

ТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ГАУССОВСКИХ МЕР В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. Р. Фаталов

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 27, № 5, 1992

Пусть P_A — гауссовская вероятностная мера со средним нуль и ковариационным оператором A в вещественном гильбертовом пространстве H , Ω — борелевское подмножество пространства H , удовлетворяющее некоторым ограничениям. В статье найдена точная асимптотика $P_A(u\Omega)$, $u \rightarrow \infty$. Также получена асимптотика

$$P\left\{\left(\sum_{i=1}^k |X_i|^p\right)^{1/p} > u\right\}, \quad u \rightarrow \infty, \quad p > 1, \quad \text{где } X_i, i = 1, 2, \dots, k \text{ независимые}$$

гауссовские случайные величины. Метод исследования новый: асимптотический метод Лапласа в гильбертовом пространстве, случай граничной точки максимума.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\|\cdot\|$. Пусть P_A — гауссовская вероятностная мера в H со средним нуль и ковариационным оператором A . В работе получена точная асимптотика для вероятности P_A при $u \rightarrow \infty$, для класса измеримых подмножеств $\Omega \subset H$. Аналогичный метод используется для асимптотического анализа гауссовских интегралов

$$\int_{\Omega} f(x) \exp(-u^2 F(x)) dP_A(ux), \quad u \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Из работ на данную тему укажем работы [1–3], где рассматривались логарифмические асимптотики вероятностей больших уклонений для некоторых множеств Ω (так-называемый принцип больших уклонений основанный на функционале действия). Также, точные асимптотики для эллипсоидов в гильбертовом пространстве изучались в [4–6] при помощи преобразований Лапласа.

Наш метод исследования может быть назван методом Лапласа в гильбертовом пространстве, случай граничной точки максимума, и идейно основан на работе [7, глава 2], где изложен метод Лапласа в конечномерном евклидовом пространстве, и статье [8], где изучена асимптотика интегралов типа (1) с $\Omega = H$.

Перейдём к формулировке основного результата.

Без ограничения общности предположим, что ковариационный оператор A невырожден, т. е. $\text{Ker} A = \{0\}$. Отсюда следует, что оператор A будучи симметричным и ядерным (см. [9] – [11]) является также строго положительным, т. е. $\langle Ax, x \rangle > 0$ для всех $x \in H, x \neq 0$. Из результатов статьи [12] следует, что $\overline{R(A)} = H$, где $R(A)$ — множество значений оператора A . Здесь и ниже черта сверху означает замыкание в норме H .

Пусть G — некоторая числовая функция определённая на H . Определим замкнутое борелевское множество $\Omega = \{x \in H : G(x) \geq 0\}$ и предположим, что или Ω , или его дополнение $H \setminus \Omega$ представимо в виде конечного объединения непересекающихся выпуклых множеств, Ω не содержит нуля и внутренность $\overset{\circ}{\Omega}$ множества Ω не пуста.

Пусть квадратичная форма $\frac{1}{2} \langle A^{-1}x, x \rangle$ достигает своего минимума¹ на множестве Ω в конечном числе точек $y^1, y^2, \dots, y^m$, принадлежащих границе $\partial\Omega = \{x : G(x) = 0\}$. Предположим, что существуют производные Фреше первого и второго порядков $G'(y^i), G''(y^i)$ в точках $y^i, i = 1, \dots, m$, $G'(y^i) \neq 0$ и операторы $B_i = I - \lambda_i G''(y^i) A$ — невырождены, где $\lambda_i = |\langle G'(y^i), y^i \rangle|^{-1} \langle A^{-1}y^i, y^i \rangle$, I — тождественный оператор в H , $\langle G'(y^i), y^i \rangle \neq 0$. Мы предположим, также, что $P_A(\partial\Omega) = 0$.

Теорема 1. При сделанных выше предположениях на P_A, Ω и $G(\cdot)$, мы имеем следующее асимптотическое соотношение

$$P_A(u\Omega) = \exp \left\{ -\frac{u^2}{2} \langle A^{-1}y^1, y^1 \rangle \right\} \frac{u^{-1}}{\sqrt{2\pi}} x$$

¹Если $x \notin D(A^{-1})$, то считаем $\langle A^{-1}x, x \rangle = +\infty$. Здесь и ниже $D(A)$ обозначает область определения оператора A .

$$\times \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_i} |\det B_i \langle AB_i^{-1} G'(y'), G'(y') \rangle|^{-1/2} (1 + O(u^{-2})), u \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Замечание 1. Условие выпуклости Ω можно заменить на следующее $\inf\{I(x) : x \in \Omega\} = \inf\{I(x) : x \in \dot{\Omega}\}$, где $I(x)$ — определённый в §1 функционал действия (см. [3]).

Определение и свойства $\det B$ ядерных операторов $I - B$ приведены в [13].

Мы разобьём доказательство Теоремы 1 на несколько этапов. Для простоты изложения мы считаем, что $m = 1$. Для $m > 1$ доказательство требует несколько очевидных изменений.

§1. РЕШЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ В H И ВЫДЕЛЕНИЕ МАЛОЙ ПОЛУОКРЕСТНОСТИ

Пусть $A^{1/2}$ — положительный симметричный квадратный корень из оператора A и $A^{-1/2}$ — обратный оператор для $A^{1/2}$. Поскольку $D(A^{-1}) \subset D(A^{-1/2})$, то $\overline{D(A^{-1/2})} = H$. В $D(A^{-1/2})$ введём скалярное произведение $\langle x, y \rangle_A = \langle A^{-1/2}x, A^{-1/2}y \rangle$, $x, y \in D(A^{-1/2})$. Как известно (см. [9, 10]), этим путём область $D(A^{-1/2})$ превращается в гильбертово пространство H_A с нормой $\|\cdot\|_A$.

Для гауссовской меры P_A определим функционал действия $I(x)$ (см. [1]), называемый также энтропийным функционалом, по формуле

$$I(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|x\|_A^2, & \text{если } x \in H_A \\ +\infty, & \text{если } x \notin H_A. \end{cases}$$

Пусть $y^1 \in \Omega \cap H_A$ — точка в которой достигается минимум функционала $I(x)$, $x \in \Omega$. В Лемме 1 мы покажем, что $y^1 \in D(A^{-1})$. Заметим, что функционал действия $I(x)$ не дифференцируем по Фреше на всём H , но дифференцируем на H_A с производной $I'(x)$ такой, что $I'(x)[y] = \langle x, y \rangle_A$ для всех $y \in H_A$ (см. [14], стр. 48). Пусть $I''(x)$ — вторая производная по Фреше функционала $I(x)$, $x \in H_A$. Очевидно, для $x \in D(A^{-1})$ имеем $I'(x) = A^{-1}x$, $I''(x) = A^{-1}$.

В гильбертовом пространстве $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ рассмотрим экстремальную задачу $I(x) \rightarrow \inf$ с ограничением $G(x) \geq 0$. Используя правило множителей Лагранжа (см. [15], стр. 285, 289), получаем необходимые условия для минимума функционала $I(x)$. Рассмотрим функцию Лагранжа $\mathcal{L}(x, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 I(x) - \lambda_1 G(x)$, $x \in H$. Если $y^1 \in H_A$ есть точка минимума функционала $I(x)$, то найдутся $\hat{\lambda}_0$ и $\hat{\lambda}_1$ (множители Лагранжа) такие, что выполнены следующие условия :

а) условие стационарности :

$$\mathcal{L}_x(y^1, \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1) = 0 \quad \text{т. е.} \quad \hat{\lambda}_0 I'(y^1) - \hat{\lambda}_1 G'(y^1) = 0,$$

б) условие согласованности знаков :

$$\hat{\lambda}_0 \geq 0, \quad \hat{\lambda}_1 \geq 0, \quad \hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1 > 0,$$

в) условие дополняющей нежёсткости :

$$\hat{\lambda}_1 G(y^1) = 0,$$

г) условие второго порядка : для любого $h \in L$, где

$$L = \{h \in H : \langle G'(y^1), h \rangle = 0\}$$

$$\mathcal{L}_{xx}(y^1, \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1)[h, h] \geq 0, \quad \text{т. е.} \quad (\hat{\lambda}_0 I''(y^1) - \hat{\lambda}_1 G''(y^1))[h, h] \geq 0.$$

Заметим, что при наших условиях $\hat{\lambda}_0 > 0$, так как если $\hat{\lambda}_0 = 0$, то условие а) влечёт $G'(y^1) = 0$, что противоречит предположениям Теоремы 1. Следовательно, мы можем положить $\hat{\lambda}_0 = 1$. Ниже всегда мы будем писать λ вместо $\hat{\lambda}_1$.

Лемма 1. Точка минимума y^1 принадлежит $D(A^{-1})$ и

$$A^{-1}y^1 - \lambda G'(y^1) = 0. \quad (3)$$

Доказательство. Из условия а) имеем для всех $x \in H_A$:

$$0 = (I'(y^1) - \lambda G'(y^1))[x] = \langle y^1, x \rangle_A - \lambda \langle G'(y^1), x \rangle = \langle y^1 - \lambda A G'(y^1), x \rangle_A,$$

поскольку

$$\langle G'(y^1), x \rangle = \langle A^{-1/2} A G'(y^1), A^{-1/2} x \rangle = \langle A G'(y^1), x \rangle_A.$$

Следовательно, $y^1 - \lambda A G'(y^1) = 0$. Так как $G'(y^1) \in H$, то $y^1 \in D(A^{-1})$ и выполнено (3). Лемма 1 доказана.

Используя выпуклость Ω и Следствие 4 из [2], получаем логарифмическую асимптотику интересующей нас вероятности.

Лемма 2. (С. Шефе) *Справедливо равенство*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u^{-2} \log P_A(u \Omega) = -\inf\{I(x) : x \in \Omega\} = -\frac{1}{2} \langle A^{-1} y^1, y^1 \rangle.$$

Для любого $\delta > 0$, обозначим через $U_\delta(y^1) \equiv U = \{x \in \Omega : \|x - y^1\| < \delta\}$ открытую δ -"полуокрестность" точки y^1 .

Лемма 3. Для любого $\delta > 0$ найдётся такое $c = c(\delta) > 0$, что

$$\exp(u^2 I(y^1)) P_A(u(\Omega \setminus U)) = O(\exp(-u^2 c)). \quad (4)$$

Доказательство. Как и при доказательстве Леммы 4.1 из [8], используя полунепрерывность снизу функционала действия $I(x)$ и замкнутость множества $\Omega \setminus U$, мы получаем $\inf\{I(x) : x \in \Omega \setminus U\} = d > I(y^1)$. Следовательно, существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $c = d - (I(y^1) + \varepsilon_0) > 0$.

К множеству $\Omega \setminus U$ применима Лемма 2, поэтому

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u^{-2} \log P_A(u(\Omega \setminus U)) = -\inf\{I(x) : x \in \Omega \setminus U\} = -d.$$

Но тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое u_0 , что при всех $u > u_0$

$$\exp(u^2 I(y^1)) P_A(u(\Omega \setminus U)) \leq \exp(-u^2(d - I(y^1) + \varepsilon)),$$

откуда при $\varepsilon = \varepsilon_0$ мы получаем соотношение (4). Лемма 3 доказана.

Итак, основной вклад в искомую асимптотику даёт вероятность малой полуокрестности $U(y^1)$:

$$P_A(u \Omega) = P_A(u U) (1 + O(\exp(-u^2 c_1))) , \quad u \rightarrow \infty, \quad c_1 > 0. \quad (5)$$

§2. АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ГАУССОВСКИЕ МЕРЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ СДВИГА И ПОВОРОТА

В этом параграфе мы будем изучать интеграл $J_0 = \int_U dP_A(ux)$, $x \in H$, при $u \rightarrow \infty$. Необходимые сведения о таких интегралах можно найти в [16].

Рассмотрим следующие замены переменной в интеграле J_0 .

2а) Преобразование сдвига. Положим $y = x - y^1$, тогда будем иметь

$$J_0 = \int_{U'} dP_A(uy + uy^1), \quad \text{где } U' = U - y^1 = \{z - y^1, z \in U\}.$$

Поскольку $y^1 \in D(A^{-1})$, то y^1 — допустимый сдвиг меры P_A (см. [16], стр. 139). Следовательно, по Теореме 2 из [16] следует, что мера $P_A(\cdot + uy^1)$ абсолютно непрерывна относительно меры $P_A(\cdot)$ и

$$\frac{dP_A(uy + uy^1)}{dP_A(uy)} = \exp \left(-\frac{u^2}{2} \langle A^{-1}y^1, y^1 \rangle - u^2 \langle A^{-1}y^1, y \rangle \right).$$

Таким образом, из равенства (3) получаем

$$J_0 = \exp \left(-\frac{u^2}{2} \langle A^{-1}y^1, y^1 \rangle \right) J, \quad (6)$$

где

$$J = \int_{U'} \exp \left(-u^2 \lambda \langle G'(y^1), y \rangle \right) dP_A(uy).$$

2б) Преобразование вращения. Без ограничения общности можем считать, что в качестве ортонормированного базиса в H выбрана система собственных векторов $\{e_i\}$ оператора A . Пусть $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots > 0$ — соответствующие собственные значения. Тогда оператор A можно представить в виде бесконечной диагональной матрицы по диагонали которой стоят числа $A = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots)$. Ниже все координатные записи элементов H относятся к этому базису. В силу теоремы Люстерника (см. [14], стр. 41), единичная внутренняя нормаль $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots)$ к $\partial\Omega = \{x : G(x) = 0\}$ в точке y^1 корректно определяется по равенству $\bar{n} = \pm \frac{1}{l} G'(y^1)$, $l = \|G'(y^1)\|$, где знак выбран так, чтобы $\langle \bar{n}, y^1 \rangle > 0$. Мы всегда будем использовать знак “+”. Найдётся унитарный оператор T на H такой, что $T\bar{n} = e_1 = (1, 0, 0, \dots)$

Оператор T представляет собой двумерное вращение бесконечномерного гильбертова пространства H (см. [17], стр. 187) причём в матричной форме T записывается как $(t_{ij})_{i,j=\overline{1,\infty}}$ с первой строкой равной $t_{1j} = n_j$, $j = \overline{1,\infty}$.

Рассмотрим подробнее структуру оператора T . Для этого обозначим через Π двумерную плоскость, натянутую на векторы e_1 и $\bar{n}$. Пусть $K = \Pi^\perp$ — ортогональное дополнение к Π в H , т. е. $H = \Pi \oplus K$, где $\oplus$ — знак прямой суммы.

Сужение T_K оператора T на подпространство K является тождественным преобразованием в K , а сужение T_Π оператора T на Π есть обычное двумерное вращение в Π на угол φ , $\cos \varphi = \langle \bar{n}, e_1 \rangle = n_1$. Мы не рассматриваем тривиальные случаи $\varphi = 0, \pi$ (см. Замечание 5). Итак, для любого $x \in H$, $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, $x^{(1)} \in \Pi$, $x^{(2)} \in K$ мы имеем

$$Tx = T_\Pi x^{(1)} + x^{(2)}. \quad (7)$$

Пусть $f_1 = e_1$, f_2 — ортонормированный базис в Π а $f_3, f_4, \dots$ — ортонормированный базис в K , так что $\{f_i\}_{i=\overline{1,\infty}}$ — ортонормированный базис в H .

Тогда в силу (7) имеем $Tf_i = f_i$, $i \geq 3$. Следовательно, f_i , $i \geq 3$ — собственные векторы оператора T , соответствующие собственному значению 1. Других собственных векторов ортогональных к $\{f_i\}_{i \geq 3}$, и соответствующих ненулевому собственному значению у оператора T нет, так как $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi$.

Вернёмся к интегралу J , где произведём замену переменной $x = Ty$. Тогда множество $U^* = TU' = \{Tx, x \in U'\}$ будет такой полуокрестностью начала координат, что внутренняя нормаль к U^* в O совпадает с e_1 . Следовательно, гиперплоскость касательная к U^* в O совпадает с координатной гиперплоскостью $\tilde{H} = \{x : x_1 = 0\}$, $x = (x_1, x_2, \dots)$.

Следовательно, принимая $T^* = T^{-1}$, имеем

$$J = \int_{U^*} \exp(-u^2 \lambda |x_1|) dP_{TAT^{-1}}(ux). \quad (8)$$

Здесь мы использовали соотношение $TG'(y^1) = lT\bar{n} = le_1$ и формулу

$$\langle Bx, y \rangle = \int_{T^{-1}H} \langle x, Tv \rangle \langle y, Tv \rangle dP_A(v) = \langle AT^*x, T^*y \rangle = \langle TAT^{-1}x, y \rangle.$$

которая выполняется для всех $x, y \in H$, где B — ковариационный оператор преобразованной гауссовской меры $P_A(T^{-1}(\cdot))$.

Дальнейшее исследование последнего интеграла в (8) основано на следующей лемме.

Лемма 4. *Гауссовская мера $P_{TAT^{-1}}$ абсолютно непрерывна относительно исходной меры P_A с производной Радо-Никодима*

$$\frac{dP_{TAT^{-1}}(x)}{dP_A(x)} = \exp \left[-\frac{1}{2} \langle (TA^{-1}T^{-1} - A^{-1})x, x \rangle \right]. \quad (9)$$

Доказательство основано на следующем утверждении, являющемся слегка измененным предложением из [11], стр. 582.

Теорема 2. Пусть P_A и P_B — гауссовские меры в гильбертовом пространстве H со средним нуль и невырожденными ковариационными операторами A и B . Из условий а) операторы $A^{-1}B$ и $B^{-1}A$ ограничены; б) $\text{Sp} V < \infty$, $\text{Sp} V^*V < \infty$; в) $-I$ не является точкой спектра оператора $V = B^{-1}A - I$ следует, что $P_B \ll P_A$ и

$$\frac{dP_B(x)}{dP_A(x)} = \sqrt{\det B^{-1}A} \exp \left(-\frac{1}{2} \langle (B^{-1} - A^{-1})x, x \rangle \right).$$

Доказательство теоремы можно провести подобно доказательству Теоремы 4 из [11]. Разница заключается в том, что у нас в тождестве умножение на оператор справа. Необходимые сведения о компактных и ядерных операторах и следе операторов можно найти в [18], [19].

Доказательство Леммы 4. Покажем, что для операторов A и $B = TAT^{-1}$ выполнены условия Теоремы 2. Операторы $A^{-1}B$ и $B^{-1}A$ ограничены, что доказывается аналогично для обоих операторов. Имеем $A^{-1}TA = A^{-1}(T - I)A + I$. Покажем, что оператор $A^{-1}(T - I)A$ компактен. Для произвольного ограниченного множества C в H , множество $C_1 = A(C)$ предкомпактно в H . В силу формулы (7) оператор $T - I$ двумерен с областью значений $R(T - I) = \Pi$. Поэтому множество $C_2 = (T - I)(C_1)$ ограничено в Π . Так как A^{-1} инъективен и линейен, то $A^{-1}(C_2)$ ограничено. Следовательно, $A^{-1}(C_2)$ предкомпактно в H .

Покажем теперь, что компактный оператор $A^{-1}(T - I)A$ имеет только нулевые собственные значения, т. е. является вольтеровым (см. [13], стр. 33). Легко видеть, что при условии $f_i \in D(A^{-1})$ векторы $A^{-1}f_i$, $i \geq 3$ являются собственными векторами оператора $A^{-1}(T - I)A$ соответствующими собственному значению нуль:

$$A^{-1}(T - I)AA^{-1}f_i = A^{-1}(T - I)f_i = 0,$$

так как $(T - I)f_i = 0$, $i \geq 3$.

Других собственных векторов, отвечающих ненулевому собственному значению и линейно независимых с векторами $\{A^{-1}f_i\}$, $i \geq 3$ у оператора $A^{-1}(T - I)A$ нет. Действительно, так как A инъективен и $\{f_i\}_{i=1, \infty}$ составляют ортонормированный базис в H , то противное означало бы, что для некоторых чисел α и β , $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, $\mu \neq 0$

$$A^{-1}(T - I)(\alpha f_1 + \beta f_2) = \mu A^{-1}(\alpha f_1 + \beta f_2), \text{ т.е. } (T - I)(\alpha f_1 + \beta f_2) = \mu(\alpha f_1 + \beta f_2).$$

Последнее равенство невозможно при $\mu \neq 0$ и $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi$.

Итак оператор $A^{-1}(T - I)A$ вольтеров. Точно также можно показать, что операторы $A^{-1}(T^{-1} - I)A$ и $T - I$ вольтеровы. Следовательно, $A^{-1}B$ и $B^{-1}A$ ограничены. Далее, оператор $V = TA^{-1}(T^{-1} - I)A + T - I$ компактен как сумма двух компактных операторов, и кроме того он четырёхмерен, как сумма двух двумерных. Следовательно, $\text{Sp}V < \infty$. Оператор VV^* представим в виде суммы четырёх конечномерных операторов, поэтому мы имеем $\text{Sp}VV^* < \infty$.

Таким образом, все условия Теоремы 2 выполнены и формула (9) будет доказана, если мы покажем, что $\det TA^{-1}T^{-1}A = 1$. Имеем, $A^{-1}T^{-1}A = I + A^{-1}(T^{-1} - I)A$, где, как установлено выше, операторы $T - I$ и $A^{-1}(T^{-1} - I)A$ вольтеровы. Поэтому используя известное свойство мультипликативности детерминантов (см. [13], стр. 206), получаем, что $\det B^{-1}A$ определен и верно равенство

$$\det B^{-1}A = \det(I + (T - I)) \cdot \det(I + A^{-1}(T^{-1} - I)A) = 1.$$

так как для вольтерова оператора W имеем $\det(I + W) = 1$ (см. [13], стр. 199). Лемма 4 доказана.

§3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ПЕРЕМЕННОЙ x_1 .

Лемма 4 позволяет записать последний интеграл в (8) в следующем виде

$$J = \int_{U^*} \exp(-u^2 \lambda |x_1|) \exp \left[-\frac{u^2}{2} \langle (TA^{-1}T^{-1} - A^{-1})x, x \rangle \right] dP_A(ux).$$

При достаточно малом $\delta > 0$ применима теорема о неявных функциях к границе ∂U^* множества U^* (см. [15], стр. 166) : существует окрестность $\tilde{U} = \{\tilde{x} \in \tilde{H} : \|\tilde{x}\| < \delta_1\}$ точки $\tilde{0} = (0, 0, \dots) \in \tilde{H}$ и отображение $\varphi : \tilde{U} \rightarrow$ ось Ox_1 такие, что поверхность ∂U^* запишется в виде $x_1 = \varphi(\tilde{x})$, $\tilde{x} = (x_2, x_3, \dots) \in \tilde{U}$. Здесь и далее мы отождествляем точки $(0, x_2, x_3, \dots)$ и $(x_2, x_3, \dots)$; пространство $\tilde{H}$ само рассматривается как гильбертово пространство точек $\tilde{x}$, скалярное произведение в котором индуцировано скалярным произведением в H . В $\tilde{H}$ мы сохраняем обозначения $\|\cdot\|$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Для $x \in U^*$ мы имеем $\tilde{x} \in \tilde{U}$, $\varphi(\tilde{x}) \leq x_1 \leq \delta$, $\varphi(\tilde{0}) = 0$, $\varphi'(\tilde{0}) = 0$, и существует вторая производная по Фреше $\varphi''(\tilde{0})$. Следовательно, интеграл J можно записать в виде повторного интеграла

$$J = \int_{\tilde{U}} \int_{\varphi(\tilde{x})}^{\delta} \exp(-u^2 \lambda |x_1|) dP_{\sigma_1^2}(ux_1) \times \\ \times \exp \left[-\frac{u^2}{2} \langle (TA^{-1}T^{-1} - A^{-1})x, x \rangle \right] dP_{\tilde{A}}(u\tilde{x}), \quad (10)$$

здесь мы использовали факторизацию

$$dP_A(ux) = dP_{\sigma_1^2}(ux_1) dP_{\tilde{A}}(u\tilde{x}),$$

где $dP_{\sigma_1^2}(\cdot)$ — одномерная гауссовская мера со средним нуль и дисперсией σ_1^2 , и $dP_{\tilde{A}}(\cdot)$ есть гауссовская мера в $\tilde{H}$ со средним нуль и ковариационным оператором $\tilde{A} = \text{diag}(\sigma_2^2, \sigma_3^2, \dots)$.

Сейчас наша цель — асимптотически точно оценить внутренний интеграл в (10), при $u \rightarrow \infty$. Поскольку T — унитарный оператор, то квадратич-

ная форма в показателе экспоненты в (10) имеет вид

$$\langle \Theta x, x \rangle = \sum_{i,j=2}^{\infty} \theta_{ij} x_i x_j + 2x_1 \sum_{j=2}^{\infty} \theta_{1j} x_j + \theta_{11} x_1^2,$$

где $\Theta = TA^{-1}T^{-1} - A^{-1} = (\theta_{ij})_{i,j=\overline{1,\infty}}$ и

$$\theta_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_{ik}t_{jk}}{\sigma_k^2} - \frac{\delta_{ij}}{\sigma_i^2}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, внутренний интеграл в (10) имеет вид

$$J_1 = J_1(\tilde{x}) = \frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{\varphi(\tilde{x})}^{\delta} \exp\left(-\frac{u^2}{2}(2\alpha x_1 + \beta x_1^2)\right) dx_1,$$

где

$$\alpha = \alpha(\tilde{x}) = \lambda l + \sum_{j=2}^{\infty} \theta_{1j} x_j, \quad \beta = \theta_{11} + \sigma_1^{-2} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-2} t_{1k}^2 > 0.$$

Мы имеем

$$J_1 = \exp\left(\frac{u^2 \alpha^2}{2\beta}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}\sigma_1} \int_{u\sqrt{\beta}(\frac{\alpha}{\beta} + \varphi(\tilde{x}))}^{u\sqrt{\beta}(\frac{\alpha}{\beta} + \delta)} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \quad (12)$$

К последнему интегралу можно применить метод Лапласа (см. [7], стр. 55);

но для последующего интегрирования по x_1 , мы используем асимптотически

точные оценки. Пусть $\gamma(t)$ и $\Phi(s)$ — плотность и функция распределения

стандартного нормального закона. Хорошо известны следующие оценки

для $t > 0$

$$t^{-1}\gamma(t)(1-t^{-2}) \leq 1 - \Phi(t) \leq t^{-1}\gamma(t). \quad (13)$$

Для любого $\epsilon > 0$ найдётся такое $\delta_1 > 0$, что при всех $\tilde{x}$, $\|\tilde{x}\| < \delta_1$ имеем

$\beta^{-1}\lambda l + \epsilon \geq \beta^{-1}\alpha(\tilde{x}) + \varphi(\tilde{x}) \geq \beta^{-1}\lambda l - \epsilon$. Применяя (13) к интегралу (12),

получаем следующие оценки для J :

$$J_2 \geq J \geq J_2 - J_3 - J_4, \quad (14)$$

где

$$J_2 = \int_{\tilde{U}} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \varphi(\tilde{x})\right)^{-1} \Lambda(u, \tilde{x}) dP_{\tilde{A}}(u\tilde{x}),$$

$$J_3 = u^{-2}\beta^{-1} \int_{\tilde{U}} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \varphi(\tilde{x})\right)^{-3} \Lambda(u, \tilde{x}) dP_{\tilde{A}}(u\tilde{x}),$$

$$J_4 = \int_{\tilde{U}} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \delta \right)^{-1} \Lambda(u, \tilde{x}) dP_{\tilde{A}}(u\tilde{x}),$$

$$\Lambda(u, \tilde{x}) = (u\beta\sigma_1)^{-1} \exp \left(\frac{u^2\alpha^2}{2\beta} \right) \gamma \left(u\sqrt{\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \varphi(\tilde{x}) \right) \right) \exp \left(-\frac{u^2}{2} \sum_{i,j=2}^{\infty} \theta_{ij} x_i x_j \right).$$

Ниже мы увидим, что

$$J_3 = o(J_2), \quad J_4 = o(J_2), \quad u \rightarrow \infty.$$

§4 НАХОЖДЕНИЕ АСИМПТОТИКИ ИНТЕГРАЛА J_2

Нам понадобится следующий результат Р. Эллиса и Дж. Розена из [8], который мы сформулируем в нужной нам локальной форме.

Теорема 3 ([8]). Пусть P_A — гауссовская мера со средним нуль и невырожденным ковариационным оператором A на вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве H . Пусть $\psi(x)$ и $F(x)$ — действительные функции, заданные в некоторой окрестности $U \subset H$ нуля и имеющие там производные по Фреше второго порядка (см. Замечание 2). Пусть

$$H(x) = \begin{cases} F(x) + \frac{1}{2} \langle A^{-1/2}x, A^{-1/2}x \rangle, & \text{если } x \in H_A \\ +\infty & \text{если } x \in H \setminus H_A \end{cases}$$

(Здесь H_A тоже что и в §1).

Предположим, что функционал $H(x)$ имеет единственную точку минимума $0 \in U$ (внутренней точке множества U) и $\text{Ker} H''(0) = \{0\}$. Пусть $\psi(0) \neq 0$ и оператор $F''(0)A$ — ядерный. Тогда верно следующее асимптотическое соотношение

$$\int_U \psi(x) \exp(-u^2 F(x)) dP_A(ux) = \exp(-u^2 F(0)) \psi(0) (\det(I + F''(0)A))^{-1/2} (1 + O(u^{-2})), \quad u \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Замечание 2. По определению [8], существование второй производной Фреше означает возможность тейлоровского разложения $H(x)$ в окрестности нуля ($H'(0) = 0$):

$$H(x) = H(0) + \frac{1}{2} \langle H''(0)x, x \rangle + O(\|x\|^3), \quad x \rightarrow 0,$$

где, как следует из экстремального характера точки 0

$$H''(0) = F''(0) + A^{-1},$$

но оператор A^{-1} , как обратный к компактному неограничен.

Замечание 3. Основная Лемма 4.2 работы [8] остаётся справедливой и в том случае, когда в разложении Тейлора

$$F(x) = F(0) + \langle F'(0), x \rangle + \frac{1}{2} \langle F''(0)x, x \rangle + O(\|x\|^3), \quad x \rightarrow 0$$

оператор $F''(0)A$ — ядерный.

Наконец, заметим, что в нашей Теореме 1, y^1 — граничная точка множества Ω и этим обусловлена невозможность прямого использования результата из [8].

В гильбертовом пространстве $\tilde{H}$ применим Теорему 3 к интегралу J_2 . Если $\tilde{x} \in \tilde{H}$ и a — число, то запись $[a, \tilde{x}]$ означает вектор $(a, x_2, x_3, \dots)$ в H .

Интеграл J_2 можно записать в виде

$$J_2 = \left(\sqrt{2\pi} u \sigma_1 \right)^{-1} \int_{\tilde{U}} \exp(-u^2 F(\tilde{x})) \psi(\tilde{x}) dP_{\tilde{A}}(u\tilde{x}), \quad (16)$$

где

$$\psi(\tilde{x}) = \left[(\theta_{11} + \sigma_1^{-2}) \varphi(\tilde{x}) + \lambda l + \sum_{j=2}^{\infty} \theta_{1j} x_j \right]^{-1}, \quad \tilde{x} \in \tilde{U},$$

$$F(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \langle (TA^{-1}T^{-1} - A^{-1}) [\varphi(\tilde{x}), \tilde{x}], [\varphi(\tilde{x}), \tilde{x}] \rangle + \lambda l \varphi(\tilde{x}) + 2\sigma_1^{-2} \varphi^2(\tilde{x}).$$

Таким образом, в нашем случае функционал $H(\tilde{x})$, для $\tilde{x} \in \tilde{H}_{\tilde{A}}$ имеет вид

$$H(\tilde{x}) = \frac{1}{2} F(\tilde{x}) + \frac{1}{2} \langle \tilde{A}^{-1/2} \tilde{x}, \tilde{A}^{-1/2} \tilde{x} \rangle$$

Так как $A^{-1} = \text{diag}(\sigma_1^{-2}, \sigma_2^{-2}, \dots)$, то

$$\langle A^{-1} [\varphi(\tilde{x}), \tilde{x}], [\varphi(\tilde{x}), \tilde{x}] \rangle = \sigma_1^{-2} \varphi(\tilde{x}) + \langle \tilde{A}^{-1/2} \tilde{x}, \tilde{A}^{-1/2} \tilde{x} \rangle$$

Поэтому

$$H(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \langle A^{-1} T^{-1} [\varphi(\tilde{x}), \tilde{x}], T^{-1} [\varphi(\tilde{x}), \tilde{x}] \rangle + \lambda l \varphi(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \tilde{H}_{\tilde{A}}.$$

Поскольку $\lambda \geq 0$, $l \geq 0$, $\varphi(\tilde{x}) \geq 0$ и оператор A^{-1} положительный, то $H(\tilde{x}) \geq 0$ и минимум достигается в единственной точке 0 :

$$\inf \{ H(\tilde{x}) : \tilde{x} \in \tilde{U} \} = H(\tilde{0}) = 0$$

$\text{Ker } H''(\tilde{0}) = \{0\}$ следует из невырожденности $B_1 = I - \lambda G''(y^1)A$ в условии Теоремы 1.

Применение Теоремы 3 к интегралу (16) даёт

$$J_2 = \left(\sqrt{2\pi} u \lambda l \sigma_1 \right)^{-1} \left(\det(\tilde{I} + F''(\tilde{0})\tilde{A}) \right)^{-1/2} (1 + O(u^{-2})), \quad (17)$$

поскольку $F(\tilde{0}) = 0$ и $F'(\tilde{0}) = 0$, где $\tilde{I}$ — тождественный оператор в $\tilde{H}$.

§5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ $\det(\tilde{I} + F''(\tilde{0})\tilde{A})$

5а) Вычисление $F''(\tilde{0})$. Вначале избавимся от оператора T и функции φ . Обозначим $\tilde{G}(x) = G(T^{-1}x + y^1)$. Тогда, очевидно, $\tilde{G}(x) = 0$ для $x \in \alpha U^*$. В силу выбора функции φ в начале параграфа 3, имеем :

$$\tilde{G}([\varphi(\tilde{x}), \tilde{x}]) \equiv 0, \quad \tilde{x} \in \tilde{U}. \quad (18)$$

Поскольку $\varphi(\tilde{0}) = 0$, $\varphi'(\tilde{0}) = 0$, то матричное представление оператора $F''(\tilde{0}) = (f_{ij})_{i,j=\overline{2,\infty}}$ имеет следующий вид $f_{ij} = \theta_{ij} + \lambda l \frac{\partial^2 \varphi(\tilde{0})}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = \overline{2,\infty}$, где θ_{ij} определены в (11). В силу (18) и используя теорему о неявной функции (см. [15], стр. 166) получаем формулу

$$\varphi'(\tilde{x}) = - \left[\tilde{G}_{x_1}(x_1, \tilde{x}) \Big|_{x_1=\varphi(\tilde{x})} \right]^{-1} \left[\tilde{G}_{\tilde{x}}(x_1, \tilde{x}) \Big|_{x_1=\varphi(\tilde{x})} \right], \quad (19)$$

где $\tilde{G}(x) \equiv \tilde{G}(x_1, \tilde{x})$, $x_1 \in O x_1$ и $\tilde{x} \in \tilde{H}$.

Пусть $\tilde{T} = (t_{ij})_{i=\overline{2,\infty}, j=\overline{1,\infty}}$ обозначает прямоугольную подматрицу матрицы T , $\tilde{T}^*$ — транспонированная матрица к $\tilde{T}$.

Пользуясь формулой (19) и теоремой о дифференцируемости суперпозиции дифференцируемого и линейного отображения (см. [15], стр. 147), а также тем, что $TG'(y^1) = le_1$, имеем $\varphi''(\tilde{0}) = -l^{-1}\tilde{T}G''(y^1)\tilde{T}^*$. Здесь и ниже произведение надо понимать как композицию соответствующих отображений. Следовательно, $\varphi''(\tilde{0}): \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}$. Мы также имеем $F''(\tilde{0}) = \tilde{T}(A^{-1} - \lambda G''(y^1))\tilde{T}^* - \tilde{A}^{-1}$.

Так как $\tilde{0} \in D(\tilde{A}^{-1})$, мы имеем

$$H''(\tilde{0}) = \frac{1}{2}F''(\tilde{0}) + \frac{1}{2}\tilde{A}^{-1} = \tilde{T}(I - \lambda G''(y^1)A)A^{-1}\tilde{T}^* \quad (20)$$

и $H''(\tilde{0})$ — невырожден (см. конец доказательства Теоремы 1).

56) Вычисление детерминанта $\det(\tilde{I} + F''(\tilde{0})\tilde{A})$. Оператор $F''(\tilde{0})\tilde{A}$ из формулы (17) имеет вид $F''(\tilde{0})\tilde{A} = \tilde{T}R\tilde{T}^* \tilde{A} - \tilde{I}$, где $R = A^{-1} - \lambda G''(y^1) = B_1 A^{-1}$. Оператор R — невырожден, поэтому определен вектор $a = R^{-1}\bar{n}$, где $\bar{n}$ — нормаль, определенная в §2. Пусть $T_a = \begin{pmatrix} a \\ \tilde{T} \end{pmatrix}$. Мы имеем

$$\Delta = T_a R T_a^* = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{0} \\ x & \tilde{T} R \tilde{T}^* \end{pmatrix} \quad (21)$$

здесь вид элементов обозначенных крестиком "x" не важен.

Этот оператор отображает H в H . Его сужение $\Delta A|_{\tilde{H}}$ на $\tilde{H}$ совпадает с $\tilde{T}R\tilde{T}^* \tilde{A}$ и тогда $\Delta A|_{\tilde{H}} = F''(\tilde{0})\tilde{A} + \tilde{I}$. Кроме того, из (21) следует, что

$$\det \Delta A = \sigma_1^2 \det(F''(\tilde{0})\tilde{A} + \tilde{I}). \quad (22)$$

Далее имеем

$$\Delta A - I = T_a A^{-1} (T^{-1} - I) A + (T_a - I) - T_a \lambda G''(y^1) T^{-1} A.$$

Как следует из доказательства Леммы 4, все три оператора ядерные, потому что T_a — ограничен. Итак, оператор $\Delta A - I$ ядерный в H и его сужение $F''(\tilde{0})\tilde{A}$ ядерно в $\tilde{H}$. Поскольку $\Delta A = T_a B_1 A^{-1} T^{-1} A$, то $\det \Delta A = \det T_a \det B_1 \det(A^{-1} T^{-1} A)$, где $\det(A^{-1} T^{-1} A) = 1$ (см. доказательство Леммы 4). Так как $T_a T^{-1} = \begin{pmatrix} \langle a, \bar{n} \rangle & x \\ \tilde{0} & \tilde{T} \end{pmatrix}$, то $\det T_a = \langle a, \bar{n} \rangle$, и поэтому $\det \Delta A = \langle R^{-1}\bar{n}, \bar{n} \rangle \det B_1$.

Принимая во внимание (17) и (22), получаем

$$J_2 = \left(\sqrt{2\pi\lambda u} \right)^{-1} \left| \det B_1 \langle A B_1^{-1} G'(y^1), G'(y^1) \rangle \right|^{-1/2} (1 + O(u^{-2})), \quad u \rightarrow \infty.$$

Используя (14), убеждаемся, что получили главный член асимптотики интеграла J с оценкой остаточного члена, так как пользуясь аналогичными выкладками, можно показать, что $J_3 = O(u^{-2} J_2)$ и $J_4 = O(\exp(-u^2 c) J_2)$, $c > 0$. В самом деле, интеграл J_3 отличается от J_2 наличием множителя

u^{-3} . Интеграл J_4 экспоненциально мал по сравнению с J_2 , так как у него функция аналогичная функции F имеет вид

$$F_1(\bar{x}) = \frac{1}{2} \langle (TA^{-1}T^{-1} - A^{-1})[\delta, \bar{x}], [\delta, \bar{x}] \rangle + \lambda l \delta + (2\sigma_1^2)^{-1} \delta^2$$

и $F_1(\bar{0}) \geq \lambda l \delta > 0$. Отсюда в силу (15) J_4 экспоненциально мало. Наконец, отметим, что в силу (20) имеем $H''(\bar{0}) = \Delta|_{\tilde{H}}$ и невырожденность оператора $H''(\bar{0})$ следует из невырожденности Δ . Теорема 1 полностью доказана.

§6. ДАЛЬНЕЙШИЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ПРИМЕРЫ

Замечание 4. Рассуждения и выкладки использованные при доказательстве Теоремы 1 применимы и к гауссовскому интегралу (1). Асимптотики интегралов типа (1) используются в некоторых задачах статистической физики (см. [8], [20]).

Замечание 5. Пусть выполнены все условия Теоремы 1, кроме условия невырождения оператора B_1 . Пусть в некотором ортонормированном базисе $\{e_i\}_{i=1, \infty}$ гильбертова пространства H мы имеем $G'(y^1) = l e_1$, $l \in \mathbb{R}^1$, $A = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots)$. Тогда вклад точки y^1 в асимптотику вероятности $P_A(u\Omega)$ будет равен

$$\exp \left(-\frac{u^2}{2} \langle A^{-1} y^1, y^1 \rangle \right) \left(u \sqrt{2\pi} \sigma_1 \lambda_1 |l| \right)^{-1} \left| \det \left(\tilde{I} - \lambda_1 \tilde{G}''(y^1) \tilde{A} \right) \right|^{-1/2} \\ (1 + O(u^{-2})), \quad u \rightarrow \infty,$$

при условии необращения в нуль последнего детерминанта. Здесь оператор $\tilde{G}''(y^1)$ получается из матричного представления оператора $G''(y^1)$ вычёркиванием первой строки и первого столбца, так что, если $G''(y^1) = (g_{ij})_{i,j=1, \infty}$, то $\tilde{G}''(y^1) = (g_{ij})_{i,j=2, \infty}$.

Примеры множеств Ω и функции $G(x)$ могут быть самые разнообразные. Укажем некоторые из них.

Пример 1. Пусть $H = l^2$, $G(x) = \|x\|^2 - 1$, $\|x\| = (\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2)^{1/2}$, $A = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots)$, $\sigma_1 > \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots > 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 < \infty$. Тогда как известно (см. [14], стр. 274), что $\inf \left(\frac{1}{2} \langle A^{-1} x, x \rangle : \|x\| \geq 1 \right) = (2\sigma_1^2)^{-1}$ и этот инфимум

достигается в двух точках, $y^1 = (1, 0, 0, \dots)$ и $y^2 = (-1, 0, 0, \dots)$. Простые вычисления дают

$$G'(y^1) = (2, 0, 0, \dots), \quad G''(y^1) = \text{diag}(2, 2, \dots), \quad l = 2, \quad \lambda = (2\sigma_1^2)^{-1}.$$

Вычисления для точки y^2 аналогичны. Здесь операторы B_1, B_2 вырождены, но применимо Замечание 5, использование которого даёт известную формулу Золотарёва (см. [4]) :

$$P_A(\|x\| > u) = \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}\right) u^{-1} \frac{\sqrt{2}\sigma_1}{\sqrt{\pi}} \prod_{i=2}^{\infty} (1 - \sigma_1^{-2}\sigma_i^2)^{-1/2} (1 + O(u^{-2})), \quad u \rightarrow \infty$$

В [4] этот результат получен методом преобразования Лапласа с последующим контурным интегрированием.

Пример 2. Пусть $G(x) = \|x - a\| - 1$, $a \neq 0$. Точные вычисления здесь затруднены из-за наличия более сложной экстремальной задачи. Но подход Теоремы 1 в принципе применим и позволяет найти асимптотику вероятности $P_A(\|x - a\| > u)$, $u \rightarrow \infty$ (ср. с [5]).

Наконец, отметим, что результаты типа Теоремы 1, по-видимому, справедливы и для гауссовских распределений в некоторых банаховых пространствах. Как частный результат такого типа, приведём асимптотику больших отклонений для гауссовского вектора в конечномерном банаховом пространстве l_k^p с нормой $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^k |x_i|^p\right)^{1/p}$, $x = (x_1, \dots, x_k)$.

Теорема 4. Пусть $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ — гауссовский вектор в $\mathbb{R}^k$ со средним нуль и невырожденной ковариационной матрицей $A = (a_{ij})_{i,j=1,k}$. Пусть $z^1, z^2, \dots, z^m$ — точки из множества $Z = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\|_p = 1\}$, в которых достигается минимум : $\min\{\langle A^{-1}x, x \rangle : x \in Z\} = \sigma^{-2} > 0$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$ и $z^i = (z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{ik})$.

i) Если $p > 2$, то имеет место асимптотическое соотношение

$$P\left\{\left(\sum_{i=1}^k |X_i|^p\right)^{1/p} > u\right\} = \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}u} \sqrt{p-2} \sum_{i=1}^m |\det B_i|^{-1/2} (1 + O(u^{-2})), \quad u \rightarrow \infty, \quad (23)$$

где $B_i = I - (p-1)\sigma^{-2}\text{diag}(|z_{i1}|^{p-2}, \dots, |z_{ik}|^{p-2}) A$.

ii) Если $2 > p \geq 1$ и все компоненты z_{ij} векторов z^i ненулевые, то справедлива формула (23).

iii) Если $1 > p > 0$, то $z_{ij} \neq 0$ и верно (23)

Для диагональной матрицы A асимптотика найдена в [21].

ABSTRACT. Let P_A be a mean zero Gaussian measure with covariance operator A on a real Hilbert space H , Ω be a Borelian subset of H , satisfying some restrictions. In the paper the exact asymptotic of $P_A(u\Omega)$, $u \rightarrow \infty$ is found. Also the asymptotic of $P\left\{\left(\sum_{i=1}^k |X_i|^p\right)^{1/p} > u\right\}$, $u \rightarrow \infty$, $p > 1$, is given, where X_i , $i = 1, 2, \dots, k$ are the dependent Gaussian random variables. Research method is new: the asymptotic Laplace method in Hilbert space, the case of boundary maximum point.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин, Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, Наука, Москва, 1979.
2. S. Chevet, "Gaussian measures and large deviations", Lect. Notes Math., vol. 990, pp. 30 - 46, 1983.
3. N. C. Jain, "An introduction to large deviations", Lect. Notes Math., vol. 1153, pp. 273 - 296, 1985.
4. В. М. Золотарёв, "Об одной вероятностной задаче," Теория Вероятн. и её применения, том 6, № 6, стр. 219 - 222, 1961.
5. C. -R. Hwang, "Gaussian measure of large balls in a Hilbert space", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 78, no. 1, pp. 107 - 110, 1980; Proc. Amer. Math. Soc., vol. 94, no. 1, p. 188, 1985.
6. A. Hertle, "On the asymptotic behaviour of Gaussian spherical integrals, Lect. Notes Math., vol. 990, pp. 221 - 234, 1983.
7. М. В. Федорюк, Асимптотика: Интегралы и ряды, Наука, Москва, 1987.
8. R. S. Ellis, J. S. Rosen, "Asymptotic analysis of Gaussian integrals", I, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 273, no. 2, pp. 447 - 481, 1982.
9. Н. Н. Вахания, В. И. Гариеладзе, С. А. Чобанян, Вероятностные распределения в банаховом пространстве, Наука, Москва, 1985.
10. Х.-С. Го, Гауссовские меры в банаховых пространствах, Мир, Москва, 1979.
11. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Теория случайных процессов, том 1, Наука, Москва, 1971.
12. B. S. Rajput, "The support of Gaussian measures on Banach spaces", Теория Вероятностей и её Прим., том 17, № 4, стр. 775 - 782, 1972.
13. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов, Наука, Москва, 1965.

14. А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, Теория экстремальных задач, Наука, Москва, 1974.
15. В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, Оптимальное управление, Москва, 1979.
16. А. В. Скороход, Интегрирование в гильбертовом пространстве, Наука, Москва, 1975.
17. Т. Хида, Броуновское движение, Наука, Москва, 1984.
18. Функциональный Анализ (ред. С. Г. Крейн), Наука, Москва, 1972.
19. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленин, Обобщённые функции, № 4, Некоторые применения гармонического анализа. Оснащённые гильбертовы пространства, Физматгиз, Москва, 1961.
20. В. В. Борзов, "Об асимптотическом поведении функционального гауссова интеграла", Записки Научн. Семина ЛОМИ, том 184, стр. 26 – 36, 1990.
21. В. Р. Фаталов, Ш.-Д. Рихтер, "Гауссовские вероятности больших уклонений для фиксированной или возрастающей размерностей," Изв. Акад. Наук Армении, Математика, том 27, № 1, стр. 1– 16, 1992.
[Английский перевод : Journal of Contemporary Math. Anal. (Armenian Academy of Sciences)], vol. 27, no.1, 1992.

22 Мая 1992

Ереванский государственный университет
Межвузовский научный центр
по прикладным проблемам математики