

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РОЗЫ НАПРАВЛЕНИЙ ПО ФЛАГОВОЙ ПЛОТНОСТИ В $\mathbb{R}^3$

Р. Г. Арамян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 27, № 5, 1992

Пусть $\mathbb{E}$ пространство плоскостей в $\mathbb{R}^3$, μ - трансляционно-инвариантная (Т.И.) мера на $\mathbb{E}$ (с элементом $d\mu = m(d\xi) \times dp$). Мера $m(\cdot)$ называется розой направлений меры μ . Мера μ индуцирует меру на пространстве флагов, которая имеет т.н. флаговую плотность ρ . В работе решена следующая задача. Восстановлена роза направлений меры μ по флаговой плотности ρ . В частности, найдена интегральная формула, позволяющая вычислить значение меры $m(\cdot)$ на сферических областях, ограниченных кусочно-гладкими кривыми.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{E}$ пространство плоскостей в $\mathbb{R}^3$, μ - трансляционно-инвариантная (Т.И.) мера на $\mathbb{E}$ (с элементом $d\mu = m(d\xi) \times dp$). Мера m называется розой направлений меры μ .

По определению, флаг есть пара $f = (g, e)$, где g прямая, содержащая O , а e плоскость, содержащая g (см. [1]). Имеются два эквивалентных описания флага :

$$f = f(\Omega, \Phi) \quad \text{и} \quad f = f(\varphi, \omega),$$

где Ω - пространственное направление g в $\mathbb{R}^3$, Φ - определяет поворот e вокруг g , ω - направление нормали плоскости e , а φ - плоское направление g в e . Мера μ индуцирует меру на пространстве флагов, которая имеет т.н. флаговую плотность (см. [1])

$$\rho(f(\Omega, \Phi)) = \int_{\mathcal{E}_2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega, \Phi) m(d\xi). \quad (0.1)$$

Здесь $f(\Omega, \Phi)$ — флаг, $\alpha(\xi, \Omega, \Phi)$ — угол между g и следом $e_\xi \cap e$, где e_ξ — плоскость с нормалью $\xi \in \mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_2$ — эллиптическая плоскость (см [5]).

В статье решена следующая задача. На пространстве флагов имеется мера с плотностью ρ , индуцированная некоторой мерой μ с помощью (0.1). Требуется найти меру $m(\cdot)$ в терминах ρ . В статье найдена интегральная формула, позволяющая вычислить значение меры $m(\cdot)$ на сферических областях, ограниченных кусочно-гладкими кривыми.

§1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $S^2(O, h)$ — сфера с центром O и радиусом h , для краткости вместо $S^2(O, 1)$ будем писать S^2 . Обозначим через $[A] = \{e \in \mathbb{E} : e \cap A \neq \emptyset\}$, где $A \subset \mathbb{R}^3$. Нам потребуется следующая теорема

Теорема 1. Пусть μ — трансляционно-инвариантная мера. Для любого гладкого выпуклого тела K имеет место следующее флаговое представление

$$\mu([K]) = (2\pi)^{-1} \int_{\partial K} [k_1 \rho(f(s, \varphi_2)) + k_2 \rho(f(s, \varphi_1))] ds, \quad (1.1)$$

где k_i , $i = 1, 2$ — главные нормальные кривизны поверхности ∂K в точке $s \in \partial K$, $f(s, \varphi_i)$ — флаг с плоскостью, касательной к ∂K в точке s и прямой, совпадающей с i -тым главным направлением поверхности ∂K в точке s .

Заметим, что этот результат впервые получен в [2] путем пространственной аппроксимации тела K . Имеются и другие доказательства путем стохастической аппроксимации тела K (см. [3], [5]). Здесь для полноты приведем новое более краткое доказательство.

Доказательство теоремы 1. Сначала докажем (1.1) для опорной функции $H(\xi)$ тела K , т.е. когда $d\mu = \delta_\xi \times d\rho$, где δ_ξ — δ -мера Дирака. В этом случае μ сконцентрировано на параллельных плоскостях с нормалью ξ . Докажем, что в этом случае

$$H(\xi) = (2\pi)^{-1} \int_{\partial K} [k_1 \sin^2 \alpha(\xi, \omega, \varphi_2) + k_2 \sin^2 \alpha(\xi, \omega, \varphi_1)] ds. \quad (1.2)$$

Пусть K_ϕ проекция K на плоскость e_ϕ , которая проходит (или параллельна) через ξ , а ϕ определяет поворот e вокруг ξ . Аппроксимируем K_ϕ многоугольниками (см. Рис. 1).

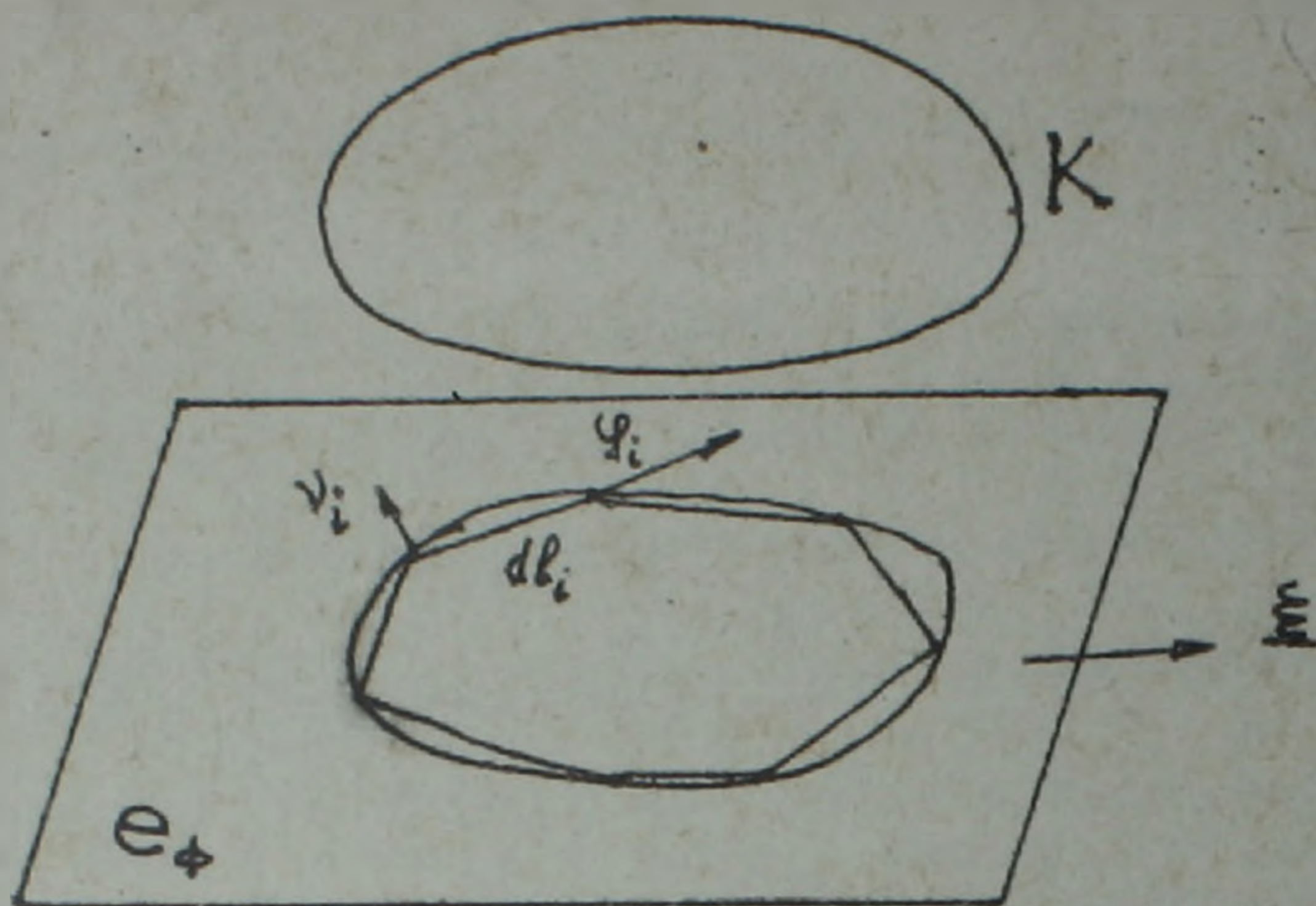


Рис. 1.

Имеем

$$2H(\xi) = 2H_{K_\bullet}(\xi) = \lim \sum_i dl_i |\cos(\xi, \varphi_i)| = \lim \sum_i dl_i \sin(\xi, \nu_i) =$$

$$= \lim \sum_i R(\nu_i) \sin(\xi, \nu_i) d\nu_i = \int_0^\pi R(\nu, \phi) \sin \nu d\nu + \int_0^\pi R(\nu, \phi + \pi) \sin \nu d\nu, \quad (1.3)$$

где dl_i — сторона многоугольника, φ_i — направление dl_i , ν — нормаль к dl_i , а $R(\nu)$ — радиус кривизны в точке ∂K_ϕ с нормалью ν .

Проинтегрировав (1.3) по ϕ , получим

$$2\pi H(\xi) = \int_0^\pi \left[\int_0^\pi R(\nu, \phi) \sin \nu d\nu + \int_0^\pi R(\nu, \phi + \pi) \sin \nu d\nu \right] d\phi =$$

$$= \int_{S^2} R(\xi, \omega) d\omega, \quad (1.4)$$

где $R(\xi, \omega)$ — радиус кривизны в точке на $K_{\xi, \omega}$ с нормалью ω . Здесь $K_{\xi, \omega}$ — проекция K на плоскость, которая параллельна ξ и ω . Это завершает доказательство в частном случае когда $m(\cdot)$ есть δ — мера Дирака, так как имеем (см. [4])

$$R(\xi, \omega) = R_1 \sin^2 \alpha(\xi, \omega, \varphi_1) + R_2 \sin^2 \alpha(\xi, \omega, \varphi_2), \quad ds = R_1 R_2 d\omega,$$

где R_i — главные радиусы кривизны ∂K в точке с нормалью ω .

В общем случае, (1.1) получается после интегрирования (1.2) по $m(\cdot)$.

Теорема доказана.

Пусть $A \subset S^2$ геодезически выпуклое множество, целиком лежащее на некоторой полусфере.

Обозначим через $A_h \subset \mathbb{R}^3$ - выпуклое множество, ограниченное сферой $S^2(O, 1+h)$, касательными плоскостями к сфере S^2 в точках ∂A (граница A) и конической поверхностью с основанием A (см. Рис. 2).

Определение. Флаг f называется опорным флагом к A в точке $l \in \partial A$, если плоскость флага f касается S^2 в точке $l \in \partial A$, а прямая f является опорной к ∂A в l . Если l точка гладкости ∂A , тогда опорный флаг в точке l называется касательным флагом.

Теорема 2. Пусть μ трансляционно инвариантная мера на $\mathbb{E}$ ($d\mu = m(d\xi) \times dp$), $A \subset S^2$ - открытое выпуклое множество, принадлежащее некоторой полусфере. Тогда

$$m(A) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu([A_h]) - \mu([A_0])}{h}. \quad (1.5)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \mu([A_h]) &= \mu([A_0]) + \mu([A_h] \setminus [A_0]) = \mu([A_0]) + \int_{[A_h] \setminus [A_0]} dp m(d\xi) = \\ &= \mu([A_0]) + h\mu(A^h) + \int_{A \setminus A^h} h(\xi) m(d\xi), \end{aligned}$$

где A^h - телесный угол, соответствующий $\partial A_h \cap S^2(O, 1+h)$ (см. Рис. 2).

Здесь $h(\xi)$ результат интегрирования по dp , $0 \leq h(\xi) \leq h$. Ясно, что A^h стремится к A , при $h \rightarrow 0$ (монотонная сходимостъ). Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mu([A_h]) - \mu([A_0])}{h} - m(A) \right| &\leq |\mu(A) - \mu(A^h)| + |h^{-1} \int_{A \setminus A^h} h(\xi) m(d\xi)| \leq \\ &\leq |\mu(A) - \mu(A^h)| + \mu(A \setminus A^h) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $h \rightarrow 0$. Теорема доказана.

Определение. Мы используем также производную $\rho_\phi(f)$:

$$\rho'_\phi(f) = \lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} \frac{\rho(f(\phi + \Delta\phi, \Omega)) - \rho(f(\phi, \Omega))}{\Delta\phi}, \quad (1.4)$$

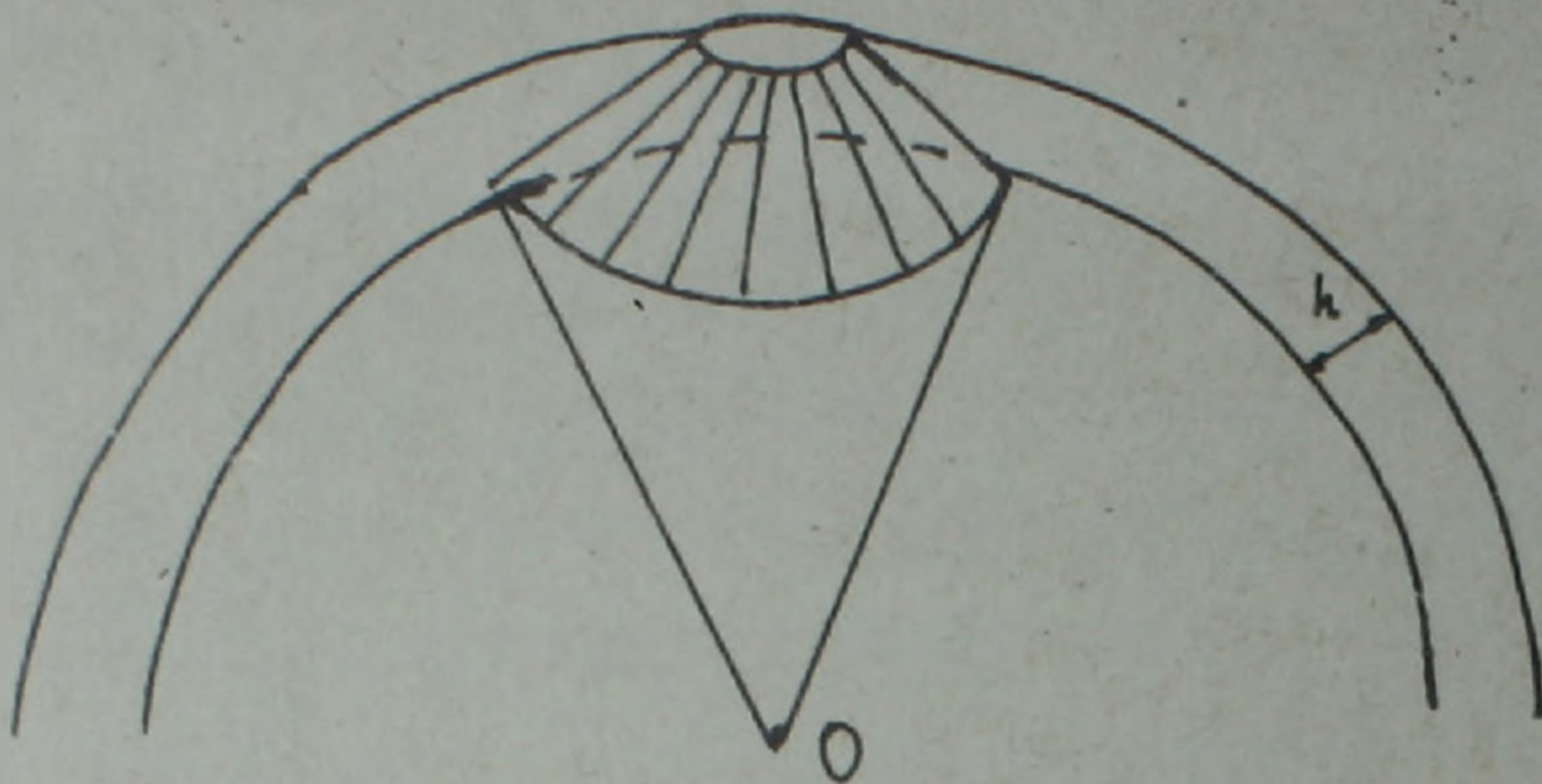


Рис. 2.

которая полностью определена, если для заданного направления Ω указано положительное направление изменения ϕ . Мы рассматриваем ρ' только для опорных флагов некоторых областей. Для заданной области A , при малых $\epsilon \geq 0$ мы определяем флаг $f(\Omega, \phi + \epsilon)$, учитывая условие, что плоскость флага $f(\Omega, \phi + \epsilon)$ не пересекает внутренность A . Это определение остаётся верным и для не выпуклых областей.

M — тотальная мера m .

§2. ЗНАЧЕНИЕ $m(\cdot)$ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИХ СЕГМЕНТОВ

Пусть $A \subset S^2$ — сферический сегмент с центром $Q \in S^2$. Принимая Q как полюс, рассмотрим сферическую координатную систему на S^2 . В частности, если радиус A равен α , то $\partial A = \{(\varphi, \alpha) : 0 \leq \varphi < 2\pi\}$.

Теорема 3. Пусть ρ — флаговая плотность, а $m(\cdot)$ — роза направлений трансляционно инвариантной меры μ в $\mathbb{E}$. Тогда для любого сферического сегмента $A \subset S^2$, имеем

$$m(A) = M - \frac{\cos \alpha}{\pi} \int_0^{2\pi} \rho(f(\varphi, \alpha)) d\varphi - \frac{\sin \alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho'_\phi(f(\varphi, \alpha)) d\varphi, \quad (2.1)$$

где α — радиус A , $f(\varphi, \alpha)$ — касательный флаг к A в точке (φ, α) .

Доказательство. Согласно Теореме 1 нам надо вычислить $\mu([A_h])$ и $\mu([A_o])$. Но A_h и A_o не являются гладкими телами, так что нам надо рассмотреть

$A_h + S^2(O, \epsilon)$ и $A_o + S^2(O, \epsilon)$ (внешнее параллельное множество). Имеем

$$\mu([A_h]) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu([A_h + S^2(O, \epsilon)]), \quad \mu([A_o]) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu([A_o + S^2(O, \epsilon)]). \quad (2.2)$$

Чтобы вычислить $\mu([A_h + S^2(O, \epsilon)])$ с помощью формулы (1.1), разделим поверхность $A_h + S^2(O, \epsilon)$ на области I- VI как это показано на Рис. 3, вычислим соответствующие интегралы по этим областям и просуммируем.

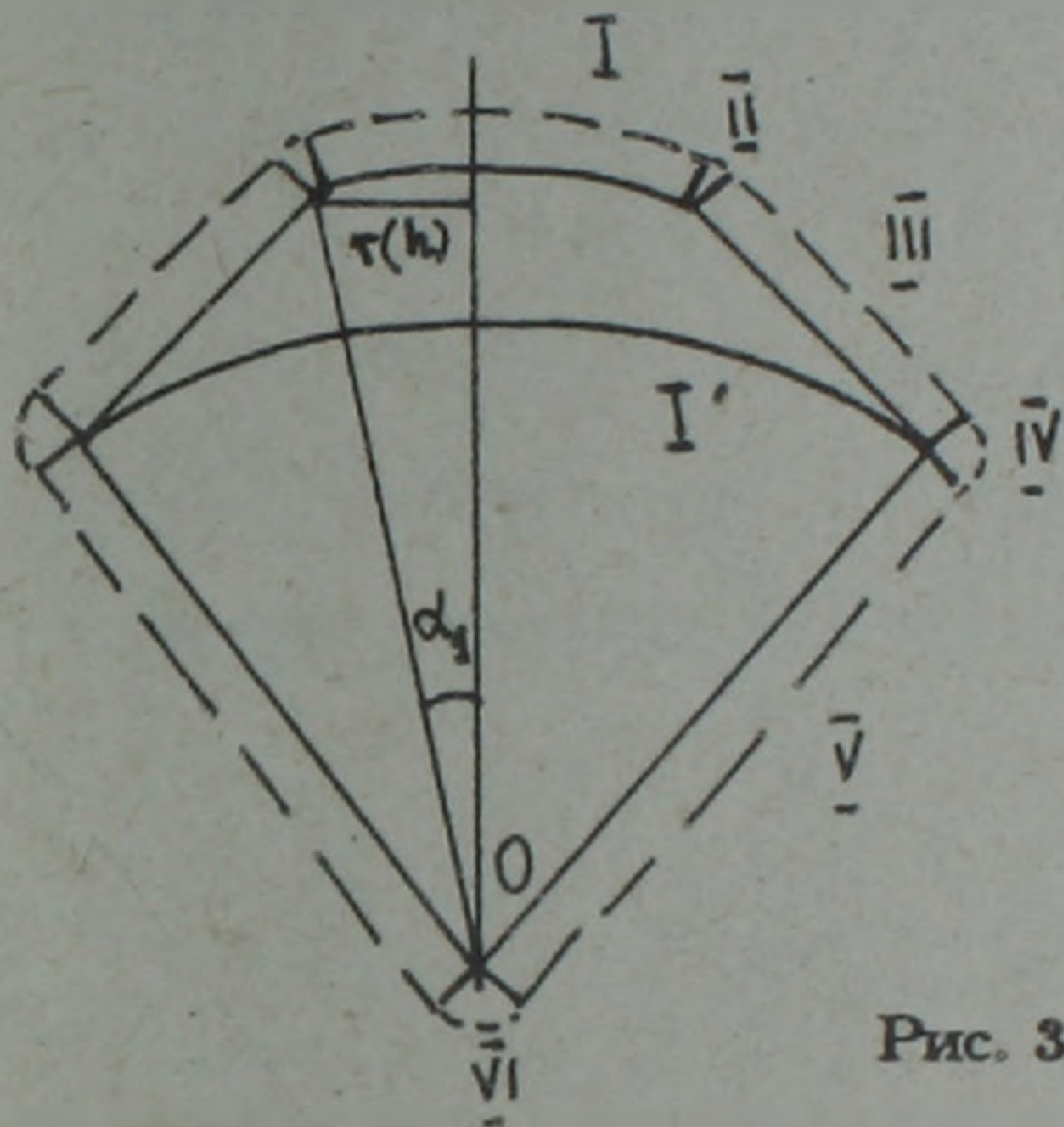


Рис. 3.

а) В любой точке области I, имеем $k_1 = k_2 = (1 + h + \epsilon)^{-1}$. Из (0.1) следует, что

$$\rho(f(s, \varphi_1)) + \rho(f(s, \varphi_2)) = m(\mathcal{E}_2) = M. \quad (2.3)$$

Таким образом, имеем

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_I [k_1 \rho(f(s, \varphi_2)) + k_2 \rho(f(s, \varphi_1))] ds = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{M S(h + \epsilon)}{(1 + h + \epsilon)} = \frac{M S(h)}{1 + h}, \quad (2.4)$$

где $S(h + \epsilon)$ - площадь области I.

б) Область II из себя представляет кусок тора с радиусом осевой окружности $r(h) = (1 + h) \sin \alpha_1$, и с радиусом меридиана — ϵ (см. Рис.

3). Элемент поверхности тора имеет следующее представление

$$ds = \epsilon(r(h) + \epsilon \sin \phi) d\phi d\varphi, \quad (2.5)$$

где φ — определяет положение на осевой окружности (меридиан), а ϕ — определяет положение точки на меридиане. В точке на торе одно главное

направление совпадает с направлением меридиана, и $k_1 = \varepsilon^{-1}$, а другое главное направление перпендикулярно ему, и k_2 ограничена снизу. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{II} [k_1 \rho(f(s, \varphi_2)) + k_2 \rho(f(s, \varphi_1))] ds = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{II} r(h) \rho(f(s, \varphi_2)) d\phi d\varphi = r(h) \int_0^{2\pi} \left[\int_{\phi_1(h)}^{\phi_2(h)} \rho(f(\varphi, \phi)) d\phi \right] d\varphi, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $f(\varphi, \phi)$ - флаг с плоскостью касательной поверхности тора в точке (φ, ϕ) , а прямая флага $f(\varphi, \phi)$ перпендикулярна меридиану. Из Рис. 3 видно, что $\phi_1(h) = \alpha_1$, а $\phi_2(h) = \alpha$.

в) Область III из себя представляет кусок конической поверхности. Точку на этой конической поверхности можно определить параметрами (φ, l) , где φ - определяет образующую, а l - положение точки на ней (см. Рис. 4, l измеряем от O').

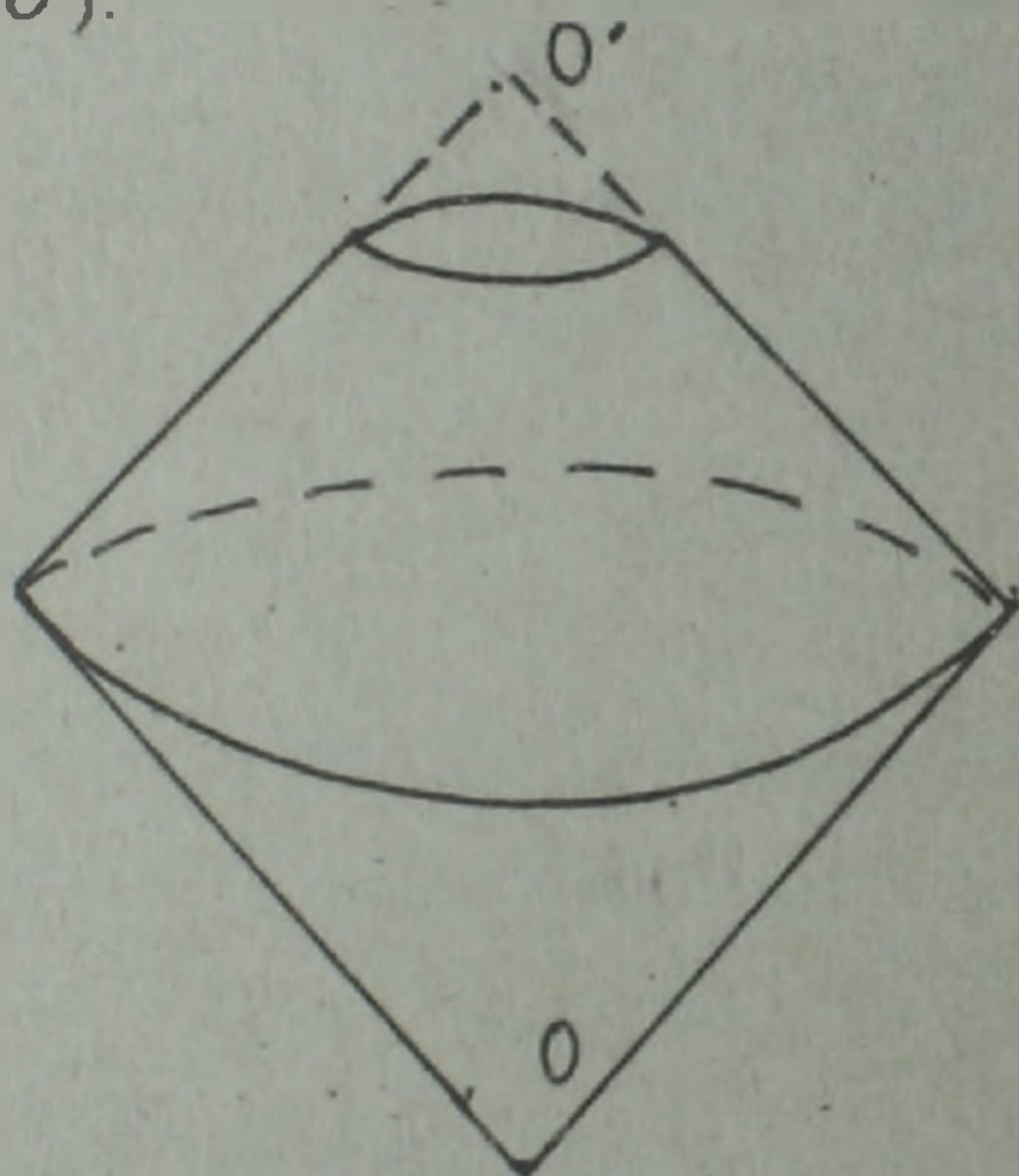


Рис. 4.

В этих координатах

$$ds = l \cos \alpha d\varphi dl. \quad (2.7)$$

На точке с координатами (φ, l) одно главное направление - это направление образующей и по этому направлению $k_1 = 0$. Для другого главного направления $k_2 = \operatorname{tg} \alpha l^{-1}$. Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{III} [k_1 \rho(f(s, \varphi_2)) + k_2 \rho(h(s, \varphi_1))] ds = \sin \alpha \sqrt{2h + h^2} \int_0^{2\pi} \rho(f(\varphi, l)) d\varphi, \quad (2.8)$$

где $f(\varphi, l)$ - флаг, с плоскостью касательной в точке (φ, l) , а прямая совпадает с образующей.

Интегралы по областям IV, V, VI, не будем рассматривать, так как подобные интегралы появляются и при вычислении $\mu([A_0])$, и следовательно, они исчезнут при вычитании.

Аналогично получаем выражение для $\mu([A_0 + S^2(0, \epsilon)])$. Учитывая выше сказанное, достаточно рассматривать только

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{I'} [k_1 \rho(f(s, \varphi_2)) + k_2 \rho(f(s, \varphi_1))] ds = M S(0), \quad (2.9)$$

где I' показано на Рис. 3.

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \mu([A_h]) - \mu([A_0]) &= \frac{M S(h)}{1+h} + r(h) \int_0^{2\pi} \left[\int_{\phi_1(h)}^{\phi_2(h)} \rho(f(\varphi, \phi)) d\phi \right] d\varphi + \\ &+ \sin \alpha \sqrt{2h + h^2} \int_0^{2\pi} \rho(f(\varphi, l)) d\varphi - M S(0). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Теперь рассмотрим предел (1.3). Подставляя выражение для $S(h)$, получаем

$$\begin{aligned} 2\pi m(A) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} [2\pi M(1+h)(1 - \cos \alpha_1) - 2\pi M(1 - \cos \alpha) + \\ &+ (1+h) \sin \alpha_1 \int_0^{2\pi} \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha} \rho(f(\varphi, \phi)) d\phi \right] d\varphi + \sin \alpha \sqrt{2h + h^2} \int_0^{2\pi} \rho(f(\varphi, l)) d\varphi]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

По разложению Тейлора имеем

$$\rho(f(\varphi, \phi)) = \rho(f(\varphi, \alpha)) + \rho'_\alpha(f(\varphi, \alpha))(\phi - \alpha) + o(\phi - \alpha).$$

Из Рис. 3 видно, что

$$\cos \alpha_1 = \cos(\alpha - (\alpha - \alpha_1)) = \cos \alpha (1+h)^{-1} + \sin \alpha (1+h)^{-1} \sqrt{2h + h^2}$$

и

$$(1+h) \sin \alpha_1 = \sin \alpha - \cos \alpha \sqrt{2h + h^2}, \quad (\alpha - \alpha_1) \sim \sin(\alpha - \alpha_1) = (1+h)^{-1} \sqrt{2h + h^2}.$$

Подставляя в (2.11) и используя (2.3), получаем

$$2\pi m(A) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} [2\pi M(h - \sin \alpha \sqrt{2h + h^2}) +$$

$$\begin{aligned}
& +(\sin \alpha - \cos \alpha \sqrt{2h + h^2})(\alpha - \alpha_1) \int_0^{2\pi} \rho(f(\varphi, \alpha)) d\varphi - (\sin \alpha - \cos \alpha \sqrt{2h + h^2}) \times \\
& \times \frac{(\alpha - \alpha_1)^2}{2} \int_0^{2\pi} \rho'_\alpha(f(\varphi, \alpha)) d\varphi + \sqrt{2h + h^2} \sin \alpha \int_0^{2\pi} \rho(f(\varphi, l)) d\varphi \Big\} = \\
& = 2\pi M - 2 \cos \alpha \int_0^{2\pi} \rho(f(\varphi, \alpha)) d\varphi - \sin \alpha \int_0^{2\pi} \rho'_\alpha(f(\varphi, \alpha)) d\varphi.
\end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

§3. ЗНАЧЕНИЕ МЕРЫ $m(\cdot)$ ДЛЯ ЛУНОК

Лунка — часть S^2 , ограниченная двумя большими окружностями. Вершины лунки обозначим через P_1 и P_2 , см. Рис. 5.

Теорема 4. Пусть ρ — флаговая плотность, а $m(\cdot)$ — роза направлений трансляционно-инвариантной меры μ в $\mathbb{E}$. Тогда для любой лунки $A \subset S^2$ имеем

$$m(A) = M - \pi^{-1} \sum_{i=1}^2 \int_{\alpha_i^c} \rho(f(\varphi, P_i)) d\varphi - (2\pi)^{-1} \int_{\partial A} \rho'_\phi(f(l)) dl. \quad (3.1)$$

В первом интеграле α_i^c — внешний угол при вершине P_i , т.е. интегрирование ведется по всем опорным к A флагам в P_i , $f(l)$ — касательный флаг к A в точке $l \in \partial A$.

Доказательство. Рассмотрим следующую сглаженность лунки A . Пусть $A(r) \subset S^2$ сглаженная лунка, т.е. ограничена дугами двух больших окружностей A и двумя маленькими окружностями с радиусом r , расположенными близ вершин лунки A (см. Рис. 5).

Как и в предыдущем случае мы рассмотрим $A_h(r)$ и $A_h(r) + S^2(O, \epsilon)$ (сумму понимаем в смысле Минковского). Разделим поверхность $A_h(r) + S^2(O, \epsilon)$ на области I–VI как это показано на Рис. 5, и согласно (1.1) рассмотрим интегралы по этим областям.

а) Интеграл по I. Этот случай аналогичен случаю а) предыдущего параграфа. Так что из (2.4) имеем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_I [k_1 \rho(f(s, \varphi_2)) + k_2 \rho(f(s, \varphi_1))] ds = \frac{M S(h)}{(1+h)}, \quad (3.2)$$

где $S(h)$ — площадь фигуры $A'B'C'D'$ (см. Рис. 6).

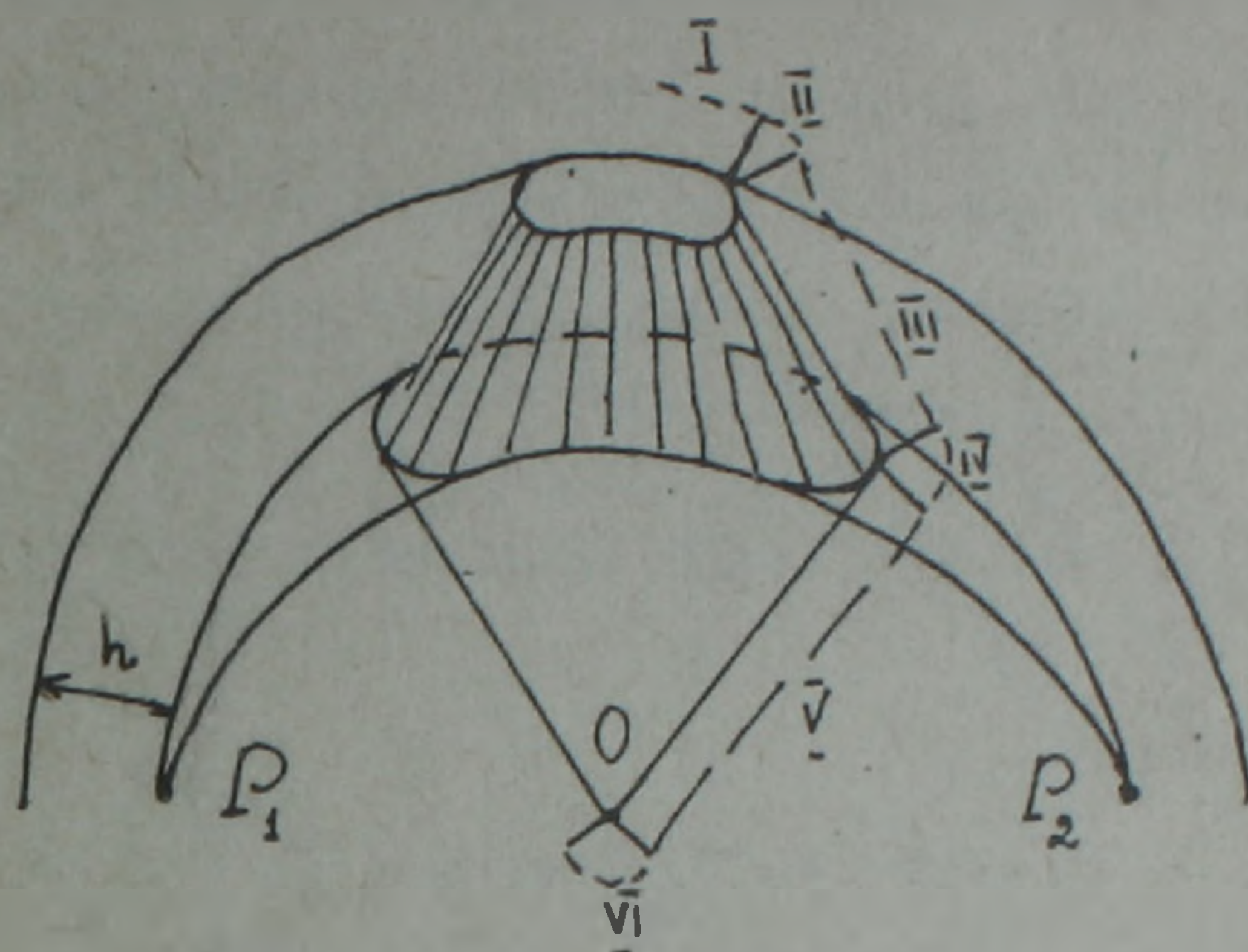


Рис. 5.

б) Область II - это объединение двух тороидальных частей. Осевая окружность для первой части $\{A'B' \cup C'D'\}$, соответствующей дугам $A'B'$ и $C'D'$, имеет радиус 1. Осевая окружность для второй части $\{B'C' \cup D'A'\}$, соответствующей дугам $B'C'$ и $D'A'$ имеет радиус r . На тороидальной части $\{B'C'\}$, соответствующей дуге $B'C'$, ситуация сходна со случаем б) предыдущего параграфа. Так что из (2.6) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\{B'C'\}} [k_1 \rho(f(s, \varphi_2)) + k_2 \rho(f(s, \varphi_1))] ds = \\ = r(h) \int_{B'C'} \left[\int_{\phi_1(h)}^{\phi_2(h)} \rho(f(\varphi, \phi)) d\phi \right] d\varphi, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где (см. Рис. 5)

$$(1+h) \sin \phi_1 = r(h), \quad \cos(\phi_2 - \phi_1) = (1+h)^{-1}, \quad \sin \phi_2 = r.$$

Часть $\{A'B'\}$ отличается от $\{B'C'\}$ тем, что радиус осевой окружности равен 1. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\{A'B'\}} [k_1 \rho(f(s, \varphi_2)) + k_2 \rho(f(s, \varphi_1))] ds = \\ = r(h) \int_{A'B'} \left[\int_{\phi_1^*}^{\phi_2^*} \rho(f(\varphi, \phi)) d\phi \right] d\varphi, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\phi_2^* = \frac{\pi}{2}$, $\sin \phi_1^* = (1+h)^{-1}$

в) Область III есть объединение двух частей : коническая часть $\{BC \cup AD\}$ соответствует дугам $BC \cup AD$, и цилиндрическая часть $\{AB \cup CD\}$. Оба эти случая аналогичны случаю в) предыдущего параграфа. Только в случае $\{AB \cup CD\}$ радиус осевой окружности равен 1, а в случае $\{BC \cup AD\}$ радиус равен r . Из формулы (2.8) имеем

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\{BC\}} [k_1 \rho(f(s, \varphi_2)) + k_2 \rho(f(s, \varphi_1))] ds = r \sqrt{2h + h^2} \int_{BC} \rho(f(\varphi, l)) d\varphi \quad (3.5)$$

и

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\{AB\}} [k_1 \rho(f(s, \varphi_2)) + k_2 \rho(f(s, \varphi_1))] ds = \sqrt{2h + h^2} \int_{AB} \rho(f(\varphi, l)) d\varphi. \quad (3.6)$$

Интегралы по областям IV, V, VI, не будем рассматривать, так как подобные интегралы появляются и при вычислении $\mu([A_o(r)])$, и следовательно, они исчезнут при вычитании.

Аналогично вычисляем $\mu([A_o(r) + S^2(0, \epsilon)])$. Учитывая выше сказанное достаточно рассматривать только

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{I'} [k_1 \rho(f(s, \varphi_2)) + k_2 \rho(f(s, \varphi_1))] ds = M S(0), \quad (3.7)$$

где, область интегрирования I' показано на Рис. 5.

Нам необходимо также вычислить $S(h)$ - площадь фигуры $A'B'C'D'$ (см. Рис.6). Для сферического образа фигуры $ABCD$ на $S^2(O, 1+h)$ имеем

$$S(h) = S_{A'B'C'D'} = S_{A_1B_1C_1D_1} - S_{A_1B_1C_1D_1 \setminus A'B'C'D'}.$$

Заметим, что ширина полосы $A_1B_1C_1D_1 \setminus A'B'C'D'$ постоянна и равна $\arccos(1+h)^{-1}$ (см. (3.4) и (3.5)). Из этих соображений получаем

$$S(h) = (1+h)^2 S(0) - (1+h) L_{AB \cup CD} \sqrt{2h + h^2} - \\ - (1+h)^2 \left[\frac{\sqrt{1-r^2}}{1+h} + \frac{\sqrt{2h + h^2}}{1+h} r - \sqrt{1-r^2} \right] \alpha_{BC \cup AD}, \quad (3.8)$$

где $\alpha_{BC \cup AD}$ - угол соответствующий дугам AD и BC .

Таким образом, из теоремы 1 и из (0.1), (3.2) - (3.8) окончательно получаем

$$2\pi m(A) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \left[\frac{M S(h)}{1+h} + r(h) \int_{B'C' \cup D'A'} \left[\int_{\phi_1}^{\phi_2} \rho(f(\varphi, \phi)) d\phi \right] d\varphi + \right.$$

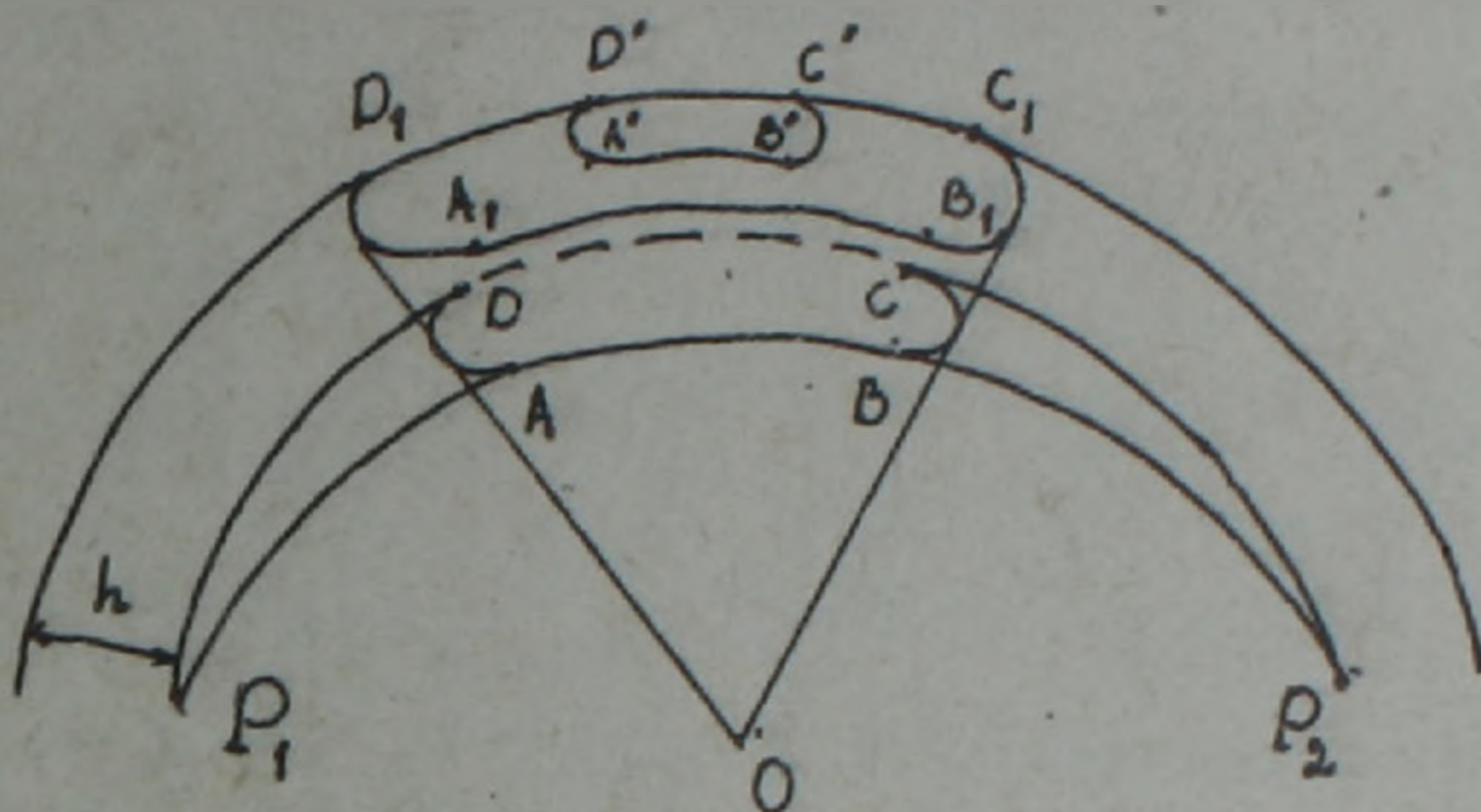


Рис. 6.

$$\begin{aligned}
 & + \int_{A'B'UC'D'} \left[\int_{\phi_1^*}^{\phi_2^*} \rho(f(\varphi, \phi)) d\phi \right] d\varphi + r\sqrt{2h+h^2} \int_{BCUAD} \rho(f(\varphi, l)) d\varphi + \\
 & + \sqrt{2h+h^2} \int_{ABUCD} \rho(f(\varphi, l)) d\varphi - M S(0) \Big] = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} [M h S(0) - \\
 & - M L_{ABUCD} \sqrt{2h+h^2} - M \alpha_{BCUAD} r \sqrt{2h+h^2} + M \alpha_{BCUAD} h \sqrt{1-r^2} + r(h) \times \\
 & \times (\phi_2 - \phi_1) \int_{B'C'UD'A'} \rho(f(\varphi, \alpha)) d\varphi - r(h) \frac{(\phi_2 - \phi_1)^2}{2} \int_{B'C'UD'A'} \rho'_\phi(f(\varphi, \alpha)) d\varphi + \\
 & + (\phi_2^* - \phi_1^*) \int_{A'B'UC'D'} \rho(f(\varphi, \frac{\pi}{2})) d\varphi - \frac{(\phi_2 - \phi_1)^2}{2} \int_{A'B'UC'D'} \rho'_\phi(f(\varphi, \frac{\pi}{2})) d\varphi + \\
 & + r\sqrt{2h+h^2} \int_{BCUAD} \rho(f(\varphi, l)) d\varphi + \sqrt{2h+h^2} \int_{ABUCD} \rho(f(\varphi, l)) d\varphi \Big], \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

где

$$\sin \alpha = r, \quad r(h) = (1+h) \sin \phi_1, \quad \sin \phi_2 = r, \quad \cos(\phi_2 - \phi_1) = (1+h)^{-1},$$

$$\phi_2^* = \frac{\pi}{2}, \quad \sin \phi_1^* = (1+h)^{-1}, \quad \phi_2 - \phi_1 \sim \sqrt{2h+h^2} \sim \phi_2^* - \phi_1^*,$$

$$r(h) = (1+h) \sin(\phi_2 - (\phi_2 - \phi_1)) = r - \sqrt{1-r^2} \sqrt{2h+h^2}.$$

Из (3.9) получаем

$$\begin{aligned}
 2\pi m(A) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} [M h S(0) - M L_{ABUCD} \sqrt{2h+h^2} - M \alpha_{BCUAD} r \sqrt{2h+h^2} + \\
 + M \alpha_{BCUAD} h \sqrt{1-r^2} + r\sqrt{2h+h^2} \int_{B'C'UD'A'} \rho(f(\varphi, \alpha)) d\varphi - \sqrt{1-r^2} (2h+h^2) \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{B'C' \cup D'A'} \rho(f(\varphi, \alpha)) d\varphi - \frac{r(2h + h^2)}{2} \int_{B'C' \cup D'A'} \rho'_\phi(f(\varphi, \alpha)) d\varphi + \\
& + \sqrt{2h + h^2} \int_{A'B' \cup C'D'} \rho(f(\varphi, \frac{\pi}{2})) d\varphi - \frac{2h + h^2}{2} \int_{A'B' \cup C'D'} \rho'_\phi(f(\varphi, \frac{\pi}{2})) d\varphi + \\
& + r\sqrt{2h + h^2} \int_{BC \cup AD} \rho(f(\varphi, l)) d\varphi + \sqrt{2h + h^2} \int_{AB \cup CD} \rho(f(\varphi, l)) d\varphi \Big] = \\
& = M S_0 + M \alpha_{BC \cup AD} \sqrt{1 - r^2} - 2\sqrt{1 - r^2} \int_{BC \cup DA} \rho(f(\varphi, \alpha)) d\varphi - \\
& - r \int_{BC \cup DA} \rho'_\phi(f(\varphi, \alpha)) d\varphi - \int_{AB \cup CD} \rho'_\phi(f(\varphi, \frac{\pi}{2})) d\varphi.
\end{aligned}$$

При $r \rightarrow 0$ получаем, что мера лунки равна :

$$2\pi m(A) = M S_0 + 2M(\pi - \alpha_0) - 2 \sum_{i=1}^2 \int_{\alpha_i^c} \rho(f(\varphi, P_i)) d\varphi - \int_{\partial A} \rho'_\phi(f(l, \frac{\pi}{2})) dl.$$

Учитывая, что $S_0 = 2\alpha_0$ получаем (3.1). Теорема доказана.

§4. ЗНАЧЕНИЕ $m(\cdot)$ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Выпуклый сферический многоугольник - это часть сферы, ограниченная большими окружностями.

Теорема 5. Пусть ρ - флаговая плотность, а m - роза направлений трансляционно инвариантной меры μ в $\mathbb{E}$. Тогда для сферического многоугольника $A \subset S^2$

$$m(A) = M - \pi^{-1} \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i^c} \rho(f(\varphi, P_i)) d\varphi - (2\pi)^{-1} \int_{\partial A} \rho'_\phi(f(l)) dl \quad (4.1)$$

В первом интеграле α_i^c - внешний угол при вершине P_i , т.е. интегрирование ведется по всем опорным к A флагам в P_i , $f(l)$ - касательный флаг к A в точке $l \in \partial A$.

Доказательство. Теорему 5 можно вывести из теоремы 4 комбинаторным способом. Покажем это. Сперва получим (4.1) для сферических треугольников. Пусть τ сферический треугольник и A_1, A_2, A_3 лунки, соответствующие внутренним углам τ .

Непосредственной проверкой можно установить следующее тождество

$$2m(\tau) = m(A_1) + m(A_2) + m(A_3) - M. \quad (4.2)$$

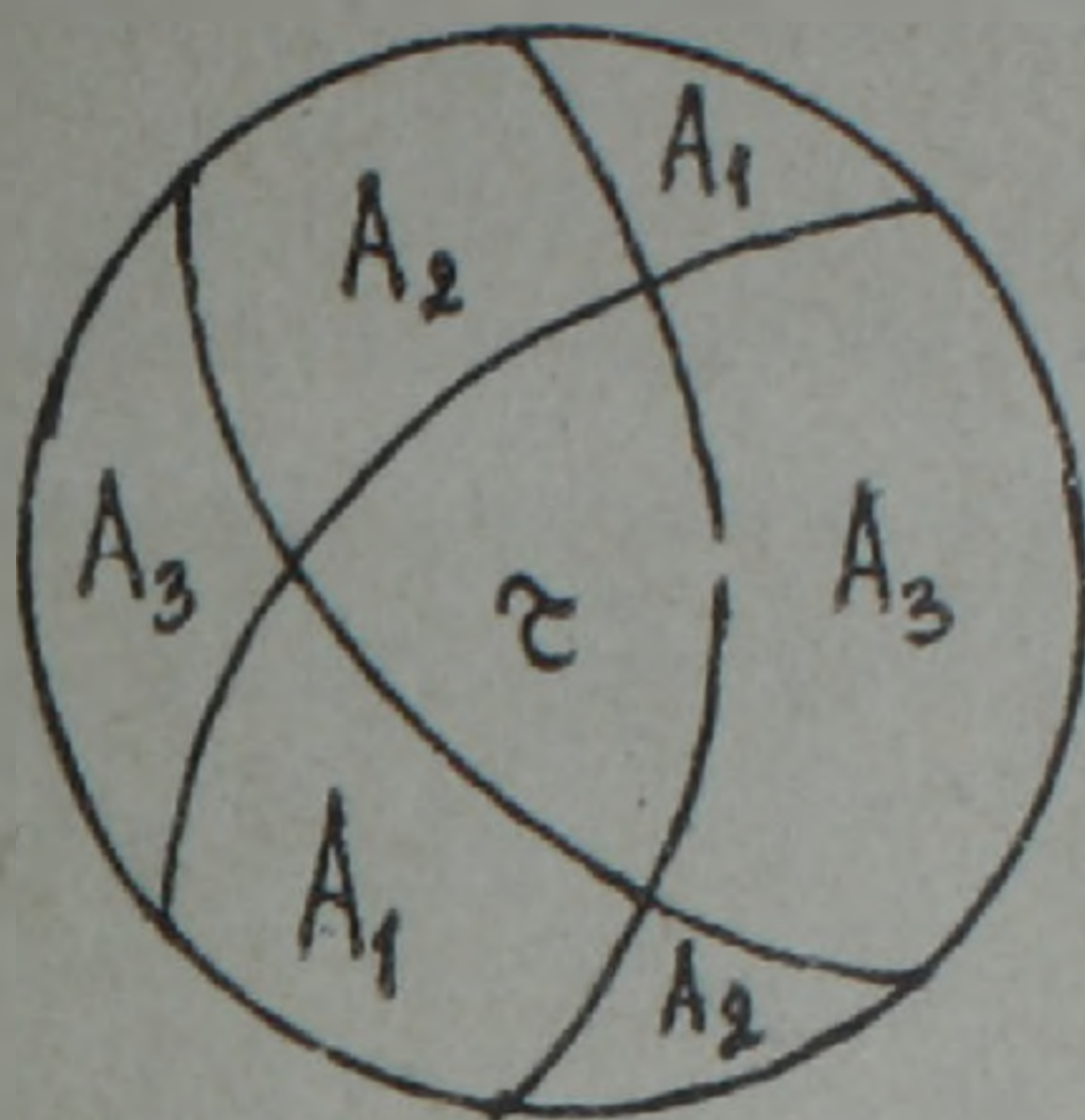


Рис. 7. Моделью эллиптического пространства E_2 может служить сфера S^2 , на которой склеены пары диаметрально противоположных точек.

Запишем выражение (3.1) с помощью интегралов по внутренним углам. Из определения $\rho(f)$ имеем

$$\rho(f(\varphi, P_i)) + \rho(f(\varphi + \frac{\pi}{2}, P_i)) = \int [\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha] m(d\xi) = M. \quad (4.3)$$

С другой стороны

$$\int_{\alpha_i} \rho(f) d\varphi + \int_{\alpha_i^c} \rho(f) d\varphi = \int_0^\pi \rho(f) d\varphi = \frac{\pi}{2} M. \quad (4.4)$$

Следовательно, после соответствующих подстановок в (3.1), получим :

$$m(A_j) = \pi^{-1} \sum_{i=1}^2 \int_{\alpha_i} \rho(f(\varphi, P_i)) d\varphi - (2\pi)^{-1} \int_{\partial A_j} \rho'_\phi(f(l)) dl.$$

Подставим эти выражения в (4.3). Получим интегралы от $\rho(f)$ по углам лунок и интегралы от ρ'_ϕ по границам лунок. По каждой дуге, которая разделяет лунки и не является стороной треугольника, получим по два интеграла от ρ'_ϕ , написанные для этих лунок. Из определения ρ'_ϕ и из Теоремы 3 ясно, что эти подынтегральные выражения различаются только по знакам (так как производная вычисляется по противоположным направлениям). Следовательно, сумма этих интегралов равна нулю. Таким образом, учитывая ещё трансляционную инвариантность μ , получаем

$$2m(\tau) = 2\pi^{-1} \sum_{i=1}^3 \int_{\alpha_i} \rho(f(\varphi, P_i)) d\varphi - \pi^{-1} \int_{\partial \tau} \rho'_\phi(f(l)) dl = M, \quad (4.5)$$

где α_i - внутренний угол τ .

Из формулы (4.5) легко перейти к более общей формуле, верной для сферических многоугольников.

Пусть D — сферический многоугольник, с помощью обычной триангуляции D разбивается на τ_i . Для каждого из треугольников τ_i запишем (4.5). Используя аддитивность соответствующих интегралов суммированием по i , получаем

$$2m(D) = 2\pi^{-1} \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i} \rho(f(\varphi, P_i)) d\varphi - \pi^{-1} \int_{\partial D} \rho'_\phi(f(l)) dl - M(n-2), \quad (4.6)$$

где α_i — внутренние углы D при i -той вершине P_i , n — число сторон многоугольника D . С помощью (4.4), переходя к интегрированию по внешним углам, получаем (4.1). Теорема доказана.

§5. ЗНАЧЕНИЕ $m(\cdot)$ ДЛЯ ОБЩИХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

Теорема 6. Пусть G — сферическая область ограниченная достаточно гладкой кривой γ , ρ — флаговая плотность, а $m(\cdot)$ — роза направлений трансляционно-инвариантной меры μ в $\mathbb{E}$. Тогда

$$m(G) = M - \pi^{-1} \int_{\gamma} \rho(f(l)) \kappa(l) dl - (2\pi)^{-1} \int_{\gamma} \rho'_\phi(f(l)) dl, \quad (5.1)$$

где $f(l)$ — касательный флаг к G в точке $l \in \gamma$, κ — знакопеременная геодезическая кривизна γ в точке $l \in \gamma$ ($\kappa \geq 0$ там, где кривая γ обращена выпуклостью наружу области G , и $\kappa \leq 0$ там, где она обращена выпуклостью внутрь).

Доказательство. Пусть D_n — последовательность выпуклых сферических многоугольников, которая аппроксимирует G . Напишем формулу (4.1) для D_n и используем

$$|\alpha_i^e| \sim \kappa(l) dl.$$

В пределе получим (5.1) что, доказывает теорему в выпуклом случае.

Теперь, пусть G — невыпуклая область. В (4.6), написанной для многоугольников D_n , перейдем к интегралам по внешним углам. В тех вершинах D_n ,

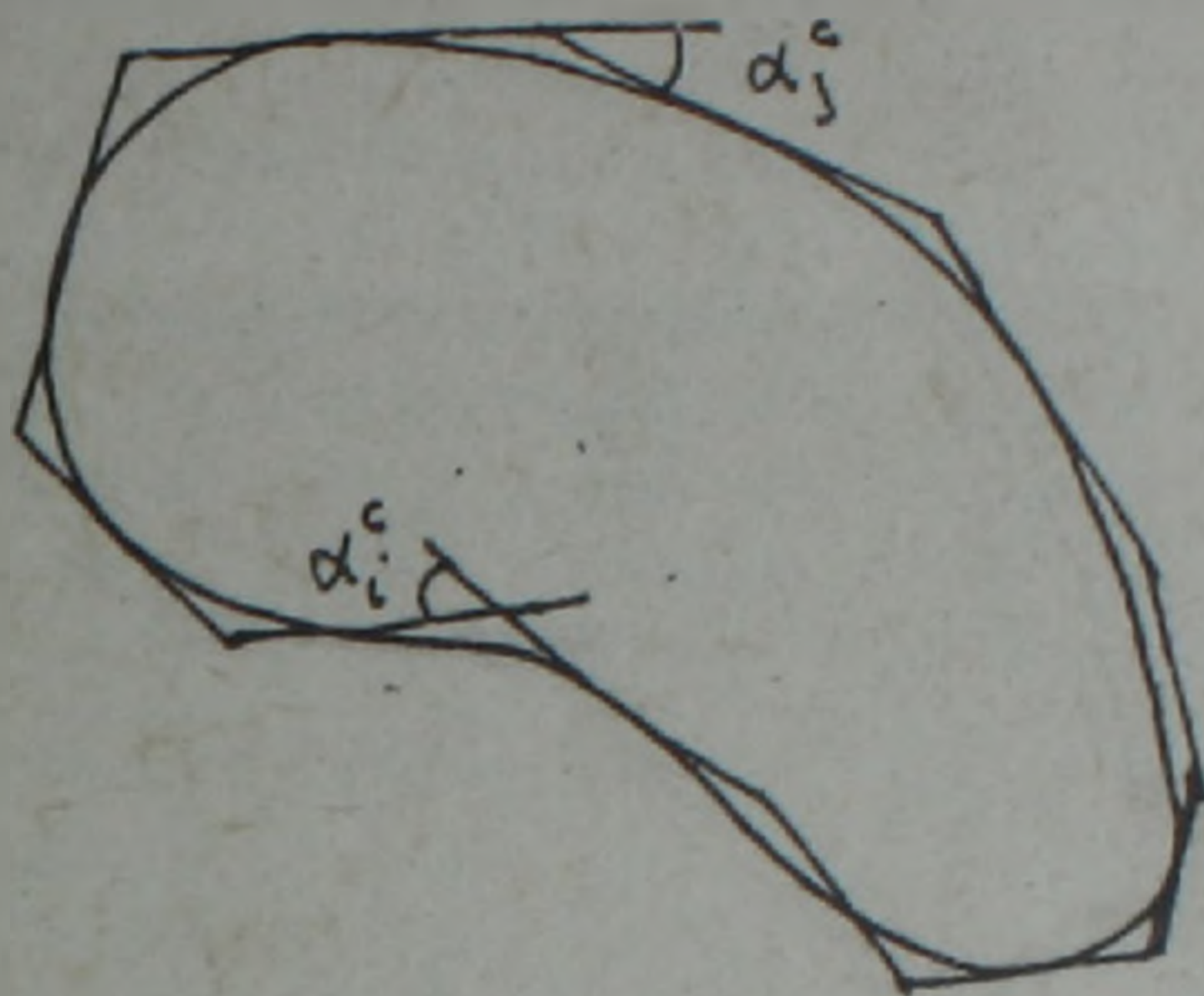


Рис. 8.

которые находятся на части ∂G , обращенной выпуклостью внутрь, имеем (см. Рис. 8)

$$\int_{\alpha_i} \rho(f) d\varphi = \int_0^\pi \rho(f) d\varphi + \int_{\alpha_i^c} \rho(f) d\varphi = \frac{\pi}{2} M - \int_{\alpha_i^c} -\rho(f) d\varphi.$$

Поэтому, при переходе к пределу там, где кривая обращена выпуклостью внутрь, геодезическую кривизну γ будем считать отрицательной. Теорема доказана.

В случае, когда γ - кусочно-гладкая с внутренними углами в точках излома α_i , получаем

$$m(G) = M - \pi^{-1} \int_{\gamma} \rho(f(l)) dl - (2\pi)^{-1} \int_{\gamma} \rho'_\phi(f(l)) dl - \pi^{-1} \sum_i \int_{\alpha_i^c} \rho(f(\varphi, P_i)) d\varphi.$$

Следствие. В случае, когда μ - инвариантная мера, то из формулы (5.1) получается формула Гаусса-Бонне для сферы.

Автор выражает благодарность Р.В.Амбарцумяну за постановку задачи и ценные советы.

ABSTRACT. Let $\mathbb{E}$ be the space of planes in $\mathbb{R}^3$, and μ be a translation invariant measure in $\mathbb{E}$ (with element $d\mu = m(d\xi) \times dp$). The measure $m(\cdot)$ is called the rose of directions of μ . The measure μ induces a family of measure on the space of flags, which has a flag density ρ . The problem which we solve in this article is to express $m(\cdot)$ in terms of ρ . We find certain integral formulas expressing the values of measure $m(\cdot)$ on circles and polygons on the sphere. The result is extended to spherical domains bounded by piecewise smooth curves.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, "Combinatorial integral geometry, metrics and zonoids", Acta Appl. Math., vol.9, 1987.
2. Г. Ю. Панина, "Выпуклые тела и трансляционно-инвариантные меры", Зап. науч. семинаров. Л. отд. Мат. ин-та АН СССР, том 157, 1986.
3. Р. Г. Арамян, "О стохастической аппроксимации выпуклых тел", Изв. АН Армении, Математика [английский перевод : Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of sciences)], том 22, № 5, стр. 427 – 438, 1986.
4. W. Blaschke, Kreis und Kugel, Berlin, 1956.
5. Р. В. Амбарцумян, И. Мекке, Л. Штойян Введение в Стохастическую Геометрию, М., Наука, 1989.

19 Сентября 1992

Институт Математики
Национальной Академии Наук Армении