

ПОСТРОЕНИЕ АТТРАКТОРА ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Р. Л. Шахбагян, Г. С. Аюпян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 27, № 4, 1992

В статье дается некоторое применение результатов авторов (см. [1,2])

к нелинейному параболическому уравнению $\frac{\partial u}{\partial t} + L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^m \times$
 $\times \sum_{i=1}^n \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} \left(\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right)^{p-1} \right) = 0$ в цилиндре $Q = (0, \infty) \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ —

ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$ и $p > 2$ чётно. Ставится следующая начально-краевая задача: $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, $D^\omega u|_\Sigma = 0$, $|\omega| \leq m-1$, где $\Sigma = (0, \infty) \times \Gamma$. Эти результаты связаны с построением аттракторов полугрупп, порожденных смешанными задачами для нелинейных параболических уравнений высокого порядка и исследованию глобальной функции Ляпунова.

Рассмотрим нелинейное параболическое уравнение порядка $2m$ ($m > 1$) вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} \left(\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right)^{p-1} \right) = 0 \quad (1)$$

в цилиндре $Q = (0, \infty) \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$ и $p > 2$ — четное число.

Поставим следующую начально-краевую задачу:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$D^\omega u|_\Sigma = 0, \quad |\omega| \leq m-1, \quad (3)$$

где $\Sigma = (0, \infty) \times \Gamma$.

В настоящей статье для модельной задачи (1) — (3) приводится приложение результатов, полученных авторами в [1,2], по построению аттракторов полугрупп, порождаемых смешанными задачами для нелинейных параболических уравнений высокого порядка и исследованию глобальной

функции Ляпунова.

1°. В первую очередь нам надлежит установить однозначную разрешимость задачи (1) – (3). С этой целью приведем соответствующий результат работы [1]. В ней исследована начально-краевая задача для следующего класса операторов :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + L(u) &= 0, \\ L(u) &= \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \mathcal{D}^\alpha (A_\alpha(t, x, \mathcal{D}^\gamma u)), \end{aligned} \quad (4)$$

где функции $A_\alpha(t, x, \xi_\gamma)$ определены для $(t, x) \in Q$ и всех ξ_γ , при этом выполнены следующие условия :

1) Функции $A_\alpha(t, x, \xi_\gamma)$ непрерывны по t и ξ_γ и удовлетворяют неравенству

$$|A_\alpha(t, x, \xi_\gamma)| \leq K_1 \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |\xi_\gamma|^{p-1} + 1 \right), \quad p \geq 2, \quad (5)$$

где $K_1 > 0$ – постоянная.

2) Условие эллиптичности : для любой функции $u(x, t)$, $u \in L_p^{loc}(0, \infty; \dot{W}_p^m(\Omega))$ (т.е. для любого $T > 0$ $u \in L_p(0, T; \dot{W}_p^m(\Omega))$) справедливо неравенство

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (A_\alpha(t, x, \mathcal{D}^\gamma u), \mathcal{D}^\alpha u) \geq a_0 \|u(x, t)\|_{m,p}^p - k(t), \quad (6)$$

где $a_0 > 0$ – постоянная, $k(t)$ – непрерывная на полуоси $[0, \infty)$ функция. Круглыми скобками $(,)$ обозначено скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$, а $\|\cdot\|_{m,p}$ – норма в $\dot{W}_p^m(\Omega)$.

3) Условие сильной эллиптичности : для любого $T > 0$ и любых функций $u, v \in L_p^{loc}(0, \infty; \dot{W}_p^m(\Omega))$ таких, что $u - v \in L_p^{loc}(0, \infty; \dot{W}_p^m(\Omega))$, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq m} \int_0^T \int_\Omega (A_\alpha(t, x, \mathcal{D}^\gamma u) - A_\alpha(t, x, \mathcal{D}^\gamma v)) \mathcal{D}^\alpha (u - v) dx dt &\geq \\ &\geq a_1 \int_0^T \|u - v\|_{m,p}^p dt, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\alpha_1 > 0$ – некоторая постоянная.

Для дальнейшего нам необходимо следующее обозначение. Пусть $\dot{H}(T)$ – банахово пространство функций, получаемое замыканием линейного многообразия гладких функций $z(x, t)$ таких, что

$$z(x, 0) = 0, \quad \mathcal{D}^\omega z|_{\Sigma_T} = 0, \quad |\omega| \leq m - 1$$

по норме

$$|||z(x, t)|||' = \left(\int_0^T \|z(x, t)\|_{m,p}^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_0^T \left\| \frac{\partial z}{\partial t} \right\|_{-m,q}^q dt \right)^{1/q},$$

где $\Sigma_T = (0, T) \times \Gamma$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Далее через $H_T(u_0)$ обозначим множество функций вида

$$u(x, t) = u_0(x) + z(x, t),$$

где $z \in \dot{H}(T)$.

Определение 1. Функция $u(x, t) \in L_p^{\text{loc}}(0, \infty; W_p^m(\Omega))$ называется обобщённым решением задачи (2)–(4), если для любого $T > 0$, $u(x, t) \in H_T(u_0)$ и для любой функции $v(x, t) \in L_p^{\text{loc}}(0, \infty; W_p^m(\Omega))$ имеет место интегральное тождество :

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v(x, t) dx dt + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_0^T \int_{\Omega} A_{\alpha}(t, x, \mathcal{D}^\alpha u) \mathcal{D}^\alpha v dx dt = 0.$$

Теорема А ([1], Теорема II) Пусть оператор L удовлетворяет условиям 1)–3), тогда задача (2)–(4) имеет единственное обобщенное решение для любых начальных данных.

Для доказательства аналогичной теоремы для оператора

$$L(u) \equiv (-1)^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} \left(\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right)^{p-1} \right)$$

достаточно проверить, что он удовлетворяет условиям Теоремы А.

Очевидно, условие 1) следует из оценки

$$|A_i(t, x, \xi_\gamma)| = |\xi_\gamma|^{p-1} \leq K_1 \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p-1} + 1 \right), \quad (8)$$

где мультииндекс $\gamma = (0, \dots, m, 0, \dots, 0)$.

Легко проверяется также условие 2) (условие эллиптичности) Теоремы А.

Действительно, для любого $u \in L_p^{\text{loc}}(0, \infty; \dot{W}_p^m(\Omega))$ имеем

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right)^{p-1} \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} dx = \|u\|_{m,p}^p, \quad (9)$$

откуда следует оценка (6).

Наконец, справедливость условия сильной эллиптичности легко следует из нетрудно проверяемого неравенства

$$\int_0^1 |a + \tau b|^{p-2} d\tau \geq c |b|^{p-2}, \quad (10)$$

верного для любых a и b , а постоянную $c > 0$ можно выбрать не зависящей от a и b .

Действительно, в силу (7) для любых $u, v \in L_p^{\text{loc}}(0, \infty; \dot{W}_p^m(\Omega))$ таких, что $u - v \in L_p^{\text{loc}}(0, \infty; \dot{W}_p^m(\Omega))$ рассмотрим выражение

$$J = \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right)^{p-1} - \left(\frac{\partial^m v}{\partial x_i^m} \right)^{p-1} \right] \frac{\partial^m (u - v)}{\partial x_i^m} dx dt.$$

Нетрудно заметить, что последнее выражение можно записать в следующем виде :

$$J = \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} \left\{ \int_0^1 (p-1) \left[\frac{\partial^m v}{\partial x_i^m} + \tau \frac{\partial^m (u - v)}{\partial x_i^m} \right]^{p-2} d\tau \right\} \cdot \left(\frac{\partial^m (u - v)}{\partial x_i^m} \right)^2 dx dt.$$

Используя неравенство (10), для интеграла J получаем следующую оценку :

$$J \geq c(p-1) \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^m (u - v)}{\partial x_i^m} \right|^p dx dt = c(p-1) \int_0^T \|u - v\|_{m,p}^p dt. \quad (11)$$

Следовательно, условие (7) сильной эллиптичности выполнено. Из оценок (8), (9), (11) и Теоремы А вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. Задача (1) - (3) имеет единственное обобщенное решение для любых начальных данных $u_0 \in \dot{W}_p^m(\Omega)$.

2°. В этом пункте будет доказано существование компактного аттрактора полугруппы, порождённой задачей (1)–(3).

Заметим, что Теорема 1 позволяет ввести полугруппу S_t , $t \geq 0$ операторов, определяемых следующим образом :

$$S_t u_0 = u(t),$$

где $u(t)$ – траектория, выходящая из точки u_0 .

Справедливо следующее утверждение.

Предложение. Пусть решение $u(x, t)$ задачи (1)–(3) принадлежит пространству $L_p^{loc}(0, \infty; W_p^{m+1}(\Omega))$ и $p > 2$ – чётное число. Тогда семейство операторов $\{S_t\}$, порождённое задачей (1)–(3), отображает множества, ограниченные в $L_2(\Omega)$, в ограниченные множества пространства $W_2^1(\Omega)$, и, стало быть, компактные в $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $T > 0$ произвольным образом выбрано и фиксировано, а $U_0 = \{u_0 \in L_2(\Omega) : \|u_0\| \leq M\}$ – произвольное ограниченное множество в $L_2(\Omega)$.

Подставляя решение $u(x, t)$ задачи в уравнение (1), умножая обе части последнего тождества на $t^2 \Delta u$ (Δ – оператор Лапласа по пространственным переменным x) и интегрируя его по области Ω , получим

$$\int_{\Omega} t^2 \frac{\partial u}{\partial t} \Delta u \, dx + (-1)^m \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} \left(\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right)^{p-1} \right) t^2 \Delta u \, dx = 0.$$

Интегрируя последнее тождество по частям, придём к следующему соотношению :

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} t^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right)^{p-1} \right) \frac{\partial^{m+1} u}{\partial x_j \partial x_i^m} \, dx = 0. \quad (12)$$

Теперь, произведя в (12) интегрирование по $t \in [0, T]$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(T \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \, dx &= 2 \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} t \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \, dx \, dt - \\ &2 \sum_{i,j=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} t^2 (p-1) \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right)^{p-2} \left(\frac{\partial^{m+1} u}{\partial x_j \partial x_i^m} \right)^2 \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку $p > 2$ – чётное, то последнее слагаемое в правой части (13) положительно, и следовательно, получаем оценку

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(T \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \leq 2 \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} t \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx dt.$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$\|u(x, T)\|_{1,2}^2 \leq c \| \|u(x, t)\| \|_{1,2}^2, \quad (14)$$

где $c > 0$ – постоянная, а

$$\| \|u(x, t)\| \|_{1,2} = \left(\int_0^T \|u(x, t)\|_{1,2}^2 dt \right)^{1/2}.$$

Используя как и в [1] модифицированный метод Галёркина и совершая предельный переход, получаем следующую оценку для обобщённого решения задачи (1)–(3) (ср. с неравенством (31) из [1])

$$\| \|u(x, t)\| \|_{1,2} \leq c_1 \|u_0(x)\|, \quad (15)$$

где $c_1 > 0$ – некоторая постоянная.

Оценка

$$\|S_T u_0\|_{1,2} = \|u(x, T)\|_{1,2} \leq c_2 \|u_0\| \leq c_2 M, \quad u_0 \in U_0$$

непосредственно следует из (14) и (15).

Таким образом, оператор S_T отображает ограниченные множества пространства $L_2(\Omega)$ в ограниченные множества пространства $\dot{W}_2^1(\Omega)$. Отсюда, в силу компактности оператора вложения из $\dot{W}_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, следует наше утверждение.

Повторяя рассуждения, проведённые при доказательстве Леммы 2 в [1] нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 1. Обобщённое решение задачи (1)–(3) удовлетворяет неравенству

$$\|u\|^2 \leq e^{-2t} \|u_0\|^2. \quad (16)$$

Легко устанавливается также следующая

Лемма 2. Пусть $u_{10}(x)$ и $u_{20}(x)$ — произвольные элементы пространства $\dot{W}_p^m(\Omega)$, а $u_1(x, t), u_2(x, t) \in L_p^{\text{loc}}(0, \infty; W_p^m(\Omega))$ соответствующие им обобщённые решения задачи (1)–(3). Тогда имеет место оценка :

$$\|S_t u_{10}(x) - S_t u_{20}(x)\| = \|u_1(x, t) - u_2(x, t)\| \leq \|u_{10}(x) - u_{20}(x)\|. \quad (17)$$

Приведём теперь одну общую теорему о существовании аттрактора, доказанную в [3].

Теорема Б ([3], Теорема 1.1). Пусть полугруппа $\{S_t\}$ операторов, действующая в банаховом пространстве X , удовлетворяет следующим условиям :

а) полугруппа $\{S_t\}$ равномерно ограничена, т.е. для любого $R > 0$ существует постоянная $C(R) > 0$ такая, что

$$\|S_t u\| \leq C(R), \quad \text{при } \|u\| \leq R \text{ и для любого } t > 0;$$

б) существует компактное в X поглощающее множество $B_0 \subset X$, т.е. для любого ограниченного множества $B \subset X$ существует такое число $T > 0$, что при $t \geq T$, $S_t B \subset B_0$;

в) операторы $S_t : X \rightarrow X$ непрерывны при $t \geq 0$.

Тогда у полугруппы S_t имеется компактный аттрактор.

Таким образом доказана следующая

Теорема 2. Пусть $p > 2$ — чётное число. Тогда полугруппа $S_t, t \geq 0$, порождённая задачей (1)–(3), обладает аттрактором, компактным в пространстве $L_2(\Omega)$.

Доказательство следует из Лемм 1,2 и Предложения.

3°. Как известно ([2]–[4]), структура аттракторов полугрупп конструктивно описывается при условии существования глобальной функции Ляпунова. Более точно, она описывается явно с помощью неустойчивых инвариантных многообразий, проходящих через неподвижные точки полугруппы S_t .

В настоящем пункте будет построена функция Ляпунова для задачи (1)–(3) и, стало быть, описана структура аттрактора порождённой ею полугруппы S_t .

Прежде чем сформулировать основной результат приведём необходимые определения и одну общую теорему о структуре аттракторов (см. [2], [3]).

Определение 2. Пусть $\{S_t\}$ – полугруппа операторов, действующих в банаховом пространстве X . Точка $z \in X$ называется неподвижной точкой полугруппы $\{S_t; t \geq 0\}$, если $S_t z = z$ для любого $t \geq 0$.

Определение 3. Пусть $z \in X$ – неподвижная точка полугруппы $\{S_t\}$. Множество $M(z) \subset X$ называется неустойчивым инвариантным многообразием, выходящим из точки z , если существует такая непрерывная кривая $u(\tau)$, $-\infty < \tau < \infty$ в X , что

$$1) u(0) = z;$$

$$2) S_t u(\tau) = u(t + \tau), \forall \tau \in \mathbb{R}^1, \forall t \geq 0;$$

$$3) u(\tau) \rightarrow z \text{ при } \tau \rightarrow -\infty.$$

Определение 4. Пусть $Y \subset X$ – слабо инвариантное множество полугруппы $\{S_t\}$: $S_t Y \subset Y, \forall t \geq 0$. Непрерывный на Y функционал $\Phi: Y \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется функцией Ляпунова полугруппы $\{S_t\}$ на Y , если выполнены следующие условия:

$$1) \text{ для любого } u \in Y, \text{ функция } \Phi(S_t u) \text{ убывает по } t \text{ при } t \geq 0;$$

$$2) \text{ если } \Phi(S_t u) = \Phi(S_\theta u) \text{ при некотором } t > \theta, \text{ то } S_\theta u \text{ является неподвижной точкой полугруппы } \{S_t\}.$$

Теорема С (см. [3], Теоремы 10.1 и 10.2). Пусть полугруппа $\{S_t\}$ обладает компактным аттрактором M и на множестве M обладает функцией Ляпунова Φ . Предположим, далее, что множество N неподвижных точек $\{S_t\}$ конечно и, кроме того, для любого $u \in M$, функция $\Phi(S_t u)$ непрерывно зависит от t (по норме X). Тогда

$$M = \bigcup_{z \in N} M(z),$$

где $M(z)$ – неустойчивое инвариантное многообразие, выходящее из точки z .

Имеет место следующая

Теорема 3. Функционал

$$\Phi(u) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right|^p dx, \quad (18)$$

определённый на пространстве $\dot{W}_p^m(\Omega)$, является функцией Ляпунова полу-
группы $\{S_t\}$, порождённой задачей (1)-(3).

Доказательство. Непрерывность функционала Φ на $\dot{W}_p^m(\Omega)$ очевидна, по-
скольку $\Phi(u) = \|u\|_{m,p}^p$.

Для того, чтобы показать, что $\Phi(S_t u)$ убывает по t при $t \geq 0$, рассмотрим
выражение

$$\Phi(u+v) - \Phi(u) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} + \frac{\partial^m v}{\partial x_i^m} \right)^p - \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right)^p \right] dx, \quad (19)$$

для $u, v \in \dot{W}_p^m(\Omega)$.

Выделением линейной части в (19) убеждаемся, что Φ дифференцируем в
смысле Фреше, а дифференциал $\Phi'(u)$ действует на v по формуле

$$\langle \Phi'(u), v \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right)^{p-1} \frac{\partial^m v}{\partial x_i^m} dx.$$

Последний интеграл существует, поскольку

$$\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right)^{p-1} \in L_q(\Omega) \quad \text{и} \quad \frac{\partial^m v}{\partial x_i^m} \in L_p(\Omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Следовательно, для решения $u(x, t)$ задачи (1)-(3) имеем

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi(S_t u) &= \partial_t \Phi(u(x, t)) = \langle \Phi'(u(x, t)), \frac{\partial u}{\partial t} \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right)^{p-1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right) dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right)^{p-1} \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dx = \\ &= (-1)^m \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} \left(\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right)^{p-1} \right) \frac{\partial u}{\partial t} dx = \\ &= \int_{\Omega} L(u) \frac{\partial u}{\partial t} dx = - \int_{\Omega} (L(u))^2 dx \leq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, функция $\Phi(S_t u)$ убывает при $t \geq 0$.

Проверим, наконец, условие 2) определения 4. С этой целью предположим, что при некотором $t_0 > 0$ имеем

$$\Phi(u(x, t_0)) = \Phi(u(x, 0)).$$

Тогда, в силу (20)

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(u(x, t_0)) - \Phi(u_0) = \int_0^{t_0} \partial_t (\Phi(u(x, t))) dt = \\ &= - \int_0^{t_0} \int_{\Omega} (L(u))^2 dx dt = \int_0^{t_0} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt. \end{aligned}$$

Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ при $t \in [0, t_0]$, т.е. $L(u) = 0$. Так как $L(u_0) = L(u(x, 0)) = 0$ и $\frac{\partial u_0}{\partial t} = 0$, то $z = u_0(x)$ является решением задачи (1)–(3) и $S_t z = z$, т.е. $z = u(x, 0) = u_0(x)$ является неподвижной точкой полугруппы $\{S_t\}$. Теорема доказана.

Теоремы 2 и 3 с учётом Теоремы С, позволяют описать структуру аттрактора полугруппы $\{S_t\}$, порождённой задачей (1)–(3).

Теорема 4. Пусть $p > 2$ – чётное число. Если множество $\mathcal{N} = \{z_1(x), z_2(x), \dots, z_r(x)\}$ неподвижных точек полугруппы $\{S_t\}$, порождённой задачей (1)–(3), конечно, то аттрактор M полугруппы $\{S_t\}$ совпадает с объединением неустойчивых инвариантных многообразий $M(z_j)$, $j = 1, 2, \dots, r$, выходящих из z_j , т.е.

$$M = \bigcup_{z_j \in \mathcal{N}} M(z_j).$$

ABSTRACT. The paper gives some applications of earlier results by the authors (see [1,2]) on the nonlinear parabolic equation $\frac{\partial u}{\partial t} + L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} \left(\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right)^{p-1} \right) = 0$ in a cylinder $Q = (0, \infty) \times \Omega$, where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with sufficiently smooth boundary $\Gamma = \partial\Omega$ and $p > 2$ is even. We pose the following initial-boundary problem $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, $D^\omega u|_{\Sigma} = 0$, $|\omega| \leq m-1$, where $\Sigma = (0, \infty) \times \Gamma$. These results relate to construction of attractors of semigroups generated by initial-boundary problems for high-order nonlinear parabolic equations, as well as to investigation of global Lyapunov function.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян, "Построение аттракторов нелинейных параболических операторов высокого порядка," Изв. АН Армении, серия Математика, [английский перевод : Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of sciences)], том 25, № 6, стр. 549 – 559, 1990.
2. Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян, "О функции Ляпунова полугрупп, порождённых нелинейными параболическими уравнениями высокого порядка," Изв. АН Армении, серия Математика, [английский перевод : Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of sciences)], том 26, № 3, стр. 242 – 250, 1991.
3. А. В. Бабин, М. И. Вишик, "Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности," УМН, том 38, № 4(232), стр. 133 – 187, 1983.
4. А. В. Бабин, М. И. Вишик, Аттракторы Эволюционных Уравнений, Наука, Москва, 1989.

25 Декабря 1991

Ереванский государственный университет,
Межвузовский научный центр
по прикладным проблемам математики