ОБЛАСТЬ ДОСТИЖИМЫХ СКОРОСТЕЙ КАНАЛА МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА И НАДЕЖНОСТЬ

Е. А. Арутюнян, М. Е. Арутюнян, А. Э. Аветисян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 27, № 5, 1992

Рассмотрено несколько моделей канала множественного доступа с двумя кодерами и одним декодером и канал множественного доступа с иерархией источников. Решена задача построения внешней и внутренней границы для E–пропускной способности.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Канал множественного доступа (КМД) с двумя кодерами и одним декодером $\mathcal{W} = \{W : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \longmapsto \mathcal{Y}\}$ определяется матрицей переходных вероятностей

$$W = \{W(y|x_1, x_2), \quad x_1 \in \mathcal{X}_1, \quad x_2 \in \mathcal{X}_2, \quad y \in \mathcal{Y}\},$$

где $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ – алфавиты первого и второго входов канала, а $\mathcal{Y}$ – выходной алфавит. Пусть $\mathbf{x}_i = (x_i^1, x_i^2, ..., x_i^n) \in \mathcal{X}_i^n$, $i = 1,2$ и $\mathbf{y} = (y^1, y^2, ..., y^n) \in \mathcal{Y}^n$. Мы изучаем каналы без памяти, для которых

$$W^n(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \prod_{t=1}^{n} W(y^t|x_1^t, x_2^t).$$

В настоящей статье будет рассмотрено несколько моделей КМД. Первая модель – это КМД с коррелированными источниками, который был впервые исследован Слепяном и Вулфом [1].

В этой модели имеются три источника, один из которых связан с обеими кодерами,, а каждый из двух других связан с одним из кодеров. Множества сообщений источников обозначим соответственно M_0, M_1, M_2. Кодом длины n для такой модели называется тройка отображений

$$f_1 : \quad M_0 \times M_1 \longmapsto \mathcal{X}_1^n, \qquad f_2 : \quad M_0 \times M_2 \longmapsto \mathcal{X}_2^n,$$

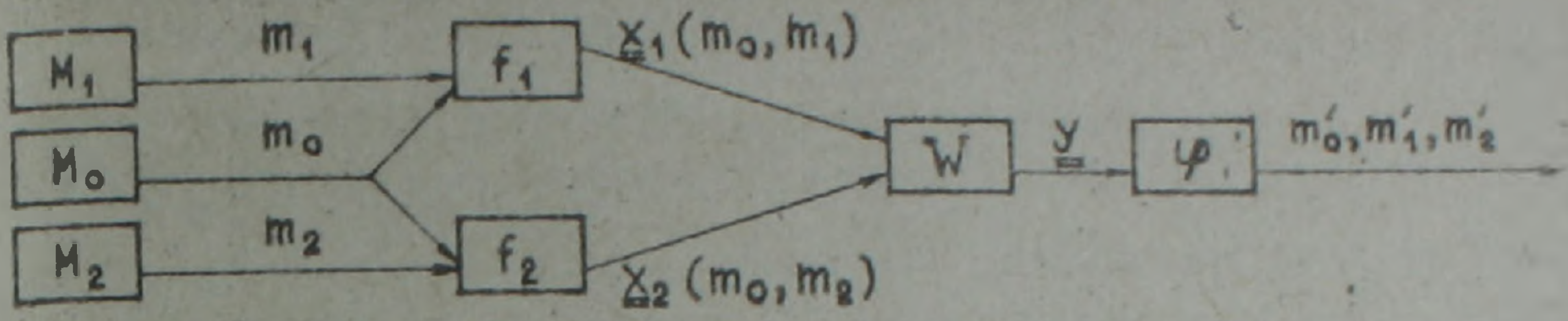

Рис. 1. КМД с коррелированными источниками

$$\varphi: \quad \mathcal{Y}^n \longmapsto M_0 \times M_1 \times M_2,$$

где f_1 и f_2 суть кодирования, а φ – декодирование. Основными характеристиками кода являются тройка скоростей передачи (все логарифмы и экспоненты в статье имеют основание 2)

$$\frac{1}{n}\log|M_i|, \quad i=0,1,2$$

и вероятность ошибки декодирования. Обозначим для $m_i \in M_i$, $i=0,1,2$

$$e_{m_0,m_1,m_2}(f_1,f_2,\varphi,n) = W^n(y:\varphi(y)\neq(m_0,m_1,m_2)\,|\,f_1(m_0,m_1),f_2(m_0,m_2)). \quad (1)$$

Средняя $\overline{e}(f_1,f_2,\varphi,n)$ и максимальная $e(f_1,f_2,\varphi,n)$ вероятности ошибки определяются как обычно :

$$\overline{e}(f_1,f_2,\varphi,n) = \frac{1}{|M_0|\cdot|M_1|\cdot|M_2|}\sum_{m_0,m_1,m_2} e_{m_0,m_1,m_2}(f_1,f_2,\varphi,n),$$

$$e(f_1,f_2,\varphi,n) = \max_{m_0,m_1,m_2} e_{m_0,m_1,m_2}(f_1,f_2,\varphi,n).$$

Тройка неотрицательных чисел R_0,R_1,R_2 называется *ε-достижимой* для КМД $\mathcal{W}$, если для любого $\delta>0$ и для каждого достаточно большого n существует код (f_1,f_2,φ) длины n такой, что

$$\frac{1}{n}\log|M_i| \geq R_i-\delta, \quad i=0,1,2$$

а средняя вероятность ошибки удовлетворяет условию

$$\overline{e}(f_1,f_2,\varphi,n)\leq\varepsilon.$$

Областью пропускной способности КМД W называется множество всех достижимых троек скоростей для всех $\varepsilon > 0$. В отличие от дискретного канала без памяти (ДКБП), для КМД области пропускной способности для максимальной и средней вероятностей ошибок могут быть различными.

Наша цель – изучение области ϵ–достижимых скоростей для $\epsilon = 2^{-nE}$, $E > 0$, которую мы называем *областью E–пропускной способности*. Показатель E будем называть *надежностью*. Функциональная зависимость скорости от надежности (см. обзор [2]) была исследована для различных каналов и источников.

Ранее [1,3] для КМД была рассмотрена задача исследования зависимости надежности E от скоростей R_0, R_1, R_2 из области пропускной способности. В частном случае, когда $|M_0| = 1$, получаем классический КМД, впервые введенный Шенноном [4] и изученный Алсведе [5, 6] и Ван дер Меленом [7]. Шеннон описал область пропускной способности этого канала. Алсведе [5] получил простую характеризацию области пропускной способности, а также другую характеризацию в [6].

В [1] была найдена область достижимых скоростей КМД с коррелированными источниками и построена граница случайного кодирования (нижняя граница) в "форме Галлагера" для надежности как функции скорости. Для этой же функции в [3] была получена верхняя граница (граница сферической упаковки).

В настоящей статье приведены внутренние и внешние границы области E–пропускной способности для различных моделей КМД аннонсированные в [8]. Внешнюю границу мы называем *границей сферической упаковки*, а внутренюю границу – *границей случайного кодирования*. В частном случае $|M_2| = 1$, КМД называется *асимметричным* [9]. В этом случае внешняя и внутреняя границы (для надежности – как функции скорости и для области E–пропускной способности) совпадают при малых E.

В работе [3] показано, что формы аналитической записи Арутюняна и Галлагера для границы сферической упаковки эквивалентны. Там же было показано, что внешняя и внутреняя границы для скорости, как функции надежности, при малых E совпадают также для КМД с коррелированными источниками, когда матрица переходных вероятностей, определяющая канал симметрична. Аналогичный факт можно доказать для границ, обсуждаемых в настоящей статье.

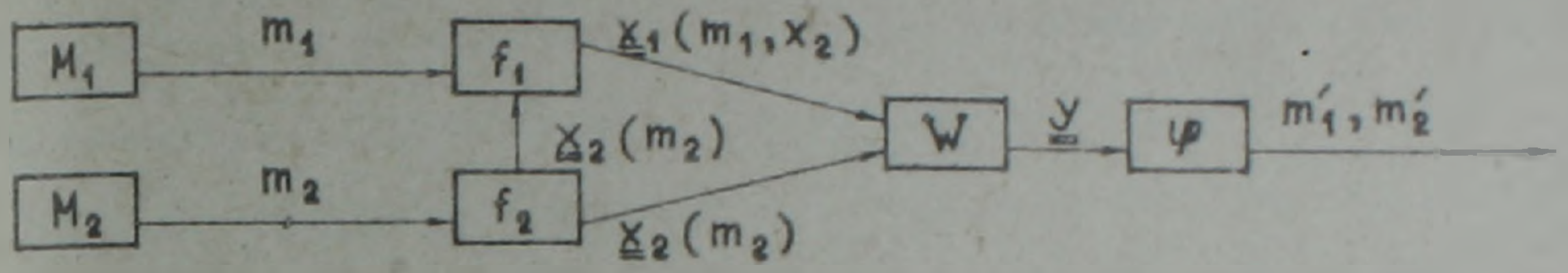

Рис. 2. КМД с подглядывающим кодером

Следующая модель, рассматриваемая в настоящей статье, – это КМД с подглядывающим кодером, введенная Виллемсом и Ван дер Меленом [10, 11]. В этом случае (см. Рис. 2) первый кодер получает полную информацию о втором кодере, а общий источник отсутствует, т.е. $|M_0| = 1$. Полученные для этой модели внутренние и внешние границы области E-пропускной способности также совпадают при малых E.

Результат для асимметричного КМД естественно обобщается на случай модели КМД с S входами, связанными с S источниками согласно следующей иерархии (см. Рис. 3)

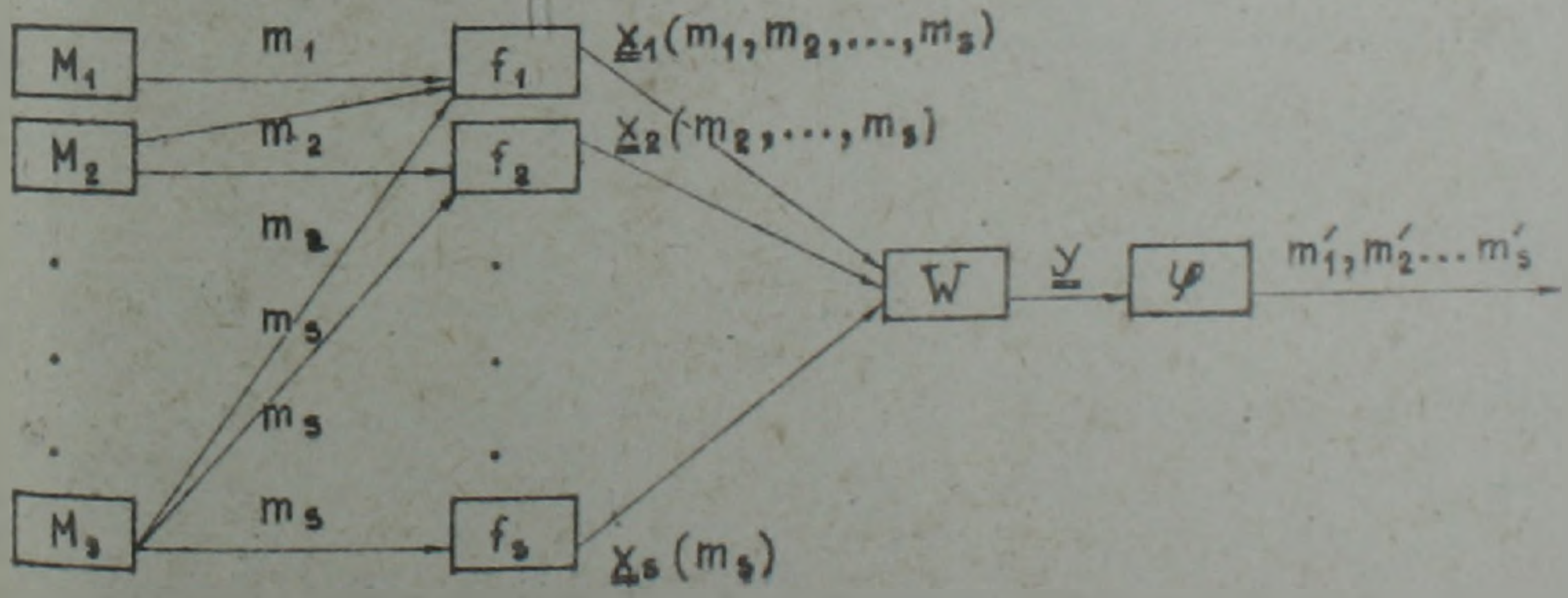

Рис. 3. КМД с иерархией источников

r-ый источник ($r = 1, ..., S$) связан с первыми r кодерами. Эта модель была рассмотрена Преловым [12], который определил область пропускной способности такого КМД. Мы приведем внешние и внутренние границы области E-пропускной способности этого канала.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Очевидно, что внешняя граница области достижимых скоростей, построенная при экспоненциальном убывании средней вероятности ошибки с заданной надежностью E, верна также в случае аналогичного убывания максимальной вероятности ошибки. При исследовании же внутренней границы области достижимых скоростей достаточно рассматривать только максимальную вероятность ошибки. Это отражено в нижеследующих теоремах.

Введем вспомогательную случайную величину U со значениями в конечном множестве $\mathcal{U}$. Пусть случайные величины U, X_1, X_2, Y образуют цепь Маркова и задаются совместными распределениями вероятностей (РВ)

$$P = \{P(u, x_1, x_2) = P_0(u)P(x_1, x_2|u), \quad u \in \mathcal{U}, \quad x_1 \in \mathcal{X}_1, \quad x_2 \in \mathcal{X}_2\}$$

и

$$P \circ V = \{P(u, x_1, x_2)V(y|x_1, x_2), \quad u \in \mathcal{U}, \quad x_1 \in \mathcal{X}_1, \quad x_2 \in \mathcal{X}_2, \quad y \in \mathcal{Y}\}$$

с некоторой матрицей $V = \{V(y|x_1, x_2), \quad x_1 \in \mathcal{X}_1, \quad x_2 \in \mathcal{X}_2, \quad y \in \mathcal{Y}\}$.

Мы пользуемся следующими обозначениями :

для дивергенции

$$D(V||W|P) = D(P \circ V||P \circ W) = \sum_{u, x_1, x_2, y} P(u, x_1, x_2)V(y|x_1, x_2) \log \frac{V(y|x_1, x_2)}{W(y|x_1, x_2)},$$

для энтропии

$$H_P(X_1, X_2|U) = -\sum_{u, x_1, x_2} P(u, x_1, x_2) \log P(x_1, x_2|u),$$

$$H_{P,V}(Y|X_1, X_2, U) = H_{P,V}(Y|X_1, X_2) =$$

$$= - \sum_{u,x_1,x_2,y} P(u,x_1,x_2)V(y|x_1,x_2)\log V(y|x_1,x_2)$$

и для взаимных информаций

$$I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2) = H_P(X_1, X_2) - H_{P,V}(X_1, X_2|Y),$$

$$I_{P,V}(Y \wedge X_1|X_2, U) = H_P(X_1|X_2, U) - H_{P,V}(X_1|X_2, Y, U),$$

$$I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2|U) = H_P(X_1, X_2|U) - H_{P,V}(X_1, X_2|Y, U).$$

Для удобства введем специальные обозначения для внешней и внутренней границы области E-пропускной способности. Пусть W – матрица переходных вероятностей КМД и $\mathcal{D}(W, E)$ – облась E-пропускной способности этого канала. Область $\mathcal{D}_{sp}(W, E)$ в координатном пространстве R_0, R_1, R_2 назовем *границей сферической упаковки* для $\mathcal{D}(W, E)$, если для заданного $E > \delta > 0$ и любого кода f_1, f_2, φ из

$$\overline{e}(f_1, f_2, \varphi, n) \le \exp(-n(E - \delta))$$

при достаточно больших n для скоростей этого кода следует

$$(R_0 - \delta, R_1 - \delta, R_2 - \delta) \in \mathcal{D}_{sp}(W, E).$$

Внутреняя граница для $\mathcal{D}(W, E)$, называемая *границей случайного кодирования* и обозначаемая $\mathcal{D}_r(W, E)$, имеет следующее свойство : для $E > \delta > 0$ и для достаточно больших n существует код f_1, f_2, φ для КМД такой, что

$$e(f_1, f_2, \varphi, n) \le \exp(-n(E - \delta))$$

и

$$(R_0 + \delta, R_1 + \delta, R_2 + \delta) \in \mathcal{D}_r(W, E).$$

Теорема 1. *Для КМД с коррелированными источниками обединение областей*

$$0 \le R_1 \le \min_{V: D(V||W|P) \le E} I_{P,V}(Y \wedge X_1|U, X_2), \tag{2}$$

$$0 \le R_2 \le \min_{V: D(V||W|P) \le E} I_{P,V}(Y \wedge X_2|U, X_1), \tag{3}$$

$$R_1 + R_2 \le \min_{V: D(V||W|P) \le E} I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2|U), \tag{4}$$

$$0 \le R_0 + R_1 + R_2 \le \min_{V: D(V||W|P) \le E} I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2) \tag{5}$$

по различным РВ P на $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{U}$ есть $\mathcal{D}_{sp}(W, E)$.

Следствие 1. При $|M_0| = 1$ объединение областей

$$R_0 = 0,$$

$$0 \leq R_1 \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} I_{P,V}(Y \wedge X_1|X_2),$$

$$0 \leq R_2 \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} I_{P,V}(Y \wedge X_2|X_1),$$

$$R_1 + R_2 \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2)$$

по различным РВ P на $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ есть $\mathcal{D}_{sp}(W, E)$.

Следствие 2. Если $|M_2| = 1$, то объединение областей

$$R_2 = 0,$$

$$0 \leq R_1 \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} I_{P,V}(Y \wedge X_1|X_2),$$

$$0 \leq R_0 + R_1 \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2)$$

по различным РВ P на $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ есть $\mathcal{D}_{sp}(W, E)$.

В следующей теореме мы предполагаем, что в КМД с подглядывающим кодером второй кодер получает полную информацию о первом кодере, а $|M_0| = 1$.

Теорема 2. *Для КМД с подглядывающим кодером и $|M_0| = 1$ объединение областей*

$$R_0 = 0,$$

$$0 \leq R_1 \leq H_P(X_1),$$

$$0 \leq R_2 \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} I_{P,V}(Y \wedge X_2|X_1),$$

$$R_1 + R_2 \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2)$$

по различным РВ P на $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ есть $\mathcal{D}_{sp}(W, E)$.

Следующие результаты – о построении внутренней границы E–пропускной способности.

Теорема 3. *Для КМД с коррелированными источниками выпуклая оболочка области*

$$R_1 \le \min_{V:D(V\|W|P)\le E} |I_{P,V}(Y \wedge X_1|U, X_2) + D(V\|W|P) - E|^+,$$

$$R_2 \le \min_{V:D(V\|W|P)\le E} |I_{P,V}(Y \wedge X_2|U, X_1) + D(V\|W|P) - E|^+,$$

$$R_1 + R_2 \le \min_{V:D(V\|W|P)\le E} |I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2|U) + D(V\|W|P) - E|^+,$$

$$R_0 + R_1 + R_2 \le \min_{V:D(V\|W|P)\le E} |I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2) + D(V\|W|P) - E|^+$$

при РВ P на $\mathcal{U} \times \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ таких, что случайные величины X_1, X_2 условно независимы от заданной U, то есть

$$P = \{P(u, x_1, x_2) = P_0(u)P_1(x_1|u)P_2(x_2|u), \quad u \in \mathcal{U}, \quad x_1 \in \mathcal{X}_1, \quad x_2 \in \mathcal{X}_2\},$$

является $\mathcal{D}_r(W, E)$.

Следствие 3. При $|M_0| = 1$, выпуклая оболочка области

$$R_0 = 0,$$

$$R_1 \le \min_{V:D(V\|W|P)\le E} |I_{P,V}(Y \wedge X_1|X_2) + D(V\|W|P) - E|^+,$$

$$R_2 \le \min_{V:D(V\|W|P)\le E} |I_{P,V}(Y \wedge X_2|X_1) + D(V\|W|P) - E|^+,$$

$$R_1 + R_2 \le \min_{V:D(V\|W|P)\le E} |I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2) + D(V\|W|P) - E|^+$$

при РВ P на $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ таких, что случайные величины X_1, X_2 независимы

$$P = \{P(x_1, x_2) = P_1(x_1)P_2(x_2), \quad x_1 \in \mathcal{X}_1, \quad x_2 \in \mathcal{X}_2\},$$

является $\mathcal{D}_r(W, E)$.

Следствие для случая асимметричного КМД формулируется аналогично. В отличие от общего случая в этой границе (как и в Следствии 2) входное РВ P – произвольное совместное распределение на $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$.

Теорема 4. *Для КМД с подглядывающим кодером выпуклая оболочка области*

$$R_0 = 0,$$

$$R_2 \leq \min_{V: D(V||W|P) \leq E} |I_{P,V}(Y \wedge X_2|X_1) + D(V||W|P) - E|^+,$$

$$R_1 + R_2 \leq \min_{V: D(V||W|P) \leq E} |I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2) + D(V||W|P) - E|^+$$

при различных РВ P на $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ есть $\mathcal{D}_r(W, E)$.

Теперь сформулируем результаты для случая КМД, описанного в §1, с $S \geq 2$ входами и с иерархией источников. Канал определяется матрицей

$$W: \quad \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \cdots \times \mathcal{X}_S \longmapsto \mathcal{Y}.$$

Определения кода, вероятности ошибки, скоростей передачи $R_1, ..., R_S$, дивергенции и взаимной информации, областей $\mathcal{D}_{sp}$ и $\mathcal{D}_r$ для этого случая обобщаются естественным образом.

Теорема 5. *Для КМД с иерархией источников объединение областей*

$$0 \leq R_1 \leq \min_V I_{P,V}(X_1 \wedge Y|X_2, ..., X_S),$$

$$0 \leq R_1 + R_2 \leq \min_V I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y|X_3, ..., X_S), .$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 \leq R_1 + R_2 + \cdots + R_S \leq \min_V I_{P,V}(X_1, ..., X_S \wedge Y),$$

по произвольным РВ P на $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \cdots \times \mathcal{X}_S$, где минимум во всех случаях берется по матрицам $V : \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_S \longmapsto \mathcal{Y}$, удовлетворяющим условию

$$D(V||W|P) \leq E,$$

является $\mathcal{D}_{sp}(W, E)$.

Теорема 6. *Для КМД с иерархией источников выпуклая оболочка областей*

$$R_1 \leq \min_V |I_{P,V}(X_1 \wedge Y|X_2, ..., X_S) + D(V||W|P) - E|^+,$$

$$R_1 + R_2 \leq \min_V |I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y|X_3, ..., X_S) + D(V||W|P) - E|^+,$$

....

$$0 \leq R_1 + R_2 + \cdots + R_S \leq \min_V I_{P,V}(X_1, ..., X_S \wedge Y) + D(V\|W|P) - E|^+,$$

для произвольных РВ P на $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \cdots \times \mathcal{X}_S$, где минимум во всех случаях берется по матрицам $V : \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_S \longmapsto \mathcal{Y}$, удовлетворяющим условию

$$D(V\|W|P) \leq E,$$

является $\mathcal{D}_r(W, E)$.

Вывод границы сферической упаковки $\mathcal{D}_{sp}$ для различных случаев отличается лишь некоторыми деталями, то же имеет место и для границы случайного кодирования $\mathcal{D}_r$. Мы ограничимся изложением доказательств лишь Теорем 1, 3 и 6.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

В доказательствах теорем и лемм используем понятие типа, условного типа и некоторые хорошо известные комбинаторные неравенства из книги [13] (глава 1, §2). Неравенство (5) является следствием границы сферической упаковки для E–пропускной способности ДКБП, поскольку КМД W имеет не больше возможностей, чем ДКБП с входным алфавитом $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ и той же матрицей переходных вероятностей W.

Доказательства неравенств (2), (3) и (4) аналогичны, поэтому мы докажем только неравенство (2). Из условия

$$\overline{e}(f_1, f_2, \varphi, n) \leq \exp(-n(E - \delta))$$

следует, что

$$\frac{1}{|M_0| \cdot |M_1| \cdot |M_2|} \sum_{m_0, m_1, m_2} W^n(\mathcal{Y}^n - \varphi^{-1}(m_0, m_1, m_2) | \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2)) \leq$$
$$\leq \exp(-n(E - \delta)). \tag{6}$$

Рассмотрим конечное множество $\mathcal{U}$ такое, что $|\mathcal{U}|^n \geq |M_0|$. Кроме отображений f_1 и f_2 рассмотрим также отображение $f_0 : M_0 \longmapsto \mathcal{U}^n$. Обозначим

$$f(m_0, m_1, m_2) = (\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2))$$

и через $f(M_0, M_1, M_2)$ – множество всех троек $(\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2))$, $m_i \in M_i$, $i = 0, 1, 2$.

Пусть фиксировано РВ

$$P = \{P(u, x_1, x_2) = P_0(u)P(x_1, x_2|u), \quad u \in \mathcal{U}, \quad x_1 \in \mathcal{X}_1, \quad x_2 \in \mathcal{X}_2\}.$$

Напомним некоторые комбинаторные понятия из [13]. Обозначим через $N(u|\mathbf{u})$ число появлений $u \in \mathcal{U}$ в последовательности $\mathbf{u}$. Типом последовательности $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^n$ называется распределение P_0 на $\mathcal{U}$ такое, что

$$P_0(u) = \frac{1}{n}N(u|\mathbf{u}) \quad \text{для каждой } u \in \mathcal{U}.$$

Множество всех последовательностей типа P_0 на $\mathcal{U}^n$ обозначается $T_{P_0}(U)$. Будем говорить, что $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathcal{X}_1^n \times \mathcal{X}_2^n$ имеет условный тип P для заданной $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^n$, если

$$N(u, x_1, x_2|\mathbf{u}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = N(u|\mathbf{u})P(x_1, x_2|u)$$

для любых $u \in \mathcal{U}$, $x_1 \in \mathcal{X}_1$, $x_2 \in \mathcal{X}_2$. Для $\mathbf{u} \in T_{P_0}(U)$ и стохастической матрицы $P : \mathcal{U} \longmapsto \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ множество всех пар $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathcal{X}_1^n \times \mathcal{X}_2^n$, имеющих условный тип P, обозначается $T_P(X_1, X_2|\mathbf{u})$. Мы будем пользоваться совокупностью множеств различных типов $T_{P_0}(U)$, $T_P(U, X_1, X_2)$, $T_P(X_1, X_2|\mathbf{u})$, $T_P(X_1|\mathbf{u}, \mathbf{x}_2)$ и т.д., которые определяются аналогично.

Введем следующие множества

$$A_{P_0} = \{f_0(M_0) \cap T_{P_0}(U)\},$$

$$A_P = \{f(M_0, M_1, M_2) \cap T_P(U, X_1, X_2)\},$$

$$A_P(\mathbf{u}(m_0)) = (f_1(m_0, M_1) \times f_2(m_0, M_2)) \cap T_P(X_1, X_2|\mathbf{u}(m_0)),$$

$$A_P(\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_2(m_0, m_2)) = \{f_1(m_0, M_1) \cap T_P(X_1|\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_2(m_0, m_2))\}.$$

Пусть тип P таков, что

$$(n+1)^{-|\mathcal{U}|}|M_0| \le |A_{P_0}| \tag{7}$$

и

$$(n+1)^{-|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|}|M_1| \cdot |M_2| \le |A_P(\mathbf{u}(m_0))|, \quad \mathbf{u}(m_0) \in A_{P_0}. \tag{8}$$

Неравенство (6) можно переписать следующим образом

$$\sum_{\mathbf{u}(m_0)\in A_{P_0}} \sum_{(\mathbf{x}_1(m_0,m_1),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))\in A_P(\mathbf{u}(m_0))} W^n(\mathcal{Y}^n - \varphi^{-1}(m_0,m_1,m_2)|\,\mathbf{x}_1(m_0,m_1),$$

$$\mathbf{x}_2(m_0,m_2)) \leq (n+1)^{|\mathcal{U}^2|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|}|A_{P_0}|\cdot|A_P(\mathbf{u}(m_0))|\exp(-n(E-\delta)). \quad (9)$$

Вместо $T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_1(m_0,m_1),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))$ в левой части (9) можно взять $\mathcal{Y}^n$. Учитывая, что при этом вероятность W^n будет зависеть лишь от P и V, получим

$$\sum_{\mathbf{u}(m_0)\in A_{P_0}} \sum_{(\mathbf{x}_1(m_0,m_1),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))\in A_P(\mathbf{u}(m_0))} W^n(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1(m_0,m_1),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))\cdot$$

$$\cdot\big[|T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_1(m_0,m_1),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))|-$$

$$-|T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_1(m_0,m_1),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))\cap\varphi^{-1}(m_0,m_1,m_2)|\big] \leq$$

$$\leq (n+1)^{|\mathcal{U}^2|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|}|A_{P_0}|\cdot|A_P(\mathbf{u}(m_0))|\exp(-n(E-\delta)).$$

Отсюда следует, что для больших n

$$|T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_1(m_0,m_1),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))\cap\varphi^{-1}(m_0,m_1,m_2)| \geq$$

$$\geq |T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_1(m_0,m_1),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))| - \frac{\exp(-n(E-\delta))}{W^n(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1(m_0,m_1),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))}. \quad (10)$$

Зафиксируем m_0 и m_2 и заметим, что

$$|A_P(\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))| \leq |T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))|\times$$

$$\times\Big[\min_{\mathbf{x}_1(m_0,m_1)\in A_P(\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))}$$

$$|T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_1(m_0,m_1),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))\cap\varphi^{-1}(m_0,m_1,m_2)|\Big]^{-1}.$$

С учетом (10) и комбинаторных неравенств [13] получим

$$|A_P(\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))| \leq$$

$$\leq \frac{\exp[nH_{P,V}(Y|X_2,U) - nH_{P,V}(Y|U,X_1,X_2)]}{(n+1)^{-|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|\cdot|\mathcal{Y}|} - \exp[n(D(V||W|P) - E - 2\delta)]}. \quad (11)$$

При условии положительности знаменателя правую часть (11) можно минимизировать по V. Достаточным условием для этого является

$$D(V||W|P) \leq E - \delta.$$

Поэтому для части кодовых слов $A_P(\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))$ фиксированного условного типа получаем оценку (2).

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Доказательство Теоремы 3 основано на методе случайного кодирования, предложенном Шенноном [14, 15]. Сначала мы докажем следующую модификацию леммы об упаковке [13]. Пусть

$$P_0 = \{P_0(u),\, u \in \mathcal{U}\}, \quad P_i = \{P_i(x_i|u),\, x_i \in \mathcal{X}_i,\, u \in \mathcal{U}\}, \quad i = 1,2$$

суть некоторые РВ и

$$P = \left\{P(u, x_1, x_2) = P_0(u)P_1(x_1|u)P_2(x_2|u), \quad u \in \mathcal{U}, \quad x_1 \in \mathcal{X}_1, \quad x_2 \in \mathcal{X}_2\right\}.$$

Лемма 1. *Пусть $E > \delta \geq 0$ и тип P на $\mathcal{U} \times \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ задан. Пусть*

$$\frac{1}{n}\log|M_0 \times M_1 \times M_2| \leq \min_{V:D(V||W|P)\leq E} |I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2) + D(V||W|P) - E - \delta|^+, \quad (12)$$

$$\frac{1}{n}\log|M_1 \times M_2| \leq \min_{V:D(V||W|P)\leq E} |I_{P,V}(Y \wedge X_1, X_2|U) + D(V||W|P) - E - \delta|^+, \quad (13)$$

$$\frac{1}{n}\log|M_1| \leq \min_{V:D(V||W|P)\leq E} |I_{P,V}(Y \wedge X_1|X_2, U) + D(V||W|P) - E - \delta|^+, \quad (14)$$

$$\frac{1}{n}\log|M_2| \leq \min_{V:D(V||W|P)\leq E} |I_{P,V}(Y \wedge X_2|X_1, U) + D(V||W|P) - E - \delta|^+. \quad (15)$$

Тогда существуют векторы $\mathbf{u}(m_0) \in T_{P_0}(U)$, $\mathbf{x}_1(m_0, m_1) \in T_P(X_1|\mathbf{u}(m_0))$, $\mathbf{x}_2(m_0, m_2) \in T_P(X_2|\mathbf{u}(m_0))$, $m_i \in M_i$, $i = 0,1,2$ такие, что для каждой тройки номеров m_0, m_1, m_2 и для каждой пары стохастических матриц V, V' : $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \longmapsto \mathcal{Y}$, при $n \geq n_0(|\mathcal{U}|, |\mathcal{X}_1|, |\mathcal{X}_2|, |\mathcal{Y}|, \delta)$ имеет место неравенство

$$\Big|T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2)) \bigcap \bigcup_{(m_0', m_1', m_2') \neq (m_0, m_1, m_2)} T_{P,V'}(Y|\mathbf{u}(m_0'),$$

$$\mathbf{x}_1(m_0', m_1'), \mathbf{x}_2(m_0', m_2'))\Big| \leq$$

$$\leq |T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2))| \exp[-n|E - D(V'||W|P)|^+]. \quad (16)$$

Доказательство. Для заданных M_0, M_1, M_2, удовлетворяющих условиям (12) - (15), случайным образом выберем три набора векторов

$$\mathbf{u}(m_0) \in T_{P_0}(U), \quad \mathbf{x}_1(m_0, m_1) \in T_P(X_1|\mathbf{u}(m_0)),$$

$$\mathbf{x}_2(m_0, m_2) \in T_P(X_2|\mathbf{u}(m_0)), \quad m_i = 1, \ldots, 2|M_i|, \quad i = 0, 1, 2.$$

Обозначим через $\mathcal{C}(M_0, M_1, M_2)$ множество всех упорядоченных наборов

$$C = \{\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2), \quad m_i = 1, ..., 2|M_i|, \quad i = 0, 1, 2\}.$$

Если для C выполняется (16) для всех m_0, m_1, m_2 и V, V', то тройки векторов $(\mathbf{u}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ обязательно будут разными для разных троек (m_0, m_1, m_2). Для каждого набора C из $\mathcal{C}(M_0, M_1, M_2)$ обозначим через $A_{m_0,m_1,m_2}(C, V, V')$ левую часть (16). Если $D(V'||W|P) \geq E$, то $\exp[-n|E - D(V'||W|P)|^+] = 1$ и (16) верно для любого набора векторов.

Нам остается рассмотреть случай $D(V'||W|P) < E$. Пусть

$$A_{m_0,m_1,m_2}(C) = (n+1)^{-|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|\cdot|\mathcal{Y}|} \sum_{V} \sum_{V': D(V'||W|P) < E} A_{m_0,m_1,m_2}(C, V, V') \times$$

$$\times \exp[n(E - D(V'||W|P) - H_{P,V}(Y|U, X_1, X_2))].$$

Если $A_{m_0,m_1,m_2}(C) \leq 1$ для всех m_0, m_1, m_2, то (16) имеет место для всех m_0, m_1, m_2, V, V'. Отметим, что если для $C \in \mathcal{C}(M_0, M_1, M_2)$

$$\frac{1}{8|M_0 \times M_1 \times M_2|} \sum_{m_0,m_1,m_2} A_{m_0,m_1,m_2}(C) \leq \frac{1}{2}, \tag{17}$$

то $A_{m_0,m_1,m_2}(C) \leq 1$ по крайней мере для $|M_0 \times M_1 \times M_2|$ троек (m_0, m_1, m_2). Кроме того, если C' является частью набора C, то

$$A_{m_0,m_1,m_2}(C') \leq A_{m_0,m_1,m_2}(C) \leq 1$$

для всех таких троек. Поэтому достаточно показать, что для всех троек (m_0, m_1, m_2) при случайном выборе C

$$\mathbf{E} A_{m_0,m_1,m_2}(C) \leq 1/2. \tag{18}$$

Чтобы это показать, оценим $\mathbf{E} A_{m_0,m_1,m_2}(C, V, V')$. Имеем

$$\mathbf{E} A_{m_0,m_1,m_2}(C, V, V') = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n} Pr[\mathbf{y} \in T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2)) \bigcap$$

$$\bigcap \bigcup_{(m_0', m_1', m_2') \neq (m_0, m_1, m_2)} T_{P,V'}(Y|\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2))].$$

Здесь Pr обозначает вероятность события в скобках при случайном выборе C методом, указанным в начале доказательства леммы. Обозначим

$$Pr(V, m_0, m_1, m_2) = Pr[\mathbf{y} \in T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2))].$$

Пусть

$$Pr(V', m_1'|m_0, m_2) = Pr[\mathbf{y} \in T_{P,V'}(Y|\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1'), \mathbf{x}_2(m_0, m_2))]$$

есть условная вероятность при условии, что только $\mathbf{x}_1(m_0, m_1')$ выбирается случайно для фиксированных $\mathbf{u}$ и $\mathbf{x}_2$. Аналогично определим $Pr(V', m_2'|m_0, m_1)$, $Pr(V', m_1', m_2'|m_0)$. Имеем

$$\mathbf{E}A_{m_0,m_1,m_2}(C, V, V') = \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}^n} Pr(V, m_0, m_1, m_2) \Bigg[\sum_{m_1'\neq m_1} Pr(V', m_1'|m_0, m_2) +$$

$$+ \sum_{m_2'\neq m_2} Pr(V', m_2'|m_0, m_1) + \sum_{m_1'\neq m_1, m_2'\neq m_2} Pr(V', m_1', m_2'|m_0) +$$

$$+ \sum_{m_0'\neq m_0, m_1'\neq m_1, m_2'\neq m_2} Pr(V', m_0', m_1', m_2')\Bigg]. \tag{19}$$

В первой сумме в квадратных скобках имеем

$$Pr(V', m_1'|m_0, m_2) = |T_P(X_1|\mathbf{u})|^{-1}|\{\mathbf{x}_1 : \mathbf{x}_1 \in T_P(X_1|\mathbf{u}),\ \mathbf{y} \in T_{P,V'}(Y|\mathbf{u}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\}| \leq$$

$$\leq (n+1)^{|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|} \exp[-n(H_P(X_1|U) - H_{P,V'}(X_1|U, X_2, Y))] =$$

$$= (n+1)^{|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|} \exp[-nI_{P,V'}(Y \wedge X_1|U, X_2)].$$

В последнем равенстве учтено, что вследствие условной независимости случайных величин X_1 и X_2, для заданной U имеет место

$$I_{P,V'}(X_2, Y \wedge X_1|U) = I_{P,V'}(Y \wedge X_1|U, X_2).$$

По аналогии, для второй суммы получим

$$Pr(V', m_2'|m_0, m_1) \leq (n+1)^{|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|} \exp[-nI_{P,V'}(Y \wedge X_2|U, X_1)].$$

В третьей сумме

$$Pr(V', m_1', m_2'|m_0) =$$

$$= \frac{|\{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) : \mathbf{x}_1 \in T_P(X_1|\mathbf{u}),\ \mathbf{x}_2 \in T_P(X_2|\mathbf{u}),\ \mathbf{y} \in T_{P,V'}(Y|\mathbf{u},\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\}|}{|T_P(X_1|\mathbf{u})| \cdot |T_P(X_2|\mathbf{u})|} \le$$

$$\le (n+1)^{|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|} \exp[-n(H_P(X_1,X_2|U) - H_{P,V'}(X_1,X_2|U,Y))] =$$

$$= (n+1)^{|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|} \exp[-nI_{P,V'}(Y \wedge X_1,X_2|U)].$$

Наконец, для $Pr(V',m_0',m_1',m_2')$ и, аналогично, для $Pr(V,m_0,m_1,m_2)$ имеем

$$Pr(V,m_0,m_1,m_2) =$$

$$= \frac{|\{\mathbf{u} \in T_{P_0}(U),\ \mathbf{x}_1 \in T_P(X_1|\mathbf{u}),\ \mathbf{x}_2 \in T_P(X_2|\mathbf{u}),\ \mathbf{y} \in T_{P,V}(Y|\mathbf{u},\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\}|}{|T_{P_0}(U)| \cdot |T_P(X_1|\mathbf{u})| \cdot |T_P(X_2|\mathbf{u})|} \le$$

$$\le (n+1)^{|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|} \exp[-n(H_P(U,X_1,X_2) - H_{P,V}(U,X_1,X_2|Y))] =$$

$$= (n+1)^{|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|} \exp[-nI_{P,V}(Y \wedge X_1,X_2)].$$

Заметим, что если $\mathbf{y} \notin T_{P,V}(Y)$, то $Pr(V,m_0,m_1,m_2) = 0$. Из (19) и полученных оценок для вероятностей получим

$$\mathbf{E}A_{m_0,m_1,m_2}(C,V,V') \le \exp[nH_{P,V}(Y) - nI_{P,V}(Y \wedge X_1,X_2)] \cdot (n+1)^{2|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|} \times$$

$$\times \{(2|M_1|-1)\exp[-nI_{P,V'}(Y \wedge X_1|U,X_2)] + (2|M_2|-1)\exp[-nI_{P,V'}(Y \wedge X_2|U,X_1)] +$$

$$+ (2|M_1|-1)(2|M_2|-1)\exp[-nI_{P,V'}(Y \wedge X_1,X_2|U)] +$$

$$+ (2|M_0|-1)(2|M_1|-1)(2|M_2|-1)\exp[-nI_{P,V'}(Y \wedge X_1,X_2)]\}. \qquad (20)$$

Согласно определению $A_{m_0,m_1,m_2}(C)$ имеем

$$\mathbf{E}A_{m_0,m_1,m_2}(C) = (n+1)^{|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|(|\mathcal{Y}|+2)} \sum_{V} \sum_{V' : D(V'\|W|P) < E}$$

$$\exp[n(E - D(V'\|W|P) - H_{P,V}(Y|U,X_1,X_2))]\mathbf{E}A_{m_0,m_1,m_2}(C,V,V').$$

Из (20), неравенств (12) - (15), комбинаторных неравенств [13], а также $D(V'\|W|P) < E$ следует, что

$$\mathbf{E}A_{m_0,m_1,m_2}(C) \le 8(n+1)^{|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|(|\mathcal{Y}|+2)} \sum_{V,V'} \exp[-n\delta].$$

Учитывая верхнюю оценку числа всех условных типов, имеем

$$\mathbf{E}A_{m_0,m_1,m_2}(C) \le 8(n+1)^{|\mathcal{U}|\cdot|\mathcal{X}_1|\cdot|\mathcal{X}_2|(3|\mathcal{Y}|+2)} \exp[-n\delta],$$

откуда при $n \ge n_0(|\mathcal{U}|,|\mathcal{X}_1|,|\mathcal{X}_2|,|\mathcal{Y}|,\delta)$ получим

$$\mathbf{E}A_{m_0,m_1,m_2}(C) \le \frac{1}{2}.$$

Лемма доказана.

Доказательство Теоремы 3. Нам нужно построить код с указанными свойствами. Для кодирования ограничимся выбором кодовых слов из соответствующих фиксированных типов

$$\mathbf{u}(m_0) \in T_{P_0}(U), \quad \mathbf{x}_1(m_0, m_1) \in T_P(X_1|\mathbf{u}(m_0)), \quad \mathbf{x}_2(m_0, m_2) \in T_P(X_2|\mathbf{u}(m_0)).$$

Согласно Лемме 1 существует $|M_0 \times M_1 \times M_2|$ различных троек последовательностей, удовлетворяющих (12) – (15) для заданных P и E.

Теперь определим метод декодирования. Пусть при декодировании каждому $\mathbf{y}$ ставится в соответствие такая тройка (m_0, m_1, m_2), для которой

$$\mathbf{y} \in T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2))$$

с таким V, что $D(V||W|P)$ минимальна. Иначе говоря, применим декодирование по минимуму дивергенции. Оценим сверху вероятность ошибки. Если произошла ошибка при передаче тройки сообщений (m_0, m_1, m_2), то существует такая тройка (m_0', m_1', m_2') и матрица V', что

$$\mathbf{y} \in T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2)) \cap$$

$$\cap T_{P,V'}(Y|\mathbf{u}(m_0'), \mathbf{x}_1(m_0', m_1'), \mathbf{x}_2(m_0', m_2'))$$

и

$$D(V'||W|P) \leq D(V||W|P).$$

Поэтому вероятность ошибки можно оценить сверху следующим образом :

$$e(m_0, m_1, m_2) \leq$$

$$\leq W^n \Bigg[\bigcup_{V': D(V'||W|P) \leq D(V||W|P)} T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2)) \bigcap$$

$$\bigcap \bigcup_{(m_0', m_1', m_2') \neq (m_0, m_1, m_2)} T_{P,V'}(Y|\mathbf{u}(m_0'), \mathbf{x}_1(m_0', m_1'), \mathbf{x}_2(m_0', m_2')) \Bigg] \leq$$

$$\leq W^n(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \sum_{V': D(V'||W|P) \leq D(V||W|P)} \Big| T_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_1), \mathbf{x}_2(m_0, m_2)) \bigcap$$

$$\bigcap \bigcup_{(m_0', m_1', m_2') \neq (m_0, m_1, m_2)} T_{P,V'}(Y|\mathbf{u}(m_0'), \mathbf{x}_1(m_0', m_1'), \mathbf{x}_2(m_0', m_2')) \Big|.$$

Согласно (16) получим, что вероятность ошибки достаточно мала :

$$e(m_0,m_1,m_2) \le \sum_{V':D(V'||W|P)\le D(V||W|P)} \exp[-n(E-D(V'||W|P)]\times$$

$$\times\exp[-nD(V||W|P)] \le (n+1)^{|\mathcal{Y}|}\exp[-nE] \le \exp[-n(E-\delta)].$$

Теорема 3 доказана.

§5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6

Нам будет нужна модификация Леммы 1.

Лемма 2. *Пусть $E>\delta\ge 0$ и тип P на $\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2\times\cdots\times\mathcal{X}_S$ задан. Пусть*

$$\frac{1}{n}\log|M_1| \le \min_{V:D(V||W|P)\le E} |I_{P,V}(X_1\wedge Y|X_2,...,X_S)+D(V||W|P)-E-\delta|^+,$$

$$\frac{1}{n}\log(|M_1\times M_2|) \le \min_{V:D(V||W|P)\le E} |I_{P,V}(X_1X_2\wedge Y|X_3,...,X_S)+D(V||W|P)-E-\delta|^+,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{21}$$

$$\frac{1}{n}\log(|M_1\times\cdots\times M_S|) \le \min_{V:D(V||W|P)\le E} |I_{P,V}(X_1...X_S\wedge Y)+D(V||W|P)-E-\delta|^+.$$

Тогда существуют M_S векторов $\mathbf{x}_S(m_S)$ из $T_P(X_S)$, для каждого m_S существуют M_{S-1} векторов $\mathbf{x}_{S-1}(m_{S-1},m_S)$ из $T_P(X_{S-1}|\mathbf{x}_S(m_S))$, ... и для заданных $m_2,...,m_S$ существует вектор $\mathbf{x}_1(m_1,...,m_S)$ из $T_P(X_1|\mathbf{x}_2(m_2,...,m_S),..., \mathbf{x}_S(m_S))$, что для любых $m_1,...,m_S$ и для каждой пары стохастических матриц $V:\mathcal{X}_1\times\cdots\times\mathcal{X}_S\longmapsto\mathcal{Y}$ при достаточно больших n имеет место

$$\Big|T_{P,V}(Y|\mathbf{x}_1(m_1,...,m_S),...,\mathbf{x}_S(m_S))\bigcap\bigcup_{(m'_1,...,m'_S)\ne(m_1,...,m_S)}$$

$$T_{P,V'}(Y|\mathbf{x}_1(m'_1,...,m'_S),...,\mathbf{x}_S(m'_S))\Big|\le$$

$$\le|T_{P,V}(Y|\mathbf{x}_1(m_1,...,m_S),...,\mathbf{x}_S(m_S))|\exp[-n|E-D(V'||W|P)|^+]. \tag{22}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству Леммы 1.

Для доказательства Теоремы 6 сначала нам нужно построить код. Выберем кодовые слова $\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_S$ из соответствующих типов :

$$T_P(X_1|\mathbf{x}_2,...,\mathbf{x}_S),\ T_P(X_2|\mathbf{x}_3,...,\mathbf{x}_S),...,T_P(X_S).$$

Согласно Лемме 2 для заданных P и E существуют $M_1 \times \cdots \times M_S$ различных наборов по s последовательностей, удовлетворяющих (21). Снова воспользуемся декодированием по минимуму дивергенции (см. §4). Используя (22) и комбинаторные неравенства [13], вероятность ошибки можно оценить сверху следующим образом

$$e(m_1, ..., m_S) \leq W^n \left[\bigcup_{V': D(V'\|W|P) \leq D(V\|W|P)} T_{P,V}(Y|\mathbf{x}_1(m_1, ..., m_S), ..., \mathbf{x}_S(m_S)) \bigcap \right.$$

$$\left. \bigcup_{(m'_1,..,m'_S) \neq (m_1,..,m_S)} T_{P,V'}(Y|\mathbf{x}_1(m'_1, .., m'_S), .., \mathbf{x}_S(m'_S)) | \mathbf{x}_1(m_1, .., m_S), .., \mathbf{x}_S(m_S) \right] \leq$$

$$\leq \exp[-n(E - \delta)].$$

Теорема 6 доказана.

ABSTRACT. Several models of multiple–access channels with two encoders and one decoder and a multiple–access channel with a hierarchy of sources are considered. The problem of constructing the outer and the inner bounds for E–capacity region is solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Slepian, J. K. Wolf, "A coding theorem for multiple access channels with correlated sources", Bell System Techn. J., vol. 52, pp. 1037 – 1076, 1973.
2. E. A. Haroutunian, "Rate - reliability function", Proc. of the 3-rd internat. Colloquium on coding theory in Dilijan, 1990, Yerevan, pp. 52 – 68, 1991.
3. Е. А. Арутюнян, "Нижняя граница вероятности ошибки для канала с множественным доступом", Проблемы передачи Информации, том 11, № 2, стр. 23 – 36, 1975.
4. C. E. Shannon, "Coding theorems for a discrete source with a fidelity criterion", IRE National Convention record, part 4, pp. 142 – 163, 1959.
5. R. Ahlswede, "Multi - way communication channels", Proc. 2-nd Internat. Symp. on Inform. Theory, Tsakhkadzor, Armenia, USSR, 1971, Hungarian Press, pp. 23 – 52, 1973.
6. R. Ahlswede, "The capacity region of a channel with two senders and two receivers", Annals of Probability, vol. 2, no. 5, pp. 805 – 814, 1974.
7. E. C. Van der Meulen, "The discrete memoryless channel with two senders i one receiver", Proc. 2-nd Internat. Symp. on Inform. Theory, Tsakhkadzor, Armenia, USSR, 1971, Hungarian Press, pp. 103 – 135, 1973.
8. Е. А. Арутюнян, М. Е. Арутюнян, "Границы достижимых скоростей передачи по каналу с множественным доступом при заданной экспоненте вероятности ошибки", Доклады АН Арм.ССР, том 91, № 3, стр. 3 – 7, 1990.

9. E. C. Van der Meulen, Some recent results on the asymmetric multiple - access channel", Proc. 2-nd Joint Swedish – Soviet Intern. Workshop on Inform. Theory, Gränna, Sweden, pp. 172 – 176, 1985.
10. F. J. Willems, "Informationtheoretical results for the discrete memoryless multiple access channel", Ph. D. dissertation, Katholieke university, Leuven, 156p, 1982.
11. F. J. Willems, E. C. Van der Meulen, "The discrete memoryless multiple access channel with cribbing encoders", IEEE Trans. on Inform. Theory, vol. 31, no. 3, pp. 313 – 327, 1985.
12. В. В. Прелов, "Передача информации по каналу с множественным доступом с некоторой иерархией источников", Проблемы передачи информации, том 20, № 4, стр. 3 – 10, 1984.
13. И. Чисар, Я. Кёрнер, Теория Информации . Теоремы кодирования для дискретных систем без памяти, М., Мир, 1985.
14. C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication", Bell System Techn. J., vol. 27, no. 3, pp. 379 – 423, 1948.
15. C. E. Shannon, "Certain results in coding theory for noisy channels", Inform. and Control, vol. 1, no. 1, pp. 6 – 25, 1957.

30 Июня 1992

Институт Проблем Информации и Автоматизации
Национальной Академии Наук Армении,
Ереванский Государственный Университет