КОНСТРУКТИВНОЕ ОПИСАНИЕ КОНЕЧНОПОРОЖДЕННЫХ ИДЕАЛОВ В АЛГЕБРАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ, ГЛАДКИХ ВПЛОТЬ ДО ЕГО ГРАНИЦЫ

Ф. А. Шамоян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 27, №. 4, 1992

Пусть ω – функция типа модуля непрерывности, т.е. неотрицательная, монотонно возрастающая функция удовлетворяющая условию Зигмунда $\int_0^\delta \frac{\omega(u)}{u}\,du = o(\omega(\delta))$, $\quad \delta \to 0$. В статье рассматриваются конечнопорожденные идеалы в алгебре голоморфных в единичном круге функций f, для которых $|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \le C_f\omega(|\xi_1 - \xi_2|)$, $\quad |\xi_1|, |\xi_2| \le 1$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости, Γ – его граница, ω – функция типа модуля непрерывности, т.е. неотрицательная, полуаддитивная, монотонно возрастающая функция на $(0, +\infty)$. Обозначим через Λ^a_ω класс голоморфных в D функций f, для которых

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \le C_f\omega(|\xi_1 - \xi_2|), \quad \xi_1, \xi_2 \in \bar{D}.$$

Здесь и в дальнейшем $C_{\alpha,\dots}$ означает положительное число, зависящее только от $\alpha, \dots$.

В настоящей статье мы будем предполагать, что ω удовлетворяет известному условию Зигмунда, т.е.

$$\int_0^\delta \frac{\omega(u)}{u}\,du \le C\omega(\delta), \quad 0 < \delta < 1. \tag{1}$$

Введем в Λ^a_ω норму

$$\|f\|_{\Lambda^a_\omega} = \|f\|_\infty + \sup_{\xi_1,\xi_2 \in D}\left\{\frac{|f(\xi_1) - f(\xi_2)|}{\omega(|\xi_1 - \xi_2|)}\right\}. \tag{2}$$

Легко видеть, что относительно поточечного умножения и сложения Λ^a_ω является банаховой алгеброй. Из общей теории банаховых алгебр можно вывести следующее обобщение теоремы Карлесона о короне [1]. Если функции $f_1, f_2, ..., f_n \in \Lambda^a_\omega$ не имеют общих нулей в замыкании $\bar{D}$ единичного круга, то найдутся такие функции $h_1, h_2, ..., h_n \in \Lambda^a_\omega$, что

$$f_1h_1 + f_2h_2 + \cdots + f_nh_n = 1.$$

Однако общая теория не позволяет явно построить множители h_j, $1 \le j \le n$ и оценить их. Мы выпишем формулы, выражающие h_j через данные f_j. Эти формулы позволяют дать некоторый ответ на следующий, более общий вопрос : какие функции g принадлежат идеалу, порожденному в алгебре Λ^a_ω данными функциями $f_1, f_2, ..., f_n$? Иначе говоря, какие функции g из Λ^a_ω представимы в виде

$$g = f_1h_1 + f_2h_2 + \cdots + f_nh_n, \quad h_k \in \Lambda^a_\omega, \quad 1 \le k \le n? \tag{3}$$

Для этого, очевидно, необходимо, чтобы

$$|g(\xi)| \le C(|f_1(\xi)| + \cdots + |f_n(\xi)|), \quad \xi \in D. \tag{4}$$

Однако мы приведем примеры, показывающие, что не только (4), но и оценки

$$|g(\xi)| \le C\left(|f_1(\xi)|^2 + \cdots + |f_n(\xi)|^2\right), \quad \xi \in D \tag{5}$$

недостаточно для представимости функции $g \in \Lambda^a_\omega$ в виде (3). Тем не менее, справедлива следующая

Теорема 1. *Если функции $g, f_1, ..., f_n \in \Lambda^a_\omega$ удовлетворяют условию (5) и $||g||_{\Lambda^a_\omega} \le 1$, $||f_j||_{\Lambda^a_\omega} \le 1$, $1 \le j \le n$ то найдутся функции $h_1, ..., h_n \in \Lambda^a_\omega$, такие что*

$$g^2(\xi) = f_1(\xi)h_1(\xi) + f_2(\xi)h_2(\xi) + \cdots + f_n(\xi)h_n(\xi), \quad \xi \in D. \tag{6}$$

При этом

$$\max_{1\le j\le n} ||h_j||_{\Lambda^a_\omega} \le \text{const}\, ||\frac{g}{S}||_\infty, \tag{7}$$

где

$$S(\xi) = |f_1(\xi)|^2 + |f_2(\xi)|^2 + \cdots + |f_n(\xi)|^2. \tag{8}$$

Подчеркнем, что функции h_j, участвующие в (6), выражаются явно через g и $f_1, \ldots, f_n$ (см. Лемму 2). Это построение подсказано "схемой Хёрмандера", сводящей проблему короны к $\overline{\partial}$ проблеме [2]. Эта последняя решается с помощью модификации известной формулы М. Джрбашяна [3].

§1 настоящей статьи посвящен доказательству вспомогательных утверждений, §2 – доказательству Теоремы 1 и ее точности. В §3 мы докажем некоторый аналог Теоремы 1 для случая высших производных. Отметим также, что часть результатов этой работы ранее была анонсирована в заметке [4].

§1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Перейдем к доказательству вспомогательных утверждений, применяемых при доказательстве Теоремы 1. Здесь мы получим некоторое обобщение интегральных представлений классов Джрбашяна A^p_α. Пусть $A(D)$ означает класс всех аналитичных в D функций. Следуя Джрбашяну [3], обозначим через $A^p(\alpha)$, $-1 < \alpha < \infty$, $0 < p < \infty$ следующий класс функций :

$$A^p(\alpha) = \left\{ f \in A(D) : \|f\|_{A^p(\alpha)} \stackrel{def}{=} \left(\int_D |f(\xi)|^p (1 - |\xi|^2)^\alpha \, dm_2(\xi) \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

где dm_2 – плоская мера Лебега.

По теореме М. М. Джрбашяна каждая $f \in A^p(\alpha)$, $p \geq 1$ допускает интегральное представление :

$$f(z) = \frac{\alpha + 1}{\pi} \int_D \frac{(1 - |\xi|^2)^\alpha f(\xi) \, dm_2(\xi)}{(1 - \bar{\xi} z)^{\alpha + 2}}, \quad z \in D.$$

Следующая лемма непосредственно следует из этой формулы (см. [4], [5]). Для полноты изложения приведем её доказательство.

Лемма 1. *Если h – функция класса $C^1(D)$ и grad h суммируем на D, то при $\alpha > -1$ имеет место представление :*

$$h(z) = \frac{\alpha + 1}{\pi} \int_D \frac{(1 - |\xi|^2)^\alpha h(\xi)}{(1 - \bar{\xi} z)^{\alpha + 2}} \, dm_2(\xi) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_D \frac{(1 - |\xi|^2)^{\alpha + 1} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} h(\xi)}{(1 - \bar{\xi} z)^{\alpha + 1} (z - \xi)} \, dm_2(\xi), \quad z \in D. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $h \in C^1(D)$ и grad $h \in L^1(D, dm_2)$. Положим

$$f_h(z) = \frac{\alpha+1}{\pi}\int_D \frac{(1-|\xi|^2)^\alpha h(\xi)}{(1-\bar{\xi}z)^{\alpha+2}}\, dm_2(\xi), \quad z \in D.$$

Воспользовавшись равенством

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int_D \frac{(1-|\xi|^2)^\alpha}{(1-\bar{\xi}z)^{\alpha+2}}\, dm_2(\xi) = 1,$$

мы получим

$$f_h(z) - h(z) = \frac{\alpha+1}{\pi}\int_D \frac{(1-|\xi|^2)^\alpha (h(\xi)-h(z))}{(1-\bar{\xi}z)^{\alpha+2}}\, dm_2(\xi). \tag{10}$$

Теперь заметим, что

$$\frac{\alpha+1}{(1-\bar{\xi}z)^{\alpha+2}}(1-|\xi|^2)^\alpha = \frac{1}{z-\xi}\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1}.$$

Поэтому из (10) получаем

$$f_h(z) - h(z) = \frac{1}{\pi}\int_D \frac{h(\xi)-h(z)}{z-\xi}\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1} dm_2(\xi) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_D \frac{\partial}{\partial\bar{\xi}}\left[(h(\xi)-h(z))\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1}\right]\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_D \left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1}\frac{\partial h}{\partial\bar{\xi}}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}.$$

Рассмотрим первый интеграл. Для $\psi \in C^1(D)$ имеем по формуле Помпейю [6]

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi}\int_D \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\xi}}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi(\xi)}{z-\xi}\, d\xi.$$

Положим в этом равенстве

$$\psi_z(\xi) = (h(\xi)-h(z))\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1}$$

и учитывая, что $\psi_z(z) = \psi_z(e^{i\theta}) = 0$, получим

$$f_h(z) - h(z) = -\frac{1}{\pi}\int_D \left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1}\frac{\partial h}{\partial\bar{\xi}}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}.$$

Отсюда непосредственно следует (9). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть функции $g, f_1, f_2, \ldots, f_n$ принадлежат Λ^a_ω. Тогда функции*

$$h_k(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{m=1}^{n} \frac{f_m(z)}{\pi} \int_D S^{-2}(\xi)[\overline{f'_m(\xi) f_k(\xi)} - \overline{f'_k(\xi) f_m(\xi)}] g^2(\xi) \times$$

$$\times \left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi} z}\right)^{\alpha+1} \frac{dm_2(\xi)}{z-\xi} + \frac{\overline{f_k(z)} g^2(z)}{S(z)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n; \quad z \in D \qquad (*)$$

аналитичны в D и удовлетворяют уравнению (6).

Доказательство. Сначала докажем, что $h_k \in A(D)$. Имеем по Лемме 1

$$\frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}} = \frac{g^2(z)}{S^2(z)} \left[\overline{f'_k}(z) \sum_{m=1}^{n} |f_m(z)|^2 - \overline{f_k}(z) \sum_{m=1}^{n} \overline{f'_m}(z) f_m(z)\right] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} f_m(z) [\overline{f'_m}(z) \overline{f_k}(z) - \overline{f'_k(z) f_m(z)}] \frac{g^2(z)}{S^2(z)}.$$

Из этого равенства следует, что $\dfrac{\partial h_k}{\partial \bar{z}} = 0$, $1 \le k \le n$, т.е. $h_k \in A(D)$. Первое утверждение леммы коказано. Перейдем к доказательству второго утверждения. Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} f_k h_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{f_k f_m}{\pi} \int_D S^{-2}(\xi)[\overline{f'_m(\xi) f_k(\xi)} - \overline{f'_k(\xi) f_m(\xi)}] g^2(\xi) \times$$

$$\times \left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi} z}\right)^{\alpha+1} \frac{dm_2(\xi)}{z-\xi} + \frac{g^2}{S^2} \sum_{m=1}^{n} |f_m(z)|^2 = g^2.$$

Лемма 2 доказана.

Следующую лемму можно вывести из результатов работы [7].

Лемма 3. *Пусть $f \in \Lambda^a_\omega$, где ω удовлетворяет условию (1). Тогда имеет место оценка*

$$|f'(z)| \le C_f \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z \in D. \qquad (11)$$

И обратно, если $f \in A(D)$ и f' удовлетворяет оценке (11), то $f \in \Lambda^a_\omega$.

Лемма 4. *Если $\|f_m\|_{\Lambda^a_\omega} \le 1$, $1 \le m \le n$ и $\|g\|_{\Lambda^a_\omega} \le 1$, то*

$$\|h_k\|_\infty \le \mathrm{const}\, \|g^2 S^{-3/2}\|_\infty.$$

Доказательство. Из (*) имеем

$$|h_k(z)| \le \sum_{m=1}^{n} \frac{|f_m(z)|}{\pi} \int_D S^{-2}(\xi)|z-\xi|^{-1}|f'_m(\xi)f_k(\xi) - f'_k(\xi)f_m(\xi)|\,|g^2(\xi)|\times$$

$$\times \left|\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right|^{\alpha+1} dm_2(\xi) + \|g^2S^{-3/2}\|_\infty \le$$

$$\le \|g^2S^{-3/2}\|_\infty \left[1 + \sum_{m=1}^{n} \int_D |z-\xi|^{-1}[|f'_m(\xi)| + |f'_k(\xi)|] \left|\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right|^{\alpha+1} dm_2(\xi)\right].$$

Отсюда, используя Лемму 3, получаем

$$|h_k(z)| \le \|g^2S^{-3/2}\|_\infty \times$$

$$\times \left[1 + \sum_{m=1}^{n} (\|f_m\|_{\Lambda^\omega_\alpha} + \|f_k\|_{\Lambda^\omega_\alpha}) \int_D \frac{\omega(1-|\xi|)(1-|\xi|^2)^\alpha}{|1-\bar{\xi}z|^{\alpha+1}|z-\xi|} dm_2(\xi)\right].$$

Приступим к оценке интеграла

$$I = \int_D \frac{\omega(1-|\xi|)(1-|\xi|^2)^\alpha}{|1-\bar{\xi}z|^{\alpha+1}|z-\xi|} dm_2(\xi) =$$

$$= \int_0^1 \omega(1-\rho)(1-\rho^2)^\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho\, d\rho\, d\varphi}{|1-\rho re^{i(\theta-\varphi)}|^{\alpha+1}|\rho e^{i\varphi} - re^{i\theta}|}. \tag{12}$$

Внутренний интеграл оценим следующим образом. Разобьем область интегрирования на две части : $|\varphi| < |\rho - r|$ и $|\varphi| \ge |\rho - r|$. Имеем

$$\int_{|\varphi|<|\rho-r|} [(1-\rho r)^2 + 4r\rho\sin^2\varphi/2]^{-\frac{\alpha+1}{2}}[(\rho-r)^2 + 4r\rho\sin^2\varphi/2]^{-\frac{1}{2}} d\varphi \le$$

$$\le (1-\rho r)^{-\alpha-1} \int_{|\varphi|<|\rho-r|} [(\rho-r)^2 + 4r\rho\sin^2\varphi/2]^{-\frac{1}{2}} d\varphi \le \frac{\text{const}}{(1-\rho r)^{\alpha+1}} \tag{13}$$

и

$$\int_{|\varphi|\ge|\rho-r|} |1-\rho re^{i\varphi}|^{-\alpha-1}|r-\rho e^{i\varphi}|^{-1} d\varphi \le \frac{\text{const}}{(1-\rho r)^{\alpha+1}} \log\frac{1}{|\rho-r|}. \tag{14}$$

Таким образом, учитывая (13) и (14), получаем

$$I \le C \int_0^1 \omega(1-\rho)(1-\rho^2)^\alpha(1-r\rho)^{-\alpha-1}\left(1 + \log\frac{1}{|\rho-r|}\right) d\rho \le$$

$$\le C\left(\int_0^1 \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho} d\rho + \int_0^1 \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho} \log\frac{1}{|\rho-r|} d\rho\right) =$$

$$= C\left(\int_0^1 \frac{\omega(u)}{u} du + \int_0^1 \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho} \log\frac{1}{|\rho-r|} d\rho\right).$$

Первый интеграл сходится ввиду условия (1). Оценим второй интеграл :

$$\int_0^1 \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho}\log\frac{1}{|\rho-r|}\,d\rho = \int_0^r \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho}\log\frac{1}{r-\rho}\,d\rho + \int_r^1 \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho}\log\frac{1}{\rho-r}\,d\rho.$$

$$\int_0^r \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho}\log\frac{1}{r-\rho}\,d\rho = \int_{1-r}^1 \frac{\omega(t)}{t}\log\frac{1}{t-(1-r)}\,dt.$$

Легко видеть, что

$$\int_{1-r}^{2(1-r)} \frac{\omega(t)}{t}\log\frac{1}{t-(1-r)}\,dt \le C_o\omega(1-r)\log\frac{1}{1-r}. \tag{15}$$

и

$$\int_{2(1-r)}^1 \frac{\omega(t)}{t}\log\frac{1}{t-(1-r)}\,dt \le \int_{2(1-r)}^1 \frac{\omega(t)}{t}\log\frac{2}{t}\,dt \le$$

$$\le C\log\frac{2}{1-r}\int_0^{2(1-r)} \frac{\omega(t)}{t}\,dt + \int_{2(1-r)}^1 \frac{1}{t}\int_0^t \frac{\omega(u)}{u}\,du\,dt.$$

Учитывая (15), получаем

$$\int_{2(1-r)}^1 \frac{\omega(t)}{t}\log\frac{1}{t-(1-r)}\,dt \le C\left[\omega(1-r)\log\frac{1}{1-r}+1\right].$$

Используя оценку (1), легко доказать, что

$$\sup_{0<x\le 1}\left(\omega(x)\log\frac{1}{x}\right) < +\infty. \tag{16}$$

Поэтому,

$$\sup_{0<r\le 1}\left(\int_r^1 \frac{\omega(1-t)}{1-t}\log\frac{1}{t-r}\,dt\right) < +\infty.$$

Учитывая (15), получаем $I \le \text{const}$, и тем самым

$$|h_k(z)| \le \text{const}\ \|g^2S^{-3/2}\|_\infty.$$

Лемма 4 доказана

Следующее утверждение непосредственно следует из верхних лемм

Лемма 4' *Если ω удовлетворяет условию (1), то*

$$\sup_{z\in D} I < +\infty$$

Лемма 5 *В условиях Теоремы 1 имеет место оценка :*

$$|\text{grad}\,[g^2(z)S^{-2}(z)\overline{f_k(z)}f_m(z)]| \le \text{const}\ \|g/S\|_\infty\frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|} \tag{17}$$

Доказательство. Для краткости положим $\psi \stackrel{def}{=} g^2 S^{-2}\overline{f_k} f_m$. Поскольку

$$|\text{grad }\psi(\xi)| \le 2\left|\frac{\partial\psi}{\partial\xi}(\xi)\right| + 2\left|\frac{\partial\psi}{\partial\bar\xi}(\xi)\right|, \quad \xi \in D,$$

то следующим образом можно оценить обе производные функции ψ. Имеем

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi}(\xi) = 2g(\xi)g'(\xi)S^{-2}(\xi)\overline{f_k}(\xi)f_m(\xi) + g^2(\xi)S^{-2}(\xi)\overline{f_k}(\xi)f'_m(\xi) -$$

$$-2g^2(\xi)S^{-3}(\xi)\overline{f_k(\xi)}f_m(\xi)\sum_{j=1}^{n} f_j(\xi)\overline{f'_j(\xi)}$$

и следовательно,

$$\left|\frac{\partial\psi(\xi)}{\partial\xi}\right| \le C\frac{\omega(1-|\xi|)}{1-|\xi|}\left(\|gS^{-1}\|_\infty + \|g^2S^{-3/2}\|_\infty\right) \le C_1\|gS^{-1}\|_\infty\frac{\omega(1-|\xi|)}{1-|\xi|} \quad (18)$$

Оценим теперь $\dfrac{\partial\psi}{\partial\bar\xi}$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\bar\xi}(\xi) = g^2(\xi)S^{-2}(\xi)f_m(\xi)\overline{f'_k}(\xi) - g^2(\xi)S^{-3}(\xi)f_m(\xi)\overline{f_k(\xi)}\sum_{j=1}^{n}\overline{f'_j(\xi)}f_j(\xi).$$

Отсюда находим

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial\bar\xi}(\xi)\right| \le C_2\frac{\omega(1-|\xi|)}{1-|\xi|}\|g^2S^{-3/2}\|_\infty \le C_3\|gS^{-1}\|_\infty\frac{\omega(1-|\xi|)}{1-|\xi|} \quad (19)$$

И лемма 5 следует из неравенств (17) – (19).

Пусть $1 \le m \le n$, $1 \le k \le n$, f_m, f_k и g – функции из Теоремы 1. Положим

$$I_m(z) = \frac{1}{\pi}\int_D \frac{(f_m(z) - f_m(\xi))\left(\overline{f'_m(\xi)f_k(\xi)} - \overline{f'_k(\xi)f_m(\xi)}\right)g^2(\xi)}{(z-\xi)S^2(\xi)} \times$$

$$\times\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar\xi z}\right)^{\alpha+1} dm_2(\xi).$$

Лемма 6. *Имеет место оценка*

$$\left|\frac{\partial I_m(z)}{\partial z}\right| \le \text{const }\|gS^{-3/2}\|_\infty\frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z \in D,$$

где, как обычно, $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, $z = x + iy$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\frac{\partial I_m(z)}{\partial z} = \frac{1}{\pi}\int_D \frac{f'(z)\left(\overline{f'_m(\xi)f_k(\xi)} - \overline{f'_k(\xi)f_m(\xi)}\right)g^2(\xi)}{(z-\xi)S^2(\xi)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar\xi z}\right)^{\alpha+1} dm_2(\xi) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_D \frac{(f_m(z)-f_m(\xi))\left(\overline{f'_m(\xi)f_k(\xi)} - \overline{f'_k(\xi)f_m(\xi)}\right)g^2(\xi)}{(z-\xi)^2S^2(\xi)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar\xi z}\right)^{\alpha+1} dm_2(\xi) +$$

$$+\frac{\alpha+1}{\pi}\int_D \frac{(f_m(z)-f_m(\xi))\left(\overline{f'_m(\xi)f_k(\xi)} - \overline{f'_k(\xi)f_m(\xi)}\right)g^2(\xi)\bar\xi}{(z-\xi)S^2(\xi)}\times$$

$$\times\frac{(1-|\xi|^2)^\alpha}{(1-\bar\xi z)^{\alpha+2}}\,dm_2(\xi) = I_m^1 + I_m^2 + I_m^3.$$

Оценим I_m^1:

$$|I_m^1(z)| \le \frac{|f'(z)|}{\pi}\int_D \frac{|f'_m(\xi)f_k(\xi) - f'_k(\xi)f_m(\xi)|\,|g^2(\xi)|}{|z-\xi|S^2(\xi)}\left|\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar\xi z}\right|^{\alpha+1} dm_2(\xi) \le$$

$$\le C\frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}\int_D \frac{|f'_m(\xi)f_k(\xi) - f'_k(\xi)f_m(\xi)|\,|g^2(\xi)|}{|z-\xi|S^2(\xi)}\left|\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar\xi z}\right|^{\alpha+1} dm_2(\xi) \le$$

$$\le \mathrm{const}\,\|g^2S^{-3/2}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z\in D. \tag{20}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались Леммой 4° и оценкой (11) для $|f'_m(z)|$.

Теперь оценим I_m^2:

$$I_m^2(z) = \frac{1}{\pi}\int_{D_z}(\cdot)\,dm_2(\xi) + \frac{1}{\pi}\int_{CD_z}(\cdot)\,dm_2(\xi) \stackrel{def}{=} \tilde I_m^2 + \tilde{\tilde I}{}_m^2.$$

Здесь $D_z \stackrel{def}{=} \{\xi : |z| < |\xi| < 1\}$, $CD_z = D\setminus D_z$. Имеем

$$|\tilde I_m^2(z)| \le C\int_{D_z} \frac{|f'(\xi_z)|\,|f'_m(\xi)f_k(\xi) - f'_k(\xi)f_m(\xi)|\,|g^2(\xi)|}{S^2(\xi)|z-\xi|}\left|\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar\xi z}\right|^{\alpha+1} dm_2(\xi) \le$$

$$\le C\|g^2S^{-3/2}\|_\infty \int_{D_z} |z-\xi|^{-1}|f'(\xi_z)|\,[|f'_m(\xi)| + |f'_k(\xi)|]\left|\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar\xi z}\right|^{\alpha+1} dm_2(\xi),$$

где ξ_z – некоторая точка из отрезка, соединяющего z и ξ. Но поскольку $|z|\le|\xi|$, то $|z|\le|\xi_z|\le|\xi|$. Следовательно, из (11) вытекает, что

$$|\tilde I_m^2(z)| \le C_1\|g^2S^{-3/2}\|_\infty \int_{|z|}^1\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\omega^2(1-|\xi|)(1-|\xi|)^{\alpha-1}}{|\xi-z|\,|1-\bar\xi z|^{\alpha+1}}\,dm_2(\xi) \le$$

$$\le C_2\|g^2 S^{-3/2}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}\int_0^1 \omega(1-\rho)(1-\rho)^{\alpha-1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi\, d\rho}{|1-\rho r e^{i\varphi}|^\alpha|\rho-re^{i\varphi}|}\le$$

$$\le C_3\|g^2 S^{-3/2}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}\int_0^1 \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho}\log\frac{1}{|\rho-r|}\,d\rho.$$

Но, как было установлено при доказательстве Леммы 4, последний интеграл равномерно ограничен на $[0;1]$. Поэтому в итоге получаем

$$|\tilde{I}_m^2(z)|\le C_4\|gS^{-3/2}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|},\quad z\in D. \tag{21}$$

Перейдем теперь к оценке $\tilde{\tilde{I}}_m^2$:

$$|\tilde{\tilde{I}}_m^2(z)|\le\int_0^{|z|}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f_m(z)-f_m(\xi)}{(z-\xi)^2}\right||f_m'(\xi)f_k(\xi)-f_k'(\xi)f_m(\xi)||g^2(\xi)S^{-2}(\xi)|\times$$

$$\times\left|\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right|^{\alpha+1}dm_2(\xi).$$

Заметим, что

$$|f_m(\xi)-f_m(z)|\le C\frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}|\xi-z|,\quad \xi,z\in CD_z. \tag{21'}$$

В самом деле, снова используем неравенство

$$|f_m(\xi)-f_m(z)|\le|f'(\xi_z)|\,|\xi-z|,\quad \xi_z\in\Gamma_{\xi,z},$$

где $\Gamma_{\xi,z}$ – отрезок, соединяющий точки ξ и z, но поскольку $|\xi|\le|z|$, то $|\xi_z|\le|z|$. Следовательно,

$$|f'(\xi_z)|\le C\frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}.$$

Итак, получаем оценку

$$|\tilde{\tilde{I}}_m^2(z)|\le C\|g^2 S^{-3/2}\|_\infty\frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}\int_0^{|z|}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-|\xi|^2)^\alpha\omega(1-|\xi|)}{|1-\bar{\xi}z|^{\alpha+1}|\xi-z|}\,dm_2(\xi).$$

Используя Лемму 4*, приходим к неравенству

$$|\tilde{\tilde{I}}_m^2(z)|\le C_2\|g^2 S^{-3/2}\|_\infty\frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|},\quad z\in D. \tag{22}$$

Применяя оценки (20) - (22), окончательно получаем

$$|I_m^2(z)| \le \text{const}\ \|g^2 S^{-3/2}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z \in D.$$

Для доказательства Леммы 6 осталось оценить I_m^3. Интеграл, фигурирующий в $I_m^3(z)$, представим в виде суммы двух интегралов $\tilde{I}_m^3$ и $\tilde{\tilde{I}}_m^3$, с областями интегрирования D_z и CD_z. Сначала оценим $\tilde{I}_m^3$:

$$|\tilde{I}_m^3(z)| \le C \int_{|z|}^1 \omega(1-\rho)(1-\rho)^\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{g^2(\rho e^{i\varphi})}{S^2(\rho e^{i\varphi})}\right| \times$$

$$\times \frac{|f'_m(\rho e^{i\varphi})|\,|f_k(\rho e^{i\varphi})| + |f'_k(\rho e^{i\varphi})|\,|f_m(\rho e^{i\varphi})|}{|1 - r\rho e^{i(\theta-\varphi)}|^{\alpha+2}} \rho\, d\rho\, d\varphi. \tag{23}$$

Здесь мы использовали неравенство (21'). Из (23) получаем

$$|\tilde{I}_m^3(z)| \le C_2 \|g^2 S^{-3/2}\|_\infty \int_{|z|}^1 \omega^2(1-\rho)(1-\rho)^{\alpha-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi\, d\rho}{|1 - r\rho e^{i\varphi}|^{\alpha+2}}$$

и следовательно,

$$|\tilde{I}_m^3(z)| \le C_3 \|g^2 S^{-3/2}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|} \int_0^1 \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho}\, d\rho \le$$

$$\le C_4 \|g^2 S^{-3/2}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z \in D.$$

Приступим к оценке $\tilde{\tilde{I}}_m^3$. Используя неравенство (21') для $|\xi| \le |z|$, получим

$$|\tilde{\tilde{I}}_m^3(z)| \le C_1 \|g^2 S^{-3/2}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|} \int_0^{|z|} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\omega(1-\rho)(1-\rho^2)^\alpha \rho\, d\rho\, d\varphi}{|1 - \rho e^{-i\varphi} z|^{\alpha+2}} \le$$

$$\le C_1 \|g^2 S^{-3/2}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z \in D.$$

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть*

$$\psi(\xi) = \frac{g^2(\xi)}{S^2(\xi)} \overline{f_k(\xi)} f_m(\xi), \quad 1 \le m, k \le n$$

где g и S – функции из Теоремы 1. Положим

$$V(z) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{\psi(\xi)\overline{f'_m(\xi)}(1-|\xi|^2)^{\alpha+1}}{(1-\bar{\xi} z)^{\alpha+1}} \frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}, \quad z \in D, \quad \alpha > 0.$$

Тогда имеет место оценка

$$\left|\frac{\partial V}{\partial z}(z)\right| \leq \text{const}\ \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z \in D.$$

Доказательство. Имеем

$$V(z) = \frac{1}{\pi}\int_D (\psi(\xi)-\psi(z))\overline{f'_m(\xi)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}+$$

$$+\frac{\psi(z)}{\pi}\int_D \overline{f'_m(\xi)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}, \quad z \in D. \tag{24}$$

Из Леммы 1 следует, что

$$\frac{1}{\pi}\int_D \overline{f'_m(\xi)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_D \frac{\partial}{\partial\bar{\xi}}\overline{f_m(\xi)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi} = \overline{f_m(z)} - \overline{f_m(0)}.$$

Поэтому

$$V(z) = \frac{1}{\pi}\int_D [\psi(\xi)-\psi(z)]\overline{f'_m(\xi)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}+$$

$$+\psi(z)[\overline{f_m(z)} - \overline{f_m(0)}], \quad z \in D.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial V}{\partial z}(z) = -\frac{1}{\pi}\int_D \frac{\psi(\xi)-\psi(z)}{(z-\xi)^2}\overline{f'_m(\xi)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1} dm_2(\xi)+$$

$$+\frac{\alpha+1}{\pi}\int_D [\psi(\xi)-\psi(z)]\overline{f'_m(\xi)}(1-|\xi|^2)^\alpha(1-\bar{\xi}z)^{-\alpha-2}\bar{\xi}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_D \overline{f'_m(\xi)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}\psi'(z) + \psi'(z)[\overline{f_m(z)} - \overline{f_m(0)}],$$

где $\psi' = \frac{\partial}{\partial z}\psi$. Используя равенство (24), получаем

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -W_1(z) + W_2(z), \quad z \in D,$$

где

$$W_1(z) = \frac{1}{\pi}\int_D \frac{\psi(\xi)-\psi(z)}{(z-\xi)^2}\overline{f'_m(\xi)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{\alpha+1} dm_2(\xi),$$

$$W_2(z) = \frac{\alpha+1}{\pi}\int_D [\psi(\xi)-\psi(z)]\overline{f'_m(\xi)}(1-|\xi|^2)^\alpha(1-\bar{\xi}z)^{-\alpha-2}\bar{\xi}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}.$$

Сначала оценим W_1. Для этого запишем его в виде суммы двух интегралов W_1^1 и W_1^2 по отрезкам $(|z|;1)$ и $(0,|z|)$. Из Леммы 5 следует

$$\left|\frac{\psi(\xi)-\psi(z)}{(\xi-z)^2}\right| \le \text{const}\ \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|\xi|)}{1-|\xi|}\frac{1}{|\xi-z|}.$$

Но $|\xi| \ge |z|$, а $|\text{grad}\ \psi|$ удовлетворяет оценке (17), следовательно,

$$|W_1^1(z)| \le \text{const}\ \|gS^{-1}\|_\infty \int_{|z|}^1 \frac{\omega^2(1-\rho)}{(1-\rho^2)^{1-\alpha}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho\, d\rho\, d\varphi}{|1-r\rho e^{i\varphi}|^{\alpha+1}|\rho - re^{i\varphi}|} \le$$

$$\le \text{const}\ \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}\int_D \frac{\omega(1-|\xi|)(1-|\xi|)^{\alpha-1}}{|1-\bar\xi z|^\alpha|\xi-z|}\,dm_2(\xi).$$

Теперь, используя Лемму 4*, получим оценку

$$|W_1^1(z)| \le \text{const}\ \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}. \tag{25}$$

Рассмотрим теперь интеграл W_1^2 :

$$|W_1^2(z)| \le \text{const}\ \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}\int_0^{|z|}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f'(\rho e^{i\varphi})|(1-\rho^2)^{\alpha+1}}{|z-\rho e^{i\varphi}|\,|1-z\rho e^{-i\varphi}|^{\alpha+1}}\rho\, d\rho\, d\varphi \le$$

$$\le \text{const}\ \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}\int_D \frac{\omega(1-|\xi|)(1-|\xi|^2)^\alpha}{|\xi-z|\,|1-\bar\xi z|^{\alpha+1}}\,dm_2(\xi).$$

Для оценки последнего интеграла используем Лемму 4* и приходим к неравенству

$$|W_1^2(z)| \le \text{const}\ \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z\in D. \tag{26}$$

Объединяя оценки (25) и (26), получим

$$|W_1(z)| \le \text{const}\ \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z\in D. \tag{27}$$

Итак, для получения подходящей оценки $\frac{\partial V}{\partial z}$ осталось оценить W_2. Как и прежде, интеграл, определяющий W_2, представим в виде суммы двух интегралов W_2^1 и W_2^2 с областями интегрирования $(|z|;1)$ и $(0,|z|)$. Из Лемм 3 и 5 следует

$$|W_2^1(z)| \le \text{const}\ \|gS^{-1}\|_\infty \int_{|z|}^1\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\omega^2(1-\rho)(1-\rho^2)^{\alpha-1}}{|1-z\rho e^{-i\varphi}|^{\alpha+2}}\rho\, d\rho\, d\varphi \le$$

$$\le \text{const}\ \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}\int_0^1 \omega(1-\rho)(1-\rho)^{\alpha-1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\rho\, d\rho\, d\varphi}{|1-z\rho e^{-i\varphi}|^{\alpha+1}}.$$

Отсюда нетрудно получить оценку

$$|W_2^1(z)| \leq \text{const}\ ||gS^{-1}||_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|} \int_0^1 \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho}\, d\rho \leq$$

$$\leq \text{const}\ ||gS^{-1}||_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z \in D.$$

Теперь оценим W_2^2. Снова используя Леммы 3, 5 и проводя аналогичные рассуждения, приведенные при оценке W_2^1, получим

$$|W_2^2(z)| \leq \text{const}\ ||gS^{-1}||_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}.$$

Лемма 7 доказана

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Обозначим

$$J_m(z) = f_m(z) \int_D [\overline{f_m'(\xi) f_k(\xi)} - \overline{f_k'(\xi) f_m(\xi)}] g^2(\xi) S^{-2}(\xi) \left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi} z}\right)^{\alpha+1} \frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}.$$

Функции

$$h_k(z) = \overline{f_k(z)} g^2(z) S^{-1}(z) + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\pi} J_m(z)$$

по Леммам 2 и 4 голоморфны, ограничены в D и удовлетворяют уравнению (6). Нужно доказать, что эти функции принадлежат Λ_ω^a и справедливы оценки типа (7) для $h_k'(z)$, $1 \leq k \leq n$. Используя оператор $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, получаем

$$|h_k'(z)| \leq \left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{f_k}(z) g^2(z) S^{-1}(z)\right)\right| + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial z} J_m(z)\right|.$$

Нетрудно видеть справедливость оценки

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{f_k}(z) g^2(z) S^{-1}(z)\right)\right| \leq C ||g^2 S^{-1}||_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z \in D.$$

Для доказательства теоремы достаточно получить необходимую оценку для $\frac{\partial}{\partial z} J_m$, $1 \leq m \leq n$. Положим $J_m = I_m + V$, где

$$V = \int_D f_m(\xi) [\overline{f_m'(\xi) f_k(\xi)} - \overline{f_k'(\xi) f_m(\xi)}] g^2(\xi) S^{-2}(\xi) \left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi} z}\right)^{\alpha+1} \frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}.$$

Используя Леммы 6 и 7, получаем

$$|h_k'(z)| \leq \text{ const } \|gS^{-1}\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{1-|z|}, \quad z \in D.$$

Отсюда, используя Леммы 3 и 4, получаем

$$\|h_k\|_{\Lambda^a_\omega} \leq \text{ const } \|gS^{-1}\|_\infty .$$

Теорема доказана.

Докажем, что условие (5) в известном смысле необходимо для представимости функции g^2 в виде (6). В следующей теореме мы используем обозначение $\Lambda^a_\alpha \overset{def}{=\!=} \Lambda^a_{t^\alpha}$, т.е. рассматриваем случай $\omega(t) = t^\alpha$. В частности, Λ^a_α означает Гёльдеровский класс функций, голоморфных в D.

Теорема 2 *Для произвольного* $\gamma \in [2, 3)$ *существуют функции* $f_\alpha, g_\alpha \in \Lambda^a_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, *удовлетворяющие условию*

$$|g_\alpha(z)| \leq |f_\alpha(z)|^\gamma, \quad z \in D \tag{28}$$

и такие, что

$$g_\alpha(z)/f_\alpha(z) \notin \Lambda^a_\alpha .$$

Доказательство Положим для $0 < \alpha \leq 1$ и $2 \leq \gamma < 3$

$$f_\alpha(z) \overset{def}{=\!=} (1-z)^\alpha, \quad z \in D,$$

$$g_\alpha(z) \overset{def}{=\!=} (1-z)^{\alpha\gamma} \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right), \quad z \in D.$$

Ясно, что функции f_α, g_α удовлетворяют условию (28). Легко видеть, что для производной имеет место

$$|g_\alpha'(z)| \leq C(\alpha, \gamma)(1-|z|)^{\frac{\alpha\gamma}{2}-1}, \quad z \in D.$$

Отсюда, используя теорему Харди–Литтлвуда, получим $g \in \Lambda^a_\alpha$ при $2 \leq \gamma < \infty$. Но на окружности $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ имеем

$$|g_\alpha'(z)| \geq C_o(\alpha, \gamma)(1-|z|)^{\frac{\alpha\gamma}{2}-1}, \quad C_o(\alpha, \gamma) > 0. \tag{29}$$

Поэтому при $0 \leq \gamma < 2$ имеет место $g_\alpha \notin \Lambda^a_\alpha$. Теперь предположим, что существует $\psi \in \Lambda^a_\alpha$, такая что $g(z) = \psi(z) f(z), \quad z \in D$. Тогда получаем

$$\psi(z) = (1-z)^{\alpha(\gamma-1)} \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right) \in \Lambda^a_\alpha,$$

что невозможно при $0 < \gamma < 3$ ввиду (29). Теорема доказана.

§3. ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ КОРОНЫ В $\Lambda_\alpha^{(m)} (m \geq 1)$

В этом параграфе мы обобщим часть результатов предыдущего параграфа на алгебре $\Lambda_\alpha^{(m)}$, $0 < \alpha < 1$, $m \geq 1$. Напомним определение $\Lambda_\alpha^{(m)}$:

$$\Lambda_\alpha^{(m)} \overset{def}{=\!=} \left\{ f \in C_A^{(m)} : \sup_{\xi_1, \xi_2 \in \overline{D}} \frac{|f^{(m)}(\xi_1) - f^{(m)}(\xi_2)|}{|\xi_1 - \xi_2|^\alpha} + ||f||_\infty = ||f||_{\Lambda_\alpha^{(m)}} < \infty \right\}.$$

Здесь $C_A^{(m)} \overset{def}{=\!=} C^{(m)}(\overline{D}) \cap A(D)$.

Теорема 3. *Пусть* $f_1, f_2, ..., f_n \in \Lambda_\alpha^{(m)}$, $||f_j||_{\Lambda_\alpha^{(m)}} \leq 1$, $1 \leq j \leq n$ *и*

$$S(z) = |f_1(z)|^2 + \cdots + |f_n(z)|^2 \geq \delta, \quad z \in D.$$

Тогда в $\Lambda_\alpha^{(m)}$ *можно построить функции* $h_1, h_2, ..., h_n$, *такие что*

$$f_1(z)h_1(z) + \cdots + f_n(z)h_n(z) = 1, \quad z \in D \tag{30}$$

и

$$||h_j||_{\Lambda_\alpha^{(m)}} \leq \text{ const } \delta^{-1-\frac{m+1}{2}}. \tag{31}$$

Доказательству Теоремы 3 предпошлем несколько лемм.

Лемма 8. *(см. [8], стр. 63) Для* $0 < \alpha < 1$ *имеет место*

$$\int_D \frac{dm_2(\xi)}{(1 - |\xi|)^{1-\alpha} |\xi - e^{i\theta_1}| \, |\xi - e^{i\theta_2}|} \leq \frac{C(\alpha)}{|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|^{1-\alpha}}.$$

Лемма 9. *(см. [5], стр. 78) Пусть* g *принадлежит классу Соболева* W_1^m. *Тогда*

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m} \int_D g(\xi) \frac{dm_2(\xi)}{z - \xi} = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{\partial^m g}{\partial \xi^m} \frac{dm_2(\xi)}{z - \xi} + \sum_{k=1}^m \frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\partial^{m-k} g(\xi)}{\partial \xi^{m-k}} (\xi - z)^{-k} \, d\xi.$$

Лемма 10.

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial \theta^l} \frac{\partial^{m-k}}{\partial \xi^{m-k}} S^{-2}(\xi) \right| \leq \text{ const } S^{-\frac{m-k+l}{2}-2},$$

$$l = 0, 1, ..., k; \quad k = 1, 2, ..., m; \quad \xi = \rho e^{i\theta}.$$

Доказательство. Меняя порядок дифференцирования и используя формулу Фаа-ди-Бруно (см. [9]), получим

$$\frac{\partial^{m-k}}{\partial \xi^{m-k}} \frac{\partial^l}{\partial \theta^l} S^{-2}(\xi) = \sum_{\substack{\nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + l\nu_l = l \\ \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_l = p}} C_{\nu_1, \nu_2, ..., \nu_l} \frac{\partial^{m-k}}{\partial \xi^{m-k}} (S^{(1)})^{\nu_1} \cdots (S^{(l)})^{\nu_l} S^{-p-2}, \tag{32}$$

где $S^{(j)} = \frac{\partial^j}{\partial\theta^j}S(re^{i\theta})$, $C_{\nu_1,\ldots,\nu_l}$ – абсолютные постоянные, зависящие только от $\nu_1,\ldots,\nu_n$.

Теперь оценим выражение

$$\Phi_1(\xi) \stackrel{def}{=\!=} \frac{\partial^{m-k}}{\partial\xi^{m-k}}[(S^{(1)}(\xi))^{\nu_1}S(\xi)^{-p-2}\psi(\xi)],$$

где для удобства положено

$$\psi(\xi) = \left(S^{(2)}(\xi)\right)^{\nu_2}\cdots\left(S^{(l)}(\xi)\right)^{\nu_l}.$$

Очевидно, что в условиях леммы производные от ψ' равномерно ограничены. Используя формулу Лейбница, получаем

$$\Phi_1(\xi) = \sum_{q=0}^{m-k} C_{m-k}^q \Phi_2(\xi)\frac{\partial^{m-k-q}\psi(\xi)}{\partial\xi^{m-k-q}}, \tag{33}$$

где

$$\Phi_2(\xi) \stackrel{def}{=\!=} \frac{\partial^q}{\partial\xi^q}[(S^{(1)}(\xi))^{\nu_1}S(\xi)^{-p-2}].$$

Снова применяя формулу Лейбница, получаем

$$\Phi_2(\xi) = \sum_{r=0}^{q} C_q^r \frac{\partial^{q-r}}{\partial\xi^{q-r}}(S^{(1)})^{\nu_1}\frac{\partial^r}{\partial\xi^r}S^{-p-2}(\xi).$$

Используя формулу Фаа-ди-Бруно, легко установить оценку

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial\xi^r}S^{-p-2}\right| \le \text{ const } [S(\xi)]^{-p-2-\frac{r}{2}}, \quad r = 0,1,\ldots,q$$

И следовательно,

$$|\Phi_2(\xi)| \le C\sum_{r=0}^{q}\left|\frac{\partial^{q-r}}{\partial\xi^{q-r}}[S^{(1)}(\xi)]^{\nu_1}[S(\xi)]^{-p-2-\frac{r}{2}}\right|.$$

Если теперь $\nu_1 \ge q-r$, то получаем

$$\left|\frac{\partial^{q-r}}{\partial\xi^{q-r}}[S^{(1)}(\xi)]^{\nu_1}\right| \le C_1|S^{(1)}(\xi)|^{\nu_1-q+r} \le C_2S^{\frac{\nu_1-q+r}{2}}(\xi).$$

Если же $\nu_1 < q-r$, то

$$S^{-p-2-\frac{r}{2}} \le \text{ const } S^{-p-2-\frac{q-\nu_1}{2}}.$$

Таким образом, в обоих случаях имеем

$$|\Phi_2(\xi)| \le \text{ const } [S(\xi)]^{-p-2-\frac{m-k-\nu_1}{2}}.$$

Подставляя эту оценку в (33), находим

$$|\Phi_1(\xi)| \le \text{ const } [S(\xi)]^{-p-2-\frac{m-k-\nu_1}{2}}.$$

Но учитывая равенство (32), легко видеть, что $p - \nu_1/2 \le l/2$. Следовательно,

$$|\Phi_1(\xi)| \le \text{ const } [S(\xi)]^{-2-\frac{m-k+l}{2}}.$$

Лемма 10 доказана.

Доказательство Теоремы 3. Мы явно построим требуемую функцию. Положим, как и при доказательстве Теоремы 1

$$h_k(z) = \overline{f_k}(z)S^{-1}(z) + \sum_{m=1}^{n} \frac{f_m(z)}{\pi} \int_D [\overline{f'_m(\xi)f_k(\xi)} - \overline{f'_k(\xi)f_m(\xi)}]S^{-2}(\xi)\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}.$$

Точно таким же образом легко установить, что $h_k \in A(D)$ и h_k удовлетворяет уравнению (30), $1 \le k \le n$. Докажем, что $h_k \in \Lambda_\alpha^{(m)}$ и оценим норму этих функций в пространстве $\Lambda_\alpha^{(m)}$. Положим $g_{i,j} = \overline{f'_i f_j} S^{-2}$. Сначала оценим норму функции $H(z)$:

$$H(z) \stackrel{def}{=\!=} \frac{\partial^m}{\partial z^m}\frac{1}{\pi}\int_D g_{i,j}(\xi)\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi}, \quad z \in \overline{D}$$

в пространстве $C_\alpha(\Gamma)$. Используя Лемму 9, получаем $H = H_1 + H_2$, где

$$H_1(z) = \frac{1}{\pi}\int_D \frac{\partial^m g_{i,j}(\xi)}{\partial \xi^m}\frac{dm_2(\xi)}{z-\xi},$$

$$H_2(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(k-1)!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\partial^{m-k} g_{i,j}}{\partial \xi^{m-k}}(\xi - z)^{-k} d\overline{\xi}.$$

Сначала оценим норму функции H_2. С этой целью положим

$$G_k(z) \stackrel{def}{=\!=} \frac{(k-1)!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\partial^{m-k} g_{i,j}(\xi)}{\partial \xi^{m-k}}(\xi - z)^{-k} d\overline{\xi} = \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\partial^{m-k} g_{i,j}}{\partial \xi^{m-k}}(\xi - z)^{-1} d\overline{\xi}.$$

Для оценки нормы G_k в $C_\alpha(\Gamma)$ по теореме Привалова достаточно оценить

$$F_k \stackrel{def}{=\!=} \frac{\partial^k}{\partial \theta^k}\frac{\partial^{m-k}}{\partial \xi^{m-k}} g_{i,j}(\xi), \quad \xi = re^{i\theta}, \quad 0 \le k \le m-1.$$

Имеем

$$F_k = \frac{\partial^k}{\partial\theta^k}\overline{f_i'f_j}\frac{\partial^{m-k}}{\partial\xi^{m-k}}S^{-2}(\xi).$$

Используя формулу Лейбница, получаем

$$F_k = \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \frac{\partial^{k-l}\overline{f_i'f_j}}{\partial\theta^{k-l}}\frac{\partial^l}{\partial\theta^l}\frac{\partial^{m-k}}{\partial\xi^{m-k}}S^{-2}(\xi) + \overline{f_i'(\xi)f_j(\xi)}\frac{\partial^{m-k}S^{-2}(\xi)}{\partial\xi^{m-k}}.$$

Из Леммы 10 непосредственно следует

$$|F_k| \leq \text{ const } [S(\xi)]^{-1-\frac{m+1}{2}}, \quad 1 \leq i,j \leq n, \quad 0 \leq k \leq m-1.$$

Следовательно,

$$||G_k||_{\Lambda_\alpha} \leq \text{ const } \delta^{-1-\frac{m+1}{2}}, \quad 1 \leq k \leq m-1.$$

Теперь оценим норму функции G_m. Заметим, что

$$F_m = \frac{d^{m-1}}{d\theta^{m-1}}g_{i,j}(e^{i\theta})$$

принадлежит классу $C_\alpha(\Gamma)$. Используя вновь формулу Лейбница, получасм

$$F_m = \psi(e^{i\theta})\overline{f_j}(e^{i\theta})S^{-2}(e^{i\theta}) + \Phi_3(e^{i\theta}),$$

где

$$\Phi_3 \stackrel{def}{=\!=} \sum_{k=0}^{m-2} C_{m-1}^k \frac{d^k}{d\theta^k}\overline{f_i'}\frac{d^{m-1-k}}{d\theta^{m-1-k}}\overline{f_j}S^{-2}.$$

Повторяя вышеизложенные рассуждения, мы получаем оценку

$$|\Phi_3^{(1)}(e^{i\theta})| \leq \text{ const } [S(e^{i\theta})]^{-\frac{m+1}{2}-1}. \tag{34}$$

Следовательно,

$$||\Phi_3||_{C_\alpha(\Gamma)} \leq \text{ const } \delta^{-\frac{m+1}{2}-1}. \tag{35}$$

Поскольку $m \geq 1$, то имеем

$$||\psi\overline{f_j}S^{-2}||_{C_\alpha(\Gamma)} \leq C_1\delta^{-3/2} + C_2\delta^{-2} \leq C_3\delta^{-\frac{m+1}{2}-1}. \tag{36}$$

Используя оценки (34) – (36), получаем $||G_m||_{\Lambda_\alpha} \leq C_4\delta^{-\frac{m+1}{2}-1}$. Осталось оценить нормы $\overline{f_k}S^{-2}$ и H_1. Имеем

$$|H_1(e^{i\theta_1}) - H_1(e^{i\theta_2})| = \frac{|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|}{\pi}\left|\int_D \frac{\partial^m g_{i,j}}{\partial\xi^m}(\xi - e^{i\theta_1})^{-1}(\xi - e^{i\theta_2})^{-1}\, dm_2(\xi)\right| \leq$$

$$\leq \text{ const } |e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}| \int_D (1-|\xi|)^{\alpha-1}|\xi-e^{i\theta_1}|^{-1}|\xi-e^{i\theta_2}|^{-1}\, dm_2(\xi) \leq \text{ const } |e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|^{\alpha}.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались Леммами 8 и 10. Из Леммы 10 вытекает

$$\left\|\overline{f_k}\,\frac{\partial^m S^{-2}}{\partial\xi^m}\right\|_{C_\alpha(\Gamma)} \leq \text{ const } \delta^{-\frac{m+1}{2}-1}. \tag{37}$$

Из (34) - (37) окончательно получаем

$$\|h_k\|_{\Lambda_\alpha^{(m)}} \leq \text{ const } \delta^{-\frac{m+1}{2}-1}.$$

Теорема 3 доказана.

Замечание. В связи с равенством (30) и оценкой (31) отметим также работы [10] - [12], где получены решения проблемы короны в пространстве ограниченных аналитических функций, однако без явного построения множителей.

Теперь докажем, что оценка, полученная в Теореме 3, близка к точной. Пусть $f_1, f_2, ..., f_n \in \Lambda_\alpha^{(m)}$,

$$C(f_1, f_2, ..., f_n) = \inf\{\|g_1\|_{\Lambda_\alpha^{(m)}} + \cdots + \|g_n\|_{\Lambda_\alpha^{(m)}}\},$$

где инфимум берется по всем функциям из $\Lambda_\alpha^{(m)}$, удовлетворяющим уравнению (30), и пусть

$$C(\delta) = \sup\left\{C(f_1, ..., f_n);\ |f_1(z)|^2 + |f_2(z)|^2 + \cdots + |f_n(z)|^2 \geq \delta;\ \|f_j\|_{\Lambda_\alpha^{(m)}} \leq 1\right\}.$$

Из Теоремы 2 следует, что $C(\delta) \leq C(m)\delta^{-\frac{m+1}{2}-1}$. Докажем, что имеет место также оценка

$$C(\delta) \geq C_1(m)\delta^{-\frac{m+1}{2}-\frac{\alpha}{2}}, \quad C_1 > 0. \tag{38}$$

Положим $f_1(z) = \dfrac{1-(1\sqrt{\delta})z}{6}$, $0 < \delta < 1/2$. Легко установить, что $\|f_1\|_{\Lambda_\alpha^{(m)}} \leq 1$, $m = 0, 1, ...$ Положим далее $f_2 = f_3 = \cdots = f_n = 0$. Тогда если $f_1 g_1 = 1$, т.е. $g_1(z) = \dfrac{6}{1-(1-\sqrt{\delta})z}$, то используя неравенство

$$\|g_1\|_{\Lambda_\alpha^{(m)}} \geq C \max_{z\in D}\{|g^{(m+1)}(z)|(1-|z|)^{1-\alpha}\}$$

получаем

$$\|g\|_{\Lambda^{(m)}_{\alpha}} \geq C(m,\alpha)\delta^{-\frac{m+1}{2}-\frac{\alpha}{2}}, \quad C>0.$$

Оценка (38) установлена.

ABSTRACT. Let ω be a function of modulus continity type, i.e. a nonnegative, increasing function satisfying Zygmund condition $\int_0^\delta \frac{\omega(u)}{u}\,du = o(\omega(\delta))$, $\delta \to 0$. The paper considers finitely generated ideals in the algebra of holomorphic in unit disc functions f, for which $|f(\xi_1)-f(\xi_2)| \leq C_f\omega(|\xi_1-\xi_2|)$, $|\xi_1|, |\xi_2| \leq 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Carleson, "Interpolation by bounded analytic functions and corona problem," Ann. Math., vol. 76, pp. 547 – 559, 1962.
2. L. Hörmander, "Generators for some rings of analytic functions," Bull. Amer. Math. Soc., vol. 73, pp. 943 – 949, 1967.
3. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций," Сообщ. Инст. Матем. и Мех. АН Арм.ССР, том 2, стр. 3 – 55, 1948.
4. Ф. А. Шамоян, "Приложения интегральных предсталений М. Джрбашяна к некоторым вопросам анализа," ДАН СССР, том 261, № 3, 1981.
5. A. E. Djrbashian, F. A. Shamoyan, Topics in the Theory of A^p_α Spaces, Teubner, Leipzig, 1988.
6. И. Н. Векуа, Обобщенные Аналитические Функции, Наука, М., 1962.
7. Я. Л. Геронимус, "О некоторых свойствах аналитических функций, непрерывных в замкнутом круге или круговом секторе," Мат. Сборник, том 38(80), № 3, 1958.
8. Л. Карлесон, Избранные Проблемы Теории Исключительных Множеств, М., Мир, 1971.
9. Н. Бурбаки, Функции Действительных Переменных, М., Наука, 1965.
10. P. Jones, "Estimates for the corona problem," Journ. Funct. Anal., vol. 39, pp. 162 – 182, 1981.
11. В. А. Толоконников, "Оценки в теореме Карлесон о короне, идеалы алгебры H^∞, задача Секефальви-Надя," Записки Науч. Семин. ЛОМИ АН СССР, том 113, стр. 178 – 198, 1981.
12. M. Rosenblum, "A corona theorem for countably many functions," Integral Equat. Operator Theory, vol. 3, № 1, стр. 125 – 137, 1980.

26 Августа 1992

Институт Математики
Национальной Академии Наук Армении