\int_{BC} f dl = A_1 + o(a_1^2). \quad (19)$$

Подставляя (16), (18), (19) в правую часть (8), мы получим следующее

выражение для предела Крофтона $\gamma_f(g_0)$:

$$\begin{aligned} \gamma_f(g_0) = & \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f(l_1, 0, 0)}{\partial \varphi} - \frac{1}{2(l_2 - l_1)} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial f}{\partial \varphi} dx + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2(l_2 - l_1)} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial f}{\partial y} (l_2 - x) dx \right] \operatorname{ctg} \alpha_1 + \\ & + \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f(l_2, 0, 0)}{\partial \varphi} + \frac{1}{2(l_2 - l_1)} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial f}{\partial \varphi} dx - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2(l_2 - l_1)} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial f}{\partial y} (l_1 - x) dx \right] \operatorname{ctg} \alpha_2 + \\ & + \frac{1}{2(l_2 - l_1)} \left[\int_{l_1}^{l_2} f(x, 0, 0) dx + \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} dx - \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \varphi} (l_2 - x) dx + \right. \\ & \left. + \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \varphi} (x - l_1) dx + \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (l_2 - x)(l_1 - x) dx \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что полученный результат имеет вид комбинации $\operatorname{ctg} \alpha_i$:

$$\gamma_f(g_0) = B_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 + B_2 \operatorname{ctg} \alpha_2 + C.$$

Если предел $\gamma_f(g_0)$ определяет плотность меры в $\mathbb{G}$, то правая часть (20) не должен зависеть от углов α_1 и α_2 . Следовательно, в этом случае коэффициенты B_1 и B_2 необходимо равны нулю :

$$\frac{\partial f(l_1, 0, 0)}{\partial \varphi} - \frac{1}{l_2 - l_1} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial f(x, 0, 0)}{\partial \varphi} dx + \frac{1}{l_2 - l_1} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial f(x, 0, 0)}{\partial y} (l_2 - x) dx = 0 \quad (21)$$

и

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial f(l_2, 0, 0)}{\partial \varphi} + \frac{1}{l_2 - l_1} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial f(x, 0, 0)}{\partial \varphi} dx - \\ & - \frac{1}{l_2 - l_1} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial f(x, 0, 0)}{\partial y} (l_1 - x) dx = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Так как выбор прямой g_0 и $l_1 \in g_0$ были произвольными, то (21) можно переписать как результат относящийся к значению f на семействе флагов $L = \{(\mathcal{P}, \varphi) : \mathcal{P} \text{ меняется на направленном прямолинейном отрезке исходящем из } \mathcal{P}_1, \text{ длина которого есть } |L| \text{ и направление } - \varphi\}$.

А именно, (21) можно записать как

$$\frac{\partial f(\mathcal{P}_1, \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{1}{|L|} \int_L \frac{\partial f(x(l), y(l), \varphi)}{\partial \varphi} dl + \frac{1}{|L|} \int_L \frac{\partial f(x(l), y(l), \varphi)}{\partial n^+} (|L| - l) dl = 0, \quad (23)$$

где $\frac{\partial}{\partial n^+}$ обозначает дифференцирование в направлении "положительной" нормали к L , направление которого соответствует координатной системе на Рис. 1.

Очевидно, что (22) есть частный случай (23). Если имеют место и (21), и (22), то $\gamma(g_0)$ равен C .

Мы доказали следующую лемму:

Лемма 1. Если неотрицательная функция флага f порождает меру в пространстве G в смысле описанном в §1, то она необходимо удовлетворяет (23).

Используя (20), (23), мы получим окончательное выражение для $\gamma_f(g_0)$:

$$\gamma_f(g_0) = \frac{1}{2(l_2 - l_1)} \left[\int_{l_1}^{l_2} f(x, 0, 0) dx + \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} dx - \right. \\ \left. - \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \varphi} ((l_1 - x) + (l_2 - x)) dx + \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (l_2 - x)(l_1 - x) dx \right]. \quad (24)$$

И вновь, (24) можно записать для произвольной прямой g , направление которой есть φ . Следовательно, плотность меры прямых соответствующая заданной функции f может быть найдена по формуле:

$$\gamma_f(g_0) = \frac{1}{2|L|} \left[\int_L f(x(l), y(l), \varphi) dl + \int_L \frac{\partial^2 f(x(l), y(l), \varphi)}{\partial \varphi^2} dl - \right. \\ \left. - \int_L \frac{\partial^2 f(x(l), y(l), \varphi)}{\partial \varphi \partial n^+} (|L| - 2l) dl - \int_L \frac{\partial^2 f(x(l), y(l), \varphi)}{\partial (n^+)^2} (|L| - l) l dl \right]. \quad (25)$$

Таким образом, (23) является ответом на вопрос 2 параграфа 2. Очевидно, из (23) также следует ограниченность крофтоновского отношения. Мы используем этот факт ниже в §5.

§4. ПРОВЕРКА

Пусть $\gamma(\varphi, p) = \gamma(g)$ — плотность меры $m(\cdot)$ в G , абсолютно непрерывная относительно dg . (φ, p) — полярные координаты основания перпендикуляра опущенного из начала координат O на прямую g .

В этом случае соответствующая флаговая функция f может быть представлена в виде:

$$f(x, y, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \gamma(\varphi + \psi, p(x, y, \varphi + \psi)) \cdot |\sin \psi| d\psi. \quad (26)$$

Проверим, что условие (23) удовлетворяется для функции f заданной по (26).

Так как $p(x, y, \varphi + \psi) = t \cdot \sin\left(\varphi + \psi, \arcsin \frac{y}{t}\right)$, где $t = \sqrt{x^2 + y^2}$, то заменой переменной в (26), получаем

$$f(x, y, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{\varphi}^{2\pi+\varphi} \gamma(\nu, p(x, y, \nu)) \cdot |\sin(\nu - \varphi)| d\nu.$$

Найдём производные $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ и $\frac{\partial f}{\partial n^+}$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y, \varphi)}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\pi+\varphi} \gamma(\nu, p(x, y, \nu)) \cdot \cos(\nu - \varphi) d\nu + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\pi+\varphi}^{2\pi+\varphi} \gamma(\nu, p(x, y, \nu)) \cdot \cos(\nu - \varphi) d\nu. \end{aligned} \quad (27)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \gamma(\varphi + \psi, p(x, y, \varphi + \psi)) \cdot \cos \psi \operatorname{sign}[\sin \psi] d\psi. \quad (28)$$

где

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{если } x > 0 \\ 0 & \text{если } x = 0 \\ -1 & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{|L|} \int_L \frac{\partial f}{\partial \varphi} dl &= \\ &= -\int_0^{2\pi} \cos \psi \cdot \operatorname{sign}[\sin \psi] d\psi \left(\frac{1}{2|L|} \int_L \gamma(\varphi + \psi, p(x(l), y(l), \varphi + \psi)) dl \right) \end{aligned} \quad (29)$$

Перейдём к $\frac{\partial f}{\partial n^+}$.

$$\frac{\partial f}{\partial n^+} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \gamma}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial n^+} \cdot |\sin \psi| d\psi. \quad (30)$$

Так как $\frac{\partial l}{\partial n^+} = -\operatorname{ctg} \psi$ (см. Рис. 3), мы получим

$$\frac{\partial f}{\partial n^+} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \psi \cdot |\sin \psi| \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial l} d\psi. \quad (31)$$

Заметим, что $\operatorname{ctg} \psi \cdot |\sin \psi| = \cos \psi \cdot \operatorname{sign}[\sin \psi]$.

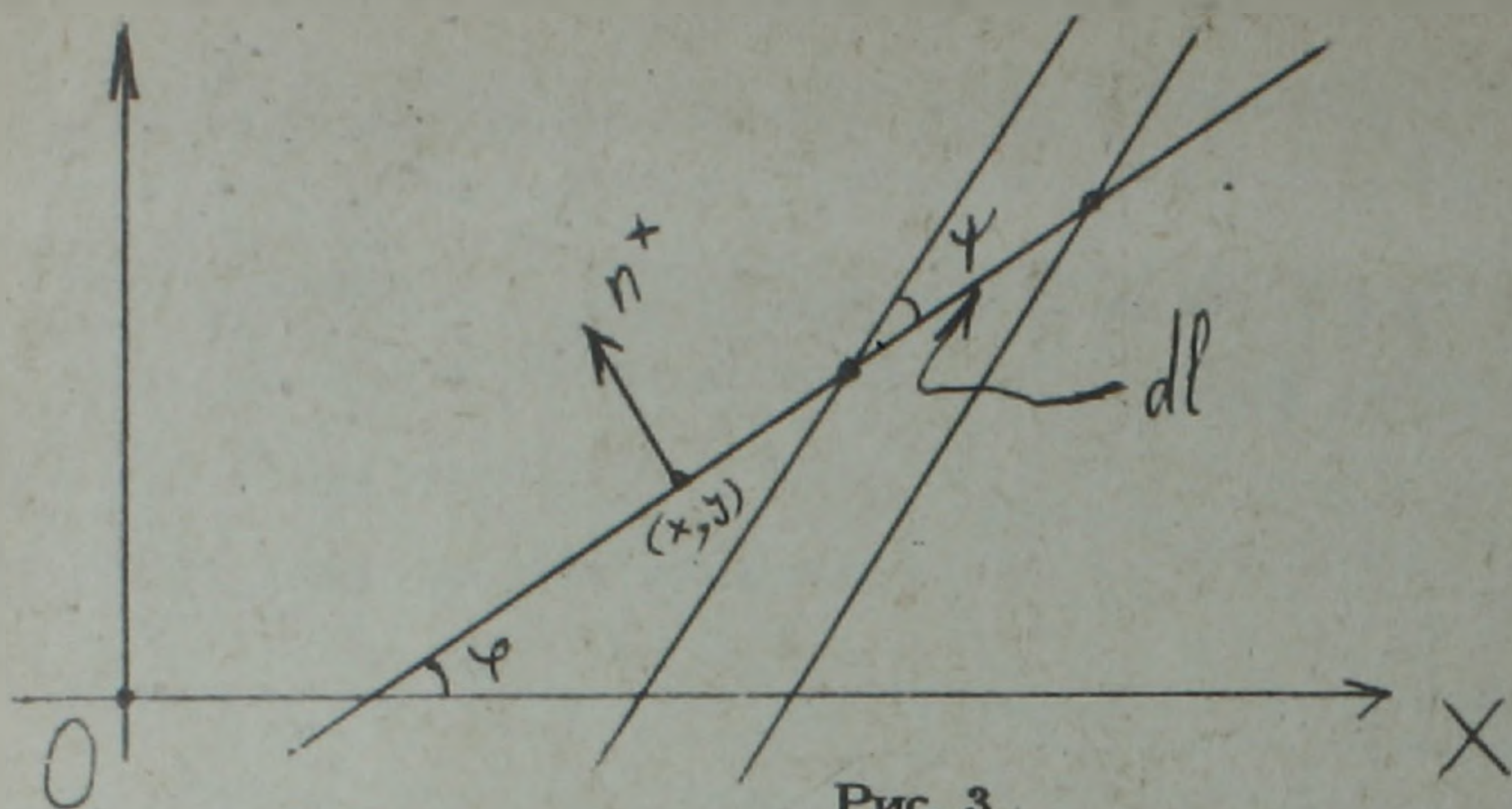


Рис. 3

Поэтому

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{|L|} \int_L \frac{\partial f}{\partial n^+} (|L| - l) dl = \\
 & = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos \psi \cdot \text{sign}[\sin \psi] d\psi \cdot \left[\frac{1}{|L|} \int_0^{|L|} \frac{\partial \gamma}{\partial l} \cdot (|L| - l) dl \right] = \\
 & = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos \psi \cdot \text{sign}[\sin \psi] \cdot \gamma d\psi - \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos \psi \cdot \text{sign}[\sin \psi] \cdot \left[\frac{1}{|L|} \int_L \gamma dl \right] d\psi,
 \end{aligned} \tag{32}$$

здесь мы использовали $\frac{1}{|L|} \int_0^{|L|} \frac{\partial \gamma}{\partial l} \cdot (|L| - l) dl = -\gamma + \frac{1}{|L|} \int_L \gamma dl$.

Подставляя (27), (29) и (32) в (23) получим тождество. Таким образом, для f типа (26) условие (23) удовлетворяется.

Проверим, также, что результатом применения (25) есть плотность $\gamma(\varphi, p)$.

Имеем

$$\frac{1}{2|L|} \int_L f(x(l), y(l), \varphi) dl = \int_0^{2\pi} |\sin \psi| \cdot \left[\frac{1}{4|L|} \int_L \gamma \cdot dl \right] d\psi. \tag{33}$$

Дифференцируя (27) по φ получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = \gamma(\varphi, p(x, y, \varphi)) + \gamma(\pi + \varphi, p(x, y, \pi + \varphi)) - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \gamma \cdot |\sin \psi| d\psi.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2|L|} \int_L \frac{\partial^2 f(x(l), y(l), \varphi)}{\partial \varphi^2} dl = \\
 & = \frac{1}{2} [\gamma(\varphi, p(x, y, \varphi)) + \gamma(\pi + \varphi, p(x, y, \pi + \varphi))] - \\
 & - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} |\sin \psi| \cdot \left[\frac{1}{|L|} \int_L \gamma dl \right] d\psi,
 \end{aligned} \tag{34}$$

Используя (31), мы находим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial (n^+)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}^2 \psi \cdot |\sin \psi| \cdot \frac{\partial^2 \gamma}{\partial l^2} d\psi. \quad (35)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2|L|} \int_L \frac{\partial^2 f}{\partial (n^+)^2} (|L| - l) l dl = \\ & = -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}^2 \psi \cdot |\sin \psi| [\gamma(\varphi, p(x, y, \varphi)) + \gamma(\pi + \varphi, p(x, y, \pi + \varphi))] d\psi + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}^2 \psi \cdot |\sin \psi| \left[\frac{1}{|L|} \int_L \gamma dl \right] d\psi. \end{aligned} \quad (36)$$

Используя (28), получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial n^+} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \gamma}{\partial l} \operatorname{ctg} \psi \cdot \cos \psi \cdot \operatorname{sign}[\sin \psi] d\psi.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2|L|} \int_L \frac{\partial^2 f(x(l), y(l), \varphi)}{\partial \varphi \partial n^+} (|L| - 2l) dl = \\ & = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \psi \cdot \cos \psi \cdot \operatorname{sign}[\sin \psi] \{ [\gamma(\varphi, p(x, y, \varphi)) + \\ & + \gamma(\pi + \varphi, p(x, y, \pi + \varphi))] - \frac{2}{|L|} \int_L \gamma dl \} d\psi. \end{aligned} \quad (37)$$

Используя (33), (34), (36) и (37), получаем

$$\gamma_f(g) = \gamma(\varphi, p)$$

(здесь мы использовали тождество $\operatorname{ctg}^2 \psi \cdot |\sin \psi| = \operatorname{ctg} \psi \cos \psi \cdot \operatorname{sign}[\sin \psi]$).

Мы проверили необходимость условия (23). Заметим, что (25) можно рассматривать как решение интегрального уравнения (26).

§5. ОБОБЩЕНИЕ НА ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ МЕРЫ

Все меры и плотности, рассмотренные нами в предыдущих параграфах были неотрицательны. Однако часть полученных выше результатов остаются в силе если заменить меры и плотности в формулировках результатов на знакопеременные меры и плотности.

Заметим также что проверка в §4 остаётся в силе, если опустить условие неотрицательности функции f . Однако в контексте с знакопеременными

плотностями утверждения касающиеся финслеровых метрик не имеют место. Однако, эта потеря компенсируется замечанием, что (23) в случае знакопеременных мер становится и достаточным условием. Для доказательства этого утверждения используется результат Р. В. Амбарцумяна опубликованный в этом же номере журнала (Предложение 2).

Теорема. Пусть f достаточно гладкая флаговая функция. Тогда условие (23) необходимо и достаточно для существования локально-конечной знакопеременной меры в пространстве прямых $\mathbf{G}$, которая имеет плотность $\gamma(g)$, удовлетворяющую (26).

Доказательство. Рассмотрим предел Крофтона (8) для следующего интеграла

$$\int_{P_1 P_2} f(F, \varphi) dl$$

(предел (8) существует, так как неотрицательность f , которая предполагалась в §3 несущественна).

Если уравнение (23) удовлетворено, то крофтоновское отношение остаётся ограниченным (коэффициенты B_1 и B_2 перед $\operatorname{ctg} \alpha_1$ и $\operatorname{ctg} \alpha_2$ равны нулю) и следовательно, упомянутая теорема (см. [3]) имеет место. Мы доказали существование знакопеременной меры $m(\cdot)$ в $\mathbf{G}$, для которой

$$m([v]) = \int_v f dl$$

и (25) даёт значение её плотности. Отсюда следует представление (26).

Замечание 1. Неотрицательность правой части (25) эквивалентна условию выпуклости функции f т. е.

$$f(x, y, \varphi) + \frac{\partial^2 f(x, y, \varphi)}{\partial \varphi^2} \geq 0.$$

Замечание 2. Условие (23) эквивалентно следующему условию

$$-\frac{\partial f}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \varphi} \sin \varphi = 0. \quad (38)$$

Доказательство. Умножая (23) на $|L|$, дифференцируя дважды по $|L|$ и используя

$$\frac{\partial f}{\partial n^+} = -\frac{\partial f}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \varphi$$

получаем (38).

Замечание 3. Хорошо известен следующий факт касающийся плоских финслеровых метрик (см. [5]) : для того чтобы геодезические определяемые некоторой метрикой были бы прямыми, необходимо, чтобы соответствующая финслерова плотность удовлетворяла бы уравнениям Эйлера. Наше условие (3) является линейной комбинацией уравнений Эйлера.

ABSTRACT. A Finsler metric ρ is described by its density (Finsler density), which is a function $f(x, y, \varphi)$ depending on $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, and $\varphi \in S_1$ (S_1 is the circle of planar directions). It is proved that if a nonnegative locally convex function f defined on $\mathbb{R}^2 \times S_1$ satisfies the differential equation :
$$-\frac{\partial f}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \varphi} \sin \varphi = 0$$
 then f is a Finsler density and the corresponding metric ρ determines a measure $m(\cdot)$ in the space G of lines in the plane. If the condition of local convexity and nonnegativity of f is removed then this differential equation presents a necessary and sufficient condition for the existence of a signed measure $m(\cdot)$ in G . If f is sufficiently smooth, then $m(\cdot)$ necessarily has a density, for which an explicit expression in terms of f is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry, John Wiley and Sons, 1982.
2. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, 1990.
3. Р. В. Амбарцумян, "Замечания о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$," Изв. АН Армении, серия Математика, [английский перевод : Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)], том 27, № 5, стр. 1 – 21, 1992.
4. Х. Рунд, Дифференциальная Геометрия Финслеровых Пространств, Наука, 1981.
5. А. В. Погорелов, Четвёртая проблема Гильберта, Наука, 1974.

17 Ноября 1992

Ереванский государственный университет