ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

В. А. Яврян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 27, №. 4, 1992

1. Пусть $\varphi(x, \lambda)$ -решение дифференциальной системы

$$-\varphi'' + v(x)\varphi - \lambda\varphi = 0, \quad \varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h \quad (0 \leq x < l), \quad (1)$$

где v -вещественная функция, $v \in L^1(0, r)$ для любого $0 < r < l$, h -вещественное число.

Неубывающая функция $\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ ($-\infty < \lambda < \infty$, $\tau(-\infty) = 0$) называется спектральной функцией системы (1), если для всякой l -финитной (равной нулю в некоторой левой окрестности точки l) функции $\xi \in L^2(0, l)$ выполняется

$$\int_0^l |\xi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^l \xi(x) \varphi(x, \lambda) dx \right|^2 d\tau(\lambda).$$

Как уточнение известной теоремы Гельфанда-Левитана ([1]), в работе М. Г. Крейна [2] установлена

Теорема 1. Для того, чтобы данная неубывающая функция $\tau(\lambda)$ была спектральной функцией системы (1), для заданной l , необходимо и достаточно, чтобы :

1) функция

$$\Pi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda}t}{\lambda} d\tau(\lambda) \quad (0 \leq t < 2l)$$

была конечной и имела две абсолютно непрерывные производные на любом сегменте $[0, r]$, ($r < 2l$);

$$2) \Pi'(0) = 1,$$

$$3) \limsup_{\rho \rightarrow +\infty} N(\rho) / \sqrt{\rho} \geq 1/\pi,$$

$N(\rho)$ — число точек спектра функции τ в интервале $(0, \rho)$.

Эта теорема впервые была указана М. Г. Крейном в [3]; однако там при её формулировке, как отмечает автор в [2], "по недосмотру было опущено условие 3)". Это условие можно заменить (см., например, [4]) следующим:

3') Если

$$\xi(\lambda) = \int_0^l \xi(t) \cos \sqrt{\lambda t} dt,$$

где $\xi \in L^2(0, l)$ — l -финитная функция и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi(\lambda)|^2 d\tau(\lambda) = 0,$$

то $\xi(t) = 0$.

Цель этой заметки показать, что условие 3') (значит и условие 3)) лишнее, т.е. оно есть следствие условий 1) и 2).

2. Пусть $\Phi(x)$ — вещественная непрерывная функция в интервале $[0, 2l]$, ($0 < l \leq \infty$)

$$f(s, t) = \frac{1}{2} (\Phi(t+s) + \Phi(|t-s|))$$

и такая, что для всякой l -финитной функции $\xi \in L^2(0, l)$ выполняется условие

$$\int_0^l |\xi(t)|^2 dt + \int_0^l \int_0^l f(t, s) \xi(t) \overline{\xi(s)} dt ds \geq 0. \quad (2)$$

Отсюда следует, что

$$(\xi, \eta)_L \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^l \xi(t) \overline{\eta(t)} dt + \int_0^l \int_0^l f(t, s) \xi(t) \overline{\eta(s)} dt ds$$

есть квазискалярное произведение в $L = \{\xi : \xi \in L^2(0, l), \xi \text{ } l\text{-финитна}\}$.

Легко проверить, что оператор

$$A\xi = -\xi'', \quad \xi'(0) = 0$$

симметричен, т.е. $(A\xi, \eta)_1 = (\xi, A\eta)_1$ для любых ξ и η из L , имеющих первую абсолютно непрерывную производную и $\xi'(0) = \eta'(0) = 0$.

Легко проверить, что

$$\Psi(\xi, \lambda) = \int_0^l \xi(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt, \quad \xi \in L$$

есть направляющий функционал для оператора A , т.е. уравнение

$$(A - \lambda I)\xi = \eta$$

имеет решение в том и только в том случае, когда $\Psi(\eta, \lambda) = 0$. Поэтому из теоремы М. Г. Крейна ([5], [6]) следует, что существует неубывающая функция $\tau(\lambda)$, $(-\infty < \lambda < \infty)$ такая, что для любой функции $\xi \in L$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^l \xi(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \right|^2 d\tau(\lambda) = \int_0^l |\xi(t)|^2 dt + \int_0^l \int_0^l f(t, s) \xi(t) \overline{\xi(s)} dt ds. \quad (3)$$

Лемма. Однородное интегральное уравнение

$$\xi(t) + \int_0^r f(t, s) \xi(s) ds = 0 \quad (0 \leq t \leq r < l) \quad (4)$$

при любом r ($0 < r < l$) имеет только тривиальное решение.

Доказательство Пусть $\xi_0(t)$ ($0 \leq t \leq r_0 < l$) - решение уравнения (4) при

$r = r_0$. Пусть $r_0 < r < l$ и

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi_0(t), & \text{для } 0 \leq t \leq r_0 \\ 0, & \text{для } r_0 \leq t \leq r. \end{cases}$$

Тогда из (3) следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^r \xi(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \right|^2 d\tau(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^{r_0} \xi_0(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \right|^2 d\tau(\lambda) = 0.$$

Отсюда вытекает, что при любом $0 < \delta < r - r_0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \cos \sqrt{\lambda} \delta \int_0^r \xi(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \right|^2 d\tau(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^r \xi_\delta(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \right|^2 d\tau(\lambda) = 0,$$

где

$$\xi_\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\xi(t + \delta) + \xi(|t - \delta|)), & \text{для } 0 \leq t \leq r_0 + \delta \\ 0, & \text{для } r_0 + \delta \leq t \leq r. \end{cases}$$

Следовательно, из (3) получаем, что

$$\int_0^r |\xi_\delta(t)|^2 dt + \int_0^r \int_0^r f(t, s) \xi_\delta(t) \overline{\xi_\delta(s)} dt ds = 0.$$

Отсюда, учитывая (2) следует, что функции $\xi_\delta(t)$ удовлетворяют уравнению

(4). Если предположить что $\xi_0 \in L^2(0, r)$ ненулевая, то получаем, что

$$\xi(\lambda) = \int_0^r \xi(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \neq 0.$$

В этом случае для любых $0 < \delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_n < r - r_0$ система функций

$\{\xi_{\delta_k}\}$ будет линейно независимой. Действительно, из

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_{\delta_k}(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq r$$

следует, что

$$\xi(\lambda) \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos \delta_k \sqrt{\lambda} = 0$$

для любого $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Отсюда

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \cos \delta_k \sqrt{\lambda} = 0$$

для любого λ , и следовательно, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Таким образом, из $\xi_0 \neq 0$ в $L^2(0, r_0)$ следует, что однородное уравнение (4)

имеет бесконечное число линейно независимых решений, что невозможно.

Теорема. Для того, чтобы данная неубывающая функция $\tau(\lambda)$ ($-\infty < \lambda < \infty$) была спектральной функцией некоторой системы (1), где l ($0 < l \leq \infty$) задано, достаточно выполнение условий 1) и 2) теоремы 1.

Доказательство. Как известно ([4]), условие 3' (или 3)) равносильно тому, что уравнение (4), где

$$f(t, s) = \frac{1}{2} (\Pi''(t + s) + \Pi''(|t - s|)), \quad (5)$$

при любом $0 < \tau < l$ не имеет нетривиального решения. Поэтому согласно лемме, достаточно проверить условие (2). Последнее следует из легко проверяемого соотношения

$$\begin{aligned} 2 \int_0^l \xi^2(t) dt + \int_0^l \int_0^l (\Pi''(t + s) + \Pi''(|t - s|)) \xi(t) \xi(s) dt ds = \\ = \int_0^l \int_0^l (\Pi(t + s) - \Pi(|t - s|)) \xi'(t) \xi'(s) dt ds \geq 0. \end{aligned}$$

Отметим, что эта теорема при $l = \infty$ приведена в монографии В. А. Марченко ([7], стр. 117). Её доказательство основано на известной асимптотической формуле для спектральной функции, установленной Б. М. Левитаном и В. А. Марченко.

Заметим также, что функции $\tau(\lambda)$, фигурирующие в теореме 1 и соотношении (3) при (5), совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, "Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции", Изв. АН. СССР, сер. математика, 15, стр. 309 – 360, 1951.
2. М. Г. Крейн, "О континуальном аналоге одной формулы Кристоффеля из теории ортогональных многочленов", ДАН. СССР, том 113, № 5, стр. 970 – 973, 1957.
3. М. Г. Крейн, "О переходной функции одномерной краевой задачи второго порядка", ДАН. СССР, том 88 № 3, стр. 405 – 408, 1953.
4. Б. М. Левитан, Обратные задачи Штурма–Лиувилля, Изд. Наука, Москва, 1984.
5. М. Г. Крейн, "Об одном методе разложения положительно-определенных ядер на элементарные произведения", ДАН. СССР, том 53, № 1, стр. 3–6, 1946.
6. Н. И. Ахиезер, Классическая Проблема Моментов, Изд. ФМ, М., 1961.
7. В. А. Марченко, Спектральная Теория Операторов Штурма–Лиувилля, Киев, 1972.