ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ РАЗНОЙ АНИЗОТРОПИИ

А. Г. Багдасарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 27, № 4, 1992

В работе исследуются пространства $H_p^s(\mu; R_n)$ типа Соболева-Лиувилля и пространства $B_{p,q}^s(\mu; R_n)$ типа Никольского-Бесова , порожденные бесконечно дифференцируемой вне начала координат функцией μ. Доказывается независимость нулевых классов от порождающей функции и свойство изоморфизма оператора типа лиувиллевского дифференцирования. Причем анизотропия оператора не зависит от анизотропии пространства, в котором он действует. Основной является интерполяционная теорема для пространств типа H и B разной анизотропии.

В работе вводятся и исследуются некоторые пространства $B_{p,q}^s(\mu; R_n)$ типа Никольского-Бесова , которые при конкретизации функции $\mu(\xi)$ совпадают с классическими (изотропными или анизотропными) пространствами Никольского-Бесова (см. [1]).

Изучаемые B-пространства естественным образом возникают при исследовании краевых задач для гипоэллиптических дифференциальных операторов в соответствующих пространствах типа Соболева-Лиувилля. Рассматриваемые H-пространства исследованы в [2] (особое внимание уделено случаю $p = 2$).

Пространства $H_p^s(\mu; R_n)$ и $B_{p,q}^s(\mu; R_n)$, порожденные вполне правильным многогранником $\mathcal{N}$ введены и изучены в [3,4]. В этих работах основные исследования (теоремы вложения разных метрик и разных измерений, теоремы интерполяции и так далее) проводились для фиксированной функции $\mu(\xi)$, отвечающей фиксированному многограннику $\mathcal{N}$. В настоящей работе рассматриваются пространства разной анизотропии. Устанавливается независимость нулевых классов от порождающей функции и доказывается свойство изоморфизма для оператора I типа лиувиллевского дифференцирования, анизотропность которого отличается от анизотропии пространства, в котором он рассматривается .

Основной является Теорема 7, в которой доказываются интерполяционные утверждения для пространств типа Никольского-Бесова и Соболева-Лиувилля разной анизотропии.

1°. Будем пользоваться следующими обозначениями :

R_n – n-мерное евклидово пространство,

Z_n^+ – множество мультииндексов, т.е. векторов с целыми неотрицательными компонентами.

Для $\xi \in R_n$, $\alpha \in Z_n^+$ положим

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \quad \xi^\alpha = \prod_{i=1}^{n} \xi_i^{\alpha_i}, \quad |\xi| = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{1/2}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}.$$

Обозначим через G_o^+ множество положительных функций $\mu(\xi)$ бесконечно дифференцируемых вне начала координат и таких, что

$$\lim_{|\xi| \to 0} \mu(\xi) = 0, \quad \lim_{|\xi| \to +\infty} \mu(\xi) = +\infty, \quad |\xi^\alpha D^\alpha \mu(\xi)| \le c\mu(\xi), \quad c > 0; \tag{1}$$

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \quad \alpha_i = 0, 1, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Функции, удовлетворяющие оценке (1), рассматривались в работах X. Трибеля (см. [5]). Далее все пространства типа H и B будут рассматриваться в R_n.

Определение 1. Пусть $1 < p < \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\mu \in G_o^+$. Положим

$$H_p^s(\mu) \equiv H_p^s(\mu; R_n) = \left\{ f \in S' : ||f||_{H_p^s} = ||F^{-1}[(1+\mu^2)^{s/2} F f]||_{L_p(R_n)} < \infty \right\},$$

где S' – пространство, сопряженное к пространству Шварца S, и F – прямое преобразование Фурье. Если для $\mu \in G_o^+$ функция $(1 + \mu^2(\xi))^{s/2}$ не является бесконечно дифференцируемой в R_n, то пространство $H_p^s(\mu)$ определяется как пополнение пространства Шварца S. Доказательства утверждений для

H-пространств этого типа получаются предельным переходом из соответствующих соотношений для функций класса Шварца. Такая техника широко известна, поэтому при доказательстве утверждений мы не будем вдаваться в подробности.

Определение 2. Пусть $\mu \in G_o^+$. Через $\Phi(\mu) = \Phi(\mu; R_n)$ обозначим множество систем функций $\{\varphi_k(\mu, x)\}_{k=0}^{\infty}$ обладающих следующими свойствами

а) $\varphi_k \in \mathcal{S}, \quad (F\varphi_k)(\xi) \geq 0, \quad k = 0, 1, \ldots;$

б) $\operatorname{supp} F\varphi_o \subset \{\xi \in R_n; \mu(\xi) \leq 2\},$

$\operatorname{supp} F\varphi_k \subset \{\xi \in R_n; 2^{k-1} \leq \mu(\xi) \leq 2^{k+1}\}, \quad k = 1, 2, \ldots;$

$$\text{в)} \quad \|F\varphi_k\|_{M_p^q} \leq c, \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{2}$$

$$\text{г)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (F\varphi_k)(\xi) \equiv 1, \quad \xi \in R_n, \tag{3}$$

где M_p^q – множество мультипликаторов Фурье типа (p, q). Пример системы $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu)$ приведен в [3].

Определение 3. Пусть $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\mu \in G_o^+$, $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu)$. Положим

$$B_{p,q}^s(\mu) \equiv B_{p,q}^s(\mu; R_n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'; \|f\|_{B_{p,q}^s} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} \|f * \varphi_k\|_{L_p(R_n)}^q \right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

Пространства $B_{p,\infty}^s(\mu)$ определяются обычным образом.

Как и в случае классических пространств Бесова $B_{p,q}^s(R_n)$ нетрудно убедиться, что пространства $B_{p,q}^s(\mu)$ не зависят от выбора системы $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu)$.

Замечание 1. Обобщениями пространств Никольского-Бесова (а также Лизоркина-Трибеля) занимались многие авторы. Отметим работы Трибеля, Штёкерта, Гольдмана, Калябина. В работах [6 – 8] был развит метод построения $\mathcal{B}$- и F-пространств с помощью покрытий R_n прямоугольными параллелепипедами со сторонами, параллельными координатным осям. Частными реализациями такого метода являются классические изотропные и анизотропные пространства Никольского-Бесова и Лизоркина–Трибеля.

Следуя рассуждениям теоремы 6.2.1 из [5], нетрудно убедиться, (во всяком случае при $p = 2$, $q \neq 2$) что рассматриваемые здесь B-пространства не могут быть характеризованы посредством этого метода.

2°. Для банаховых пространств A_o, A_1 символы $[A_o, A_1]_\theta$, $(A_o, A_1)_{\theta,q}$ означают интерполяционные пространства между A_o и A_1, полученные соответственно "комплексным" и "вещественным" методами.

В работе [3] доказана интерполяционная теорема (см. теорему 1) для $H_p^s(\mu)$, где функция μ порождена полным многогранником $\mathcal{N}$ (см. [9]). То же самое доказательство годится и для функции $\mu \in G_o^+$. То есть справедлива

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s_o \neq s_1 < \infty$, $s = (1-\theta)s_o + \theta s_1$, $\mu \in G_o^+$. *Тогда*

$$\left(H_p^{s_o}(\mu), H_p^{s_1}(\mu)\right)_{\theta,q} = B_{p,q}^s(\mu).$$

Поскольку H-пространства банаховы (см. [2]), то из Теоремы 1 и из теоремы 3.4.2 из [10] следует полнота B-пространств. Далее, поскольку пространство $\mathcal{S}$ плотно в $H_p^s(\mu)$, $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$ (см. [2]), то из тех же Теорем 1 и 3.4.2 следует, что $\mathcal{S}$ плотно и в $B_{p,q}^s(\mu)$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$. Дальнейшая цель этого пункта доказательство интерполяционных формул для B-пространств.

Определение 4. (см. [10]) Пусть A_o, A_1 два банаховых пространства. Пространство A_1 называется *ретрактом пространства* A_o если существуют операторы $S \in L(A_1, A_o)$, $R \in L(A_o, A_1)$ такие, что $RS = E$ (тождественный оператор из $L(A_1, A_1)$). При этом операторы R и S называются *ретракцией* и *коретракцией* соответственно.

Пусть $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu)$, $\mu \in G_o^+$. Положим

$$\overline{\varphi}_k = \sum_{j=-2}^{2} \varphi_{k+j},$$

где $\varphi_k \equiv 0$ при $k < 0$. Тогда из (3), (5) имеем

$$\overline{\varphi}_k * \varphi_k = \varphi_k, \quad k = 0, 1, \dots \tag{4}$$

Далее для $f \in S'$ и $g = \{g_j\}_{j=0}^{\infty}$, $g_j \in S'$ положим

$$Sf = \{\varphi_j * f\}_{j=0}^{\infty}, \quad Rg = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\varphi}_j * g_j. \tag{5}$$

Оператор R определен только на тех последовательностях $\{g_j\}$, для которых ряды, задающие Rg сходятся в S'.

Теорема 2. *Пусть $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\mu \in G_o^+$. Тогда пространство $B_{p,q}^s(\mu)$ является ретрактом пространства $l_q^s(L_p)$. Соответствующие операторы R и S определяются соотношениями (5).*

Доказательство. Заметим, что

$$||f||_{B_{p,q}^s} = ||Sf||_{l_q^s(L_p)}, \qquad ||Rg||_{B_{p,q}^s} \leq c||g||_{l_q^s(L_p)}.$$

Таким образом

$$S \in L\left(B_{p,q}^s(\mu), l_q^s(L_p)\right), \quad R \in L\left(l_q^s(L_p), B_{p,q}^s(\mu)\right).$$

Так как из соотношений (3), (4) следует, что

$$R(Sf) = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\varphi}_j * (Sf)_j = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\varphi}_j * \varphi_j * f = f.$$

то $B_{p,q}^s(\mu)$ есть ретракт пространства $l_q^s(L_p)$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $0 < \theta < 1$, $s^* = (1-\theta)s_o + \theta s_1$, $\mu \in G_o^+$, $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1-\theta}{p_o} + \dfrac{\theta}{p_1}$, $\dfrac{1}{q^*} = \dfrac{1-\theta}{q_o} + \dfrac{\theta}{q_1}$. Тогда*

а) для $-\infty < s_o \neq s_1 < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \leq r, q_o, q_1 \leq \infty$

$$\left(B_{p,q_o}^{s_o}(\mu), B_{p,q_1}^{s_1}(\mu)\right)_{\theta,r} = B_{p,r}^{s^*}(\mu);$$

б) для $-\infty < s_o \neq s_1 < \infty$, $1 < p_o, p_1 < \infty$, $1 \leq q_o, q_1 \leq \infty$, $p^* = q^*$

$$\left(B_{p_o,q_o}^{s_o}(\mu), B_{p_1,q_1}^{s_1}(\mu)\right)_{\theta,p^*} = B_{p^*,q^*}^{s^*}(\mu);$$

в) для $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q_o \neq q_1 \leq \infty$

$$\left(B_{p,q_o}^{s}(\mu), B_{p,q_1}^{s}(\mu)\right)_{\theta,q^*} = B_{p,q^*}^{s}(\mu);$$

г) для $-\infty < s_o, s_1 < \infty$, $1 < p_o, p_1 < \infty$, $1 \le q_o, q_1 \le \infty$

$$[B^{s_o}_{p_o,q_o}(\mu), B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mu)]_\theta = B^{s^*}_{p^*,q^*}(\mu).$$

Доказательство. Теорема 6.4.2 из [10] и наша Теорема 2 позволяют свести доказательство Теоремы 3 к доказательству соответствующих утверждений для пространств $l^s_q(L_p)$. Утверждения а) и в) получаются из теоремы 5.6.1, б) – из теоремы 5.6.2 а г) – из теоремы 5.6.3 книги [10].

3°. Докажем независимость нулевых классов от порождающей функции. Для анизотропных B-классов этот результат приведен в [11].

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $\mu_o, \mu_1 \in G^+_o$. *Тогда*

$$B^o_{p,q}(\mu_o) = B^o_{p,q}(\mu_1).$$

Доказательство. На основании (2), (3) имеем

$$\|f\|_{B^{-r_i}_{p,\infty}(\mu_o)} = \sup_k 2^{-kr_i}\|f * \varphi_k(\mu_o)\|_{L_p} \le c\|f\|_{L_p} \le$$

$$\le c\sum_{k=0}^{\infty} 2^{kr_i}\|f * \varphi_k(\mu_1)\|_{L_p} = c\|f\|_{B^{r_i}_{p,1}(\mu_1)}, \tag{6}$$

где $\{\varphi_k(\mu_i)\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu_i)$, $r_i > 0$, $i = 0, 1$ и постоянная c не зависит от r_i. Интерполируя на основании утверждения а) Теоремы 3, при $1 \le q \le \infty$, $0 < \theta < 1$, $r = (1-\theta)r_o + \theta r_1$ из оценки (6), получаем

$$\|f\|_{B^{-r}_{p,q}(\mu_o)} \le c\,\|f\|_{B^r_{p,q}(\mu_1)}.$$

Устремляя r к нулю (c не зависит от r) получаем оценку для норм нулевых классов. Теорема 4 доказана.

Для дальнейшего полезной оказывается следующая

Теорема 5. *Пусть* $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $r > 0$, $\mu \in G^+_o$. *Тогда*

$$B^s_{p,q}(\mu^r) = B^{sr}_{p,q}(\mu). \tag{7}$$

Доказательство. Соотношение (7) получается с помощью Теоремы 1 с использованием следующих очевидных соотношений

$$H^{s_o}_p(\mu_r) = H^{s_o r}_p(\mu), \quad H^{s_1}_p(\mu^r) = H^{s_1 r}_p(\mu).$$

Отметим, что Теорема 5 могла бы быть получена и из теоремы вложения разных метрик для B-пространств разной анизотропии (Теорема 6 из [12]). Из этой же теоремы следует, что $B^1_{p,q}(\mu_o) = B^1_{p,q}(\mu_1)$ если $\mu_o \sim \mu_1$, то есть

$$(1+\mu_o^2)^{1/2}(1+\mu_1^2)^{-1/2} \in M_p^p, \quad (1+\mu_1^2)^{1/2}(1+\mu_0^2)^{-1/2} \in M_p^p.$$

Поэтому в дальнейшем, пространства порожденные эквивалентными функциями, мы не будем различать.

Пусть $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\lambda)$. Рассмотрим наряду с этой систему $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$, где

$$\psi_o = \varphi_o, \quad \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{2^{-ks} I_\lambda \varphi_k\right\}_{k=1}^{\infty}, \quad -\infty < s < \infty.$$

Здесь через I_λ обозначен оператор

$$I_\lambda \varphi = F^{-1}\{(1+\lambda^2)^{1/2} F\varphi\}.$$

Ясно, что система $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям а), б) и неравенству

$$\sum_{k=0}^{\infty} (F\psi_k)(\xi) \geq c > 0.$$

Кроме того, теорема Лизоркина о мультипликаторах (см. [13]) показывает, что для системы $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ выполняется оценка (2).

Докажем свойство изоморфизма для оператора I. Ниже знак $\sim$ между нормами означает их эквивалентность, то есть наличие двусторонней оценки. Для простоты мы будем писать $B_1 \sim^\nu B_2$, если $||f||_{B_1} \sim ||I_\nu f||_{B_2}$.

Теорема 6. *Пусть функция $\mu(\xi)$ бесконечно дифференцируема вне начала координат и имеет полиномиальный рост. Положим $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\nu, \nu \cdot \mu^{-1} \in G_o^+$. Тогда оператор I_μ осуществляет непрерывное взаимнооднозначное отображение $B^1_{p,q}(\nu)$ на $B^1_{p,q}(\nu \cdot \mu^{-1})$.*

Доказательство. Имеем для $f \in L_p$

$$||I_\mu f||_{B^1_{p,q}(\nu\cdot\mu^{-1})} \sim ||I_\nu f||_{B^o_{p,q}(\nu\cdot\mu^{-1})}. \tag{8}$$

В (8) мы использовали приведенные выше соображения и свойства системы $\{\varphi_k\}$ (см. Определение 2). Тогда

$$B^1_{p,q}(\nu) \sim^\nu B^o_{p,q}(\nu). \tag{9}$$

Теперь Теорема 4 и соотношения (8), (9) доказывают Теорему 6.

Теорема 7. *Пусть* $0 < \theta < 1$, $1 < p_o, p_1, p < \infty$, $1 \le r, q_o, q_1 \le \infty$, $\frac{1}{p^*} = \frac{1-\theta}{p_o} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q^*} = \frac{1-\theta}{q_o} + \frac{\theta}{q_1}$, *и пусть* $\mu_o, \mu_1, \mu_o\mu_1^{-1} \in G_o^+$. *Тогда*

а) $\left(B^1_{p,q_o}(\mu_o), B^1_{p,q_1}(\mu_1)\right)_{\theta,r} = B^1_{p,r}(\mu_o^{1-\theta} \cdot \mu_1^{\theta})$,

б) $\left(B^1_{p_o,q_o}(\mu_o), B^1_{p_1,q_1}(\mu_1)\right)_{\theta,p^*} = B^1_{p^*,q^*}(\mu_o^{1-\theta} \cdot \mu_1^{\theta})$,

в) $\left[B^1_{p_o,q_o}(\mu_o), B^1_{p_1,q_1}(\mu_1)\right]_{\theta} = B^1_{p^*,q^*}(\mu_o^{1-\theta} \cdot \mu_1^{\theta})$,

г) $\left(H^1_p(\mu_o), H^1_p(\mu_1)\right)_{\theta,r} = B^1_{p,r}(\mu_o^{1-\theta} \cdot \mu_1^{\theta})$.

Доказательство. Положим

$$s_o > s_1 > 0, \quad s = (1-\theta)s_o + \theta s_1, \quad \lambda = (\mu_1^{s_o} \cdot \mu_o^{-s_1})^{\frac{1}{s_o - s_1}}, \quad \rho = (\mu_o \cdot \mu_1^{-1})^{\frac{1}{s_o - s_1}}.$$

Тогда

$$\mu_i = \lambda \cdot \rho^{s_i}, \quad i = 0,1; \quad \rho \in G_o^+.$$

Ясно, что функция $\lambda(\xi)$ бесконечно дифференцируема вне начала координат и имеет полиномиальный рост. Из Теоремы 6 для $i = 0,1$ имеем

$$B^1_{p,q}(\mu_i) \sim^{\lambda} B^1_{p,q}(\mu_i \lambda^{-1}),$$

то есть (см. Теорему 5)

$$B^1_{p,q}(\mu_i) \sim^{\lambda} B^{s_i}_{p,q}(\rho), \quad i = 0,1.$$

Тогда (интерполяционное свойство)

$$\left(B^1_{p,q_o}(\mu_o), B^1_{p,q_1}(\mu_1)\right)_{\theta,r} \sim^{\lambda} \left(B^{s_o}_{p,q_o}(\rho), B^{s_1}_{p,q_1}(\rho)\right)_{\theta,r}, \tag{10}$$

$$\left(B^1_{p_o,q_o}(\mu_o), B^1_{p_1,q_1}(\mu_1)\right)_{\theta,p^*} \sim^{\lambda} \left(B^1_{p_o,q_o}(\rho), B^1_{p_1,q_1}(\rho)\right)_{\theta,p^*}, \tag{11}$$

$$\left[B^1_{p_o,q_o}(\mu_o), B^1_{p_1,q_1}(\mu_1)\right]_{\theta} \sim^{\lambda} \left[B^{s_o}_{p_o,q_o}(\rho), B^{s_1}_{p_1,q_1}(\rho)\right]_{\theta}. \tag{12}$$

Используя Теоремы 3, 5, 6 из (10) – (12) получим

$$\left(B^1_{p,q_o}(\mu_o), B^1_{p,q_1}(\mu_1)\right)_{\theta,r} \sim^{\lambda} B^s_{p,r}(\rho),$$

$$B^1_{p,r}(\mu_o^{1-\theta} \cdot \mu_1^{\theta}) = B^1_{p,r}(\lambda \cdot \rho^s) \sim^{\lambda} B^s_{p,r}(\rho); \tag{13}$$

$$\left(B^1_{p_o,q_o}(\mu_o), B^1_{p_1,q_1}(\mu_1)\right)_{\theta,p^*} \sim^{\lambda} B^s_{p^*,q^*}(\rho),$$

$$B^1_{p^*,q^*}(\mu_o^{1-\theta}\cdot\mu_1^{\theta}) = B^1_{p^*,q^*}(\lambda\cdot\rho^{\theta}) \sim^{\lambda} B^{s}_{p^*,q^*}(\rho);$$

$$\left[B^1_{p_o,q_o}(\mu_o), B^1_{p_1,q_1}(\mu_1)\right]_{\theta} \sim^{\lambda} B^{s}_{p^*,q^*}(\rho).$$

Соотношения а) – в) доказаны.

Нетрудно убедиться (см. теорему о мультипликаторах в [13]), что

$$H^1_p(\mu_i) \sim^{\lambda} H^{s_i}_p(\rho), \quad i = 0, 1.$$

Интерполируя, на основании Теоремы 1 получим

$$\left(H^1_p(\mu_o), H^1_p(\mu_1)\right)_{\theta,r} \sim^{\lambda} B^{s}_{p,r}(\rho). \tag{14}$$

Соотношения (13) и (14) доказывают утверждение г). Теорема 7 доказана.

Замечание 2. В а) – г) справа и слева верхний индекс можно заменить на (-1). Доказательство полученных формул аналогично доказательству утверждений а) – г).

Замечание 3. Пусть функции μ_o, μ_1 порождены полными многогранниками $\mathcal{N}_o, \mathcal{N}_1$, т.е.

$$\mu_o(\xi) = \left(\sum_{j=1}^{N_o} \xi^{2\alpha^j}\right)^{1/2}, \quad \mu_1(\xi) = \left(\sum_{i=1}^{N_1} \xi^{2\beta^i}\right)^{1/2},$$

где $\alpha^j = (\alpha^j_1, ..., \alpha^j_n)$, $\beta^i = (\beta^i_1, ..., \beta^i_n)$ суть вершины многогранников $\mathcal{N}_o, \mathcal{N}_1$ и

$$\alpha^j_k \geq 0, \quad \beta^i_k \geq 0, \quad j = 1, ..., N_o, \quad i = 1, ..., N_1, \quad k = 1, ..., n.$$

Тогда условие $\mu_o\mu_1^{-1} \in G_o^+$ Теоремы 7 означает, в частности, что $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_o$ и некоординатные грани многогранников не имеют общих точек.

Замечание 4. Аналогично можно доказать формулу "комплексной" интерполяции. (см. [5, 14, 15]) :

$$\left[H^1_{p_o}(\mu_o), H^1_{p_1}(\mu_1)\right]_{\theta} = H^1_{p^*}(\mu_o^{1-\theta}\cdot\mu_1^{\theta}),$$

$$1 < p_o, p_1 < \infty, \quad 0 < \theta < 1, \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1-\theta}{p_o} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \mu_o, \mu_1, \mu_o\mu_1^{-1} \in G_o^+.$$

ABSTRACT. The paper considers spaces $H^s_p(\mu; R_n)$ of Sobolev–Liouville and $B^s_{p,q}(\mu; R_n)$ of Nikolp1skogo-Besova types, which generalize the classical H and B spaces. Independence of zero class from the function μ is proved and a property of isomorphism for Liouville differential type operator is demonstrated. The main result is an interpolation theorem for spaces H and B type with differing anisotropies.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Никольский, Приближение Функций Многих Переменных и Теоремы Вложения, М. Наука, 1977.
2. А. Г. Волевич, Б. П. Панеях, "Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения", УМН, том 20, № 1, стр. 3 – 74, 1965.
3. А. Г. Багдасарян, "Об интерполяции и следах функций из некоторых анизотропных функциональых пространств", Изв. АН Армении, Математика, том 23, № 4, стр. 353 – 365, 1988.
4. А.Г.Багдасарян, "Интерполяция и следы функций из некоторых функциональных пространств", Докл. АН Арм.ССР, том 87, № 5, стр. 207 – 211, 1988.
5. H. Triebel, "General function spaces III. (spaces $B_{p,q}^{g(x)}$ and $F_{p,q}^{g(x)}$, $1 < p < \infty$: basic properties)", Analysis Mathematica, vol. 3, pp. 221 – 249, 1977.
6. B. Stöckert, H. Triebel, "Decomposition methods for function spaces of $B_{p,q}^s$ type and $F_{p,q}^s$ type", Math. Nachr., vol. 89, pp. 247 – 267, 1979.
7. H. Triebel, Fourier Analysis and Function Spaces, Teubner Verl., Leipzig, 1977.
8. М. Л. Гольдман, "Метод покрытий для описания общих пространств типа Бесова", Труды МИАН СССР, том 156, стр. 47 – 81, 1980.
9. В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, том 91, стр. 59 – 81, 1967.
10. Й. Берг, Й. Лёфстрём, Интерполяционные Пространства. Введение, М. Мир, 1980.
11. П. И. Лизоркин, "Обобщенные Гёльдеровы пространства $B_{p,q}^r$ и их соотношения с пространствами Соболева $L_p^{(r)}$", Сиб. Мат. ж., том 9, стр. 1127 – 1152, 1968.
12. А. Г. Багдасарян, "Теоремы вложения и интерполяция для обобщенных пространств Никольского-Бесова ", Межвуз. Сбор. Математика, том 6, стр. 218 – 234, 1988.
13. П. И. Лизоркин, "(L_p, L_q)-мультипликаторы интегралов Фурье", ДАН СССР, том 152, стр. 808 – 811, 1963.
14. M. Schecter, "Interpolation spaces by complex methods", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 72, pp. 526 – 533, 1966.
15. A. Favini, "Su una estensione del metodo d'interpolazione complesso", Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, vol. 47, pp. 243 – 298, 1972.

29 Мая 1991 Ереванский государственный университет