О ТОЧНЫХ ПОПЕРЕЧНИКАХ КЛАССА ФУНКЦИЙ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХСЯ СВЁРТКОЙ

С. А. Айунц

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 27, № 4, 1992

В работе вычислены колмогоровский, бернштейновский и линейный точные n–поперечники функционального класса $W_\infty^{*K}(I) = \{x(\cdot) \mid \quad x(t) = (K * u)(t),\ t \in I,\ u(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}),\ ||u(\cdot)||_{L_\infty(\mathbb{R})} \le 1\}$ в пространстве $L_\infty(I)$, $I = [0,1]$, $K(\cdot)$ – непрерывная и интегрируемая на вещественной оси $\mathbb{R}$ функция такая, что $\int_{-\infty}^{+\infty} K(t)\,dt = 1$ и функция $F(t,\xi) = K(t-\xi)$ строго вполне положительна на $\mathbb{R}^2$. Доказано, что значения поперечников равны норме сверточного совершенного K сплайна, наименее уклоняющегося от нуля в метрике $L_\infty(I)$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей статьи вычислить точные n-поперечники класса

$$W_\infty^{*K}(I) = \{x(\cdot) \mid \quad x(t) = (K * u)(t),\ t \in I,\ u(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}),\ ||u(\cdot)||_{L_\infty(\mathbb{R})} \le 1\},$$

в пространстве $L_\infty(I)$, $I = [0,1]$, $K(\cdot)$ – непрерывная и интегрируемая на вещественной оси $\mathbb{R}$ функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi)\,d\xi = 1 \quad \text{и} \quad F(t,\xi) := K(t-\xi) \quad \text{строго вполне положительна,} \tag{1}$$

а $(K * u)(\cdot)$ обозначает свёртку функций $K(\cdot)$ и $u(\cdot)$.

Напомним (см. [1]), что функция $F(\cdot)$ называется строго вполне положительной на $\mathbb{R}^2$, если

$$F\begin{pmatrix} t_1, & \dots & ,t_n \\ \xi_1, & \dots & ,\xi_n \end{pmatrix} := \det\left(F(t_i,\xi_j)\right)_{i,j=1}^n > 0,$$

для любых действительных $t_1 < \dots < t_n$, $\xi_1 < \dots < \xi_n$ и $n \in \mathbb{N}$.

Статья основана на работе В. М. Тихомирова [2], которая получила дальнейшее развитие в работах С. А. Мичелли и А. Пинкуса (см. [1]). Мы докажем, что точные n-поперечники класса $W_\infty^{*K}(I)$ в $L_\infty(I)$ равны значению следующей экстремальной задачи

$$(P) \qquad \|1 + 2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \Phi(t-\theta_i)\|_{C(I)} \to \inf; \quad -\infty < \theta_1 \le \theta_2 \le \ldots \le \theta_n < +\infty,$$

где $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} K(\xi)\,d\xi$, а минимум ищется по всевозможным точкам θ_i, $1 \le i \le n$.

Эта задача чебышевского типа и была решена в [2] с использованием топологических методов. Здесь мы приводим экстремальное решение этой задачи. В нашем случае удаётся реализовать метод предложенный В. М. Тихомировым для полиномиальных совершенных сплайнов (см. [2], [4]).

При решении задачи (P), мы используем необходимые и достаточные условия минимума в выпуклых задачах, теорему об очистке и основную теорему алгебры для свёрточных совершенных K-сплайнов. Последняя теорема доказана в статье [5], с использованием свойств чебышевских совершенных K-сплайнов. Здесь приведено другое, более короткое доказательство этого результата.

Отметим, что топологический подход в подобных задачах достаточно эффективен (см. [1], [6], [7]), но экстремальный подход имеет преимущество, так как он универсален для широкого класса экстремальных задач теории приближений.

§1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Прежде всего приведём определения колмогоровского, линейного и бернштейновского n-поперечников.

Пусть X – линейное нормированное пространство и W – некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество X. Величина

$$d_n(W,X) = \inf_{L_n \in \mathrm{Lin}_n(X)} \sup_{x\in W} \inf_{y \in L_n} \|x-y\|,$$

где нижняя грань берётся по всем подпространствам L_n размерности n пространства X, называется колмогоровским n-поперечником. Подпространство L_n при котором достигается нижняя грань называется оптимальным для $d_n(W,X)$.

Бернштейновским n-поперечником называется величина

$$b_n(W,X) = \sup_{X_{n+1}} \sup\{\lambda : \quad \lambda S(X_{n+1}) \subset W\},$$

где верхняя грань берётся по всем $(n+1)$-мерным подпространствам X_{n+1} из X, а $S(\cdot)$ – единичный шар в X_{n+1}.

Линейным n-поперечником называется величина

$$\lambda_n(W,X) = \inf_{L_n \in \mathrm{Lin}_n(X), \Lambda \in \mathcal{L}(X,L_n)} \sup_{x\in W} \|x - \Lambda x\|,$$

где нижняя грань берётся по всем подпространствам X конечной размерности $\leq n$ и всем линейным операторам из X в L_n.

Пусть $K(\cdot)$ удовлетворяет условию (1), $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} K(\xi)\,d\xi$, и пусть $\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n$ произвольные точки заданные на $\mathbb{R}$.

Определение 1. Функция $x(\cdot)$ называется свёрточным совершенным K-сплайном с узлами в точках θ_i, если $x(t) = (K * u_\theta)(t)$, где $u_\theta(t) = (-1)^i$ для $\theta_{i-1} \leq t < \theta_i$, $1 \leq i \leq n+1 (\theta_0 := -\infty, \theta_{n+1} := +\infty)$.

Нетрудно убедится, что свёрточный совершенный K- сплайн можно представить в следующей форме

$$x(t) = 1 + 2\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \Phi(t-\theta_i). \tag{2}$$

Определение 2. Непрерывная функция $x(\cdot)$ имеет "n-альтернанс" на отрезке $I = [0,1]$ (и пишем $\mathrm{Alt}(x(\cdot), I) = n$), если существуют точки $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{n+1} \leq 1$, в которых $|x(\tau_i)| = \|x(\cdot)\|_{C(I)}$ и $x(\tau_i)\,x(\tau_{i+1}) < 0$, $1 \leq i \leq n$ и нет систем из большего чем $n+1$ элементов, обладающих описанным свойством.

Обозначим через $Z(x(\cdot), I)$ число простых нулей непрерывной функции $x(\cdot)$ на I а через $S(u(\cdot), \mathbb{R})$ число перемен знаков кусочно непрерывной функции $u(\cdot)$ на $\mathbb{R}$. Пусть $\{\theta_i\}_{i=1}^{n}$ и $\{\eta_i\}_{i=1}^{m}$ две системы точек на $\mathbb{R}$. Определим следующие две кусочно постоянные функции : $u_\theta(t) = (-1)^i$ для $t \in [\theta_i, \theta_{i+1})$, $0 \leq i \leq n$ и $u_\eta(t) = (-1)^j$ для $t \in [\eta_j, \eta_{j+1})$, $0 \leq j \leq m$ $(\theta_0 = \eta_0 = -\infty$, $\theta_{n+1} = \eta_{m+1} = +\infty)$.

Доказательство следующих лемм можно найти в [1].

Лемма 1.

$$S(u_\theta(\cdot) \pm u_\eta(\cdot), \mathbb{R}) \leq \min(n, m),$$

если $m = n$, *то* $S(u_\theta(\cdot) - u_\eta(\cdot), \mathbb{R}) \leq n - 1$.

Лемма 2. *Пусть* $K(\cdot)$ *удовлетворяет условию (1). Тогда имеет место неравенство*

$$Z\left((K * u)(\cdot), \mathbb{R}\right) \leq S(u(\cdot), \mathbb{R}). \tag{3}$$

§2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ ДЛЯ СВЁРТОЧНЫХ СОВЕРШЕННЫХ K- СПЛАЙНОВ

Теорема 1. *Для любых* $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ *существует единственный сверточный совершенный* K*-сплайн* $x_\theta(\cdot) = (K * u_\theta)(\cdot)$ *с* n *узлами в* $\theta_1 < \ldots < \theta_n$ *такой, что* $x_\theta(\alpha_j) = 0$, $1 \leq j \leq n$.

Доказательство. Для простоты предположим, что все α_j принадлежат $I = [0,1]$ для всех j (в противном случае рассмотрим отрезок $[\alpha_1, \alpha_n]$). Для $n = 1$ утверждение очевидно. При $n > 1$ рассмотрим единичную сферу в $\mathbb{R}^{n+1}$

$$O^n = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} | \quad \sum_{i=1}^{n+1} |z_i| = 1\}$$

относительно нормы $||z||_1 = \sum\limits_{i=1}^{n+1} |z_i|$. Каждой точке $z \in O^n$ ставим в соответствие следующий набор точек отрезка I :

$$\widetilde{t}_i(z) = \sum_{l=0}^{i} |z_l|, \; 1 \leq i \leq n+1, \; z_0 = 0, \quad \widetilde{t}_{n+1}(z) = 1.$$

Далее обозначим

$$t_i(z) = \widetilde{t}_i(z), \quad 2 \leq i \leq n-1,$$

$$t_1(z) = \begin{cases} \widetilde{t}_1(z), & z_1 z_2 < 0, \\ -\widetilde{t}_1(z) / (\widetilde{t}_2(z) - \widetilde{t}_1(z)), & z_1 z_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$t_n(z) = \begin{cases} \widetilde{t}_n(z), & z_n z_{n+1} < 0, \\ \widetilde{t}_n(z) / (\widetilde{t}_n(z) - \widetilde{t}_{n-1}(z)), & z_n z_{n+1} \geq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим следующую функцию на $\mathbb{R}$

$$u(t,z)=\begin{cases}-\operatorname{sign} z_2, & -\infty < t < t_1(z),\\ \operatorname{sign} z_i, & t_{i-1}(z)\le t < t_i(z),\ 2\le i\le n,\\ -\operatorname{sign} z_n, & t_n(z)\le t<+\infty.\end{cases}$$

Заметим, что эта функция $u(t,z)$ меняет знак на $\mathbb{R}$ не более чем n раз, причём имеет не более двух перемен знака вне отрезка I.

Положим

$$x(t,z)=(K * u(\cdot,z))(t).$$

Определим отображение $F\colon O^n \mapsto \mathbb{R}^n$ следующим способом

$$F(z_1,...,z_{n+1})=(x(\alpha_1,z),...,x(\alpha_n,z)).$$

Нетрудно проверить, что F нечётное и непрерывное отображение. Следовательно, по теореме Борсука (см., например, [4]) получим, что существует $\bar z\in O^n$ такое, что $F(\bar z)$, т.е. $x(\alpha_j,\bar z)=0$, $1\le j\le n$. Теорема доказана.

§3. ЧЕБЫШЕВСКИЕ СВЁРТОЧНЫЕ СОВЕРШЕННЫЕ K-СПЛАЙНЫ

В этом параграфе мы докажем существование и единственность решения экстремальной задачи

$$(P)\qquad \|1+2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\,\Phi(t-\theta_i)\|_{C(I)}\to \inf;\quad -\infty<\theta_1\le\theta_2\le...\le\theta_n<+\infty,$$

и опишем свойства однозначно характеризующие решение.

Лемма 3. *Решение задачи (P) существует.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(\theta_1,...,\theta_n)=\|1+2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\,\Phi(t-\theta_i)\|_{C(I)}$$

определённую на расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}}^n=\mathbb{R}^n\cup\{\pm\infty\}$.

Нетрудно убедится, что функция f непрерывна. Следовательно, Лемма 3 является прямым следствием теоремы Вейерштрасса.

Пусть $\hat x(t)=1+2\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^i\,\Phi(t-\bar\theta_i)$ – решение задачи (P).

Обозначим через

$$L_m^K=\{y(\cdot)|\quad y(t)=\sum_{i=1}^{m}y_i\,K(t-\bar\theta_i),\ y_i\in\mathbb{R}\}$$

m-мерное подпространство K-полиномов.

Лемма 4. *Наилучшее приближение* $\hat{x}(\cdot)$ *подпространством* L_m^K *в метрике* $C(I)$ *равно* $\|\hat{x}(\cdot)\|_{C(I)}$, *т.е.*

$$d(\hat{x}(\cdot), L_m^K; C(I)) := \inf_{y(\cdot)\in L_m^K} \|\hat{x}(\cdot) - y(\cdot)\|_{C(I)} = \|\hat{x}(\cdot)\|_{C(I)}.$$

Доказательство. Предположим, что существует K-полином $\overline{y}(t) = = 2\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\overline{y}_i K(t-\hat{\theta}_i)$ такой, что для некоторого $\delta_0 > 0$

$$\|\hat{x}(\cdot) + \overline{y}(\cdot)\|_{C(I)} = \|\hat{x}(\cdot)\|_{C(I)} - \delta_0. \tag{4}$$

Обозначим

$$x_\varepsilon(t) = 1 + 2\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\Phi(t - \hat{\theta}_i - \varepsilon\overline{y}_i).$$

По формуле Лагранжа существуют числа $\widetilde{\varepsilon}_i \in (0,\varepsilon]$, $1 \le i \le m$ такие, что

$$x_\varepsilon(t) = 1 + 2\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\left(\Phi(t-\hat{\theta}_i) - \varepsilon\overline{y}_i\, K(t - \hat{\theta}_i - \widetilde{\varepsilon}_i\overline{y}_i)\right) = \hat{x}(t) + \varepsilon\widetilde{y}_\varepsilon(t), \tag{5}$$

где

$$\widetilde{y}_\varepsilon(t) = 2\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\overline{y}_i\, K(t - \hat{\theta}_i - \widetilde{\varepsilon}_i\overline{y}_i).$$

Далее, из непрерывности функции $K(\cdot)$, для $\delta_0 > 0$ найдётся $\varepsilon \in (0,1)$ такое, что

$$\|\overline{y}(\cdot) - \widetilde{y}_\varepsilon(\cdot)\|_{C(I)} < \delta_0.$$

Используя соотношения (4) и (5), получим

$$\|x_\varepsilon(\cdot)\|_{C(I)} = \|(1-\varepsilon)\hat{x}(\cdot) + \varepsilon(\hat{x}(\cdot) + \widetilde{y}_\varepsilon(\cdot))\|_{C(I)} \le$$

$$\le (1-\varepsilon)\|\hat{x}(\cdot)\|_{C(I)} + \varepsilon\|\hat{x}(\cdot) + \overline{y}(\cdot)\|_{C(I)} + \varepsilon\|\overline{y}(\cdot) - \widetilde{y}_\varepsilon(\cdot)\|_{C(I)} < \|\hat{x}(\cdot)\|_{C(I)},$$

что противоречит минимальности $\hat{x}(\cdot)$. Лемма доказана.

Из леммы 4 следует, что функция $y(\cdot) = 0$ является решением следующей выпуклой экстремальной задачи

$$g(y) \mapsto \inf; \quad y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$$

где

$$g(y) = \max_{t\in I} |\hat{x}(t) + \sum_{i=1}^{m} y_i\, K(t - \hat{\theta}_i)|.$$

Необходимое и достаточное условие минимума для этой выпуклой задачи есть следующее условие $0 \in \partial g(\hat{y})$, $\hat{y} = (0, \dots, 0)$. Следовательно, по теореме об очистке (см. [4]) существуют точки $\{\tau_i\}_{i=1}^s$, $s \le m+1$, $0 \le \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_s \le 1$ и числа $\{\alpha_i\}_{i=1}^s$, $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^s \alpha_i = 1$ такие, что $|\hat{x}(\tau_i)| = \|\hat{x}(\cdot)\|_{C(I)}$, $1 \le i \le s$ и

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_i)\, y(\tau_i) = 0 \quad \text{для любой} \quad y(\cdot) \in L_m^K. \tag{6}$$

Докажем, что $s = m+1$. Допустим, что $s \le m$ и рассмотрим следующий K-полином

$$\widetilde{y}(t) = K * \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 & \hat{\theta}_2 & \dots & \hat{\theta}_{s-1} & \hat{\theta}_s \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_{s-1} & t \end{pmatrix} :=$$

$$:= \begin{vmatrix} K(\tau_1 - \hat{\theta}_1) & \dots & K(\tau_{s-1} - \hat{\theta}_1) & K(t - \hat{\theta}_1) \\ K(\tau_1 - \hat{\theta}_2) & \dots & K(\tau_{s-1} - \hat{\theta}_2) & K(t - \hat{\theta}_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(\tau_1 - \hat{\theta}_s) & \dots & K(\tau_{s-1} - \hat{\theta}_s) & K(t - \hat{\theta}_s) \end{vmatrix}.$$

В силу условий (1) система функций $\{K(t - \hat{\theta}_j)\}_{j=1}^s$ является чебышевской. Следовательно, $\widetilde{y}(\tau_s) > 0$. Но если подставить функцию $\widetilde{y}(\cdot)$ в (6) получим

$$\alpha_s \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_s)\, \widetilde{y}(\tau_s) = 0$$

(по определению $\widetilde{y}(\tau_s)(\cdot)$ следует, что $\widetilde{y}(\tau_i) = 0$, $1 \le i \le s-1$).

Следовательно $\widetilde{y}(\tau_s) = 0$. Это противоречие доказывает, что $s = m+1$.

Покажем теперь, что $\hat{x}(\cdot)$ имеет "m-альтернанс", т.е. максимумы и минимумы $\hat{x}(\cdot)$ чередуются в точках τ_j, $1 \le j \le m+1$.

Положим

$$y_j(t) = K * \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_{j-1} & \theta_j & \dots & \theta_{m-1} & \theta_m \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_{j-1} & \tau_{j+1} & \dots & \tau_m & t \end{pmatrix}, \quad 1 \le j \le m.$$

Если подставим эти функции в уравнение (6) с $s = m+1$, получим

$$\alpha_j \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_j)\, y_j(\tau_j) + \alpha_{m+1} \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_{m+1})\, y_j(\tau_{m+1}) = 0. \tag{7}$$

Так как система функций $\{K(t - \hat{\theta}_j)\}_1^{m+1}$ чебышевская, то $\operatorname{sign} y_j(\tau_{m+1}) = 1$, $\operatorname{sign} y_j(\tau_j) = (-1)^{m-j+1}$.

Следовательно, из (7) получаем

$$\operatorname{sign} \hat{x}(\tau_j) = (-1)^{m-j} \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_{m+1}), \ 1 \le j \le m.$$

Это означает, что в точках τ_j знаки $\hat{x}(\cdot)$ чередуются.

Докажем, что $\tau_1 = 0, \tau_s = 1$. Предположим, что $\tau_1 > 0$. Тогда производная функции $\hat{x}(\cdot)$ имеет по крайней мере m нулей в точках $\tau_1, ..., \tau_m$. С другой стороны, производная функции $\hat{x}(\cdot)$ – K-полином "степени" $m-1$, который, как известно, имеет не более $m-1$ нулей. Это противоречие доказывает утверждение. Аналогично доказывается, что $\tau_s = 1$.

Покажем теперь, что число узлов решения максимальное, т.е. $m = n$. Предположим, что $m < n$. Обозначим через $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_m$ нули функции $\hat{x}(\cdot)$ на $(0,1)$ и выберем α_{m+1} так, чтобы $\alpha_m < \alpha_{m+1} < 1$. По Теореме 1 существует сверточный совершенный K-сплайн

$$\overline{x}(t) = \left(K * u_{\overline{\theta}}\right)(t) = 1 + 2\sum_{i=1}^{m+1}(-1)^i\Phi(t-\overline{\theta}_i)$$

с $m+1$ узлами $\overline{\theta}_1 < \overline{\theta}_2 < ... < \overline{\theta}_{m+1}$ такой, что $\overline{x}(\alpha_j) = 0$.

Для того, чтобы доказать наше утверждение, достаточно показать, что $\|\overline{x}(\cdot)\|_{C(I)} < \|\hat{x}(\cdot)\|_{C(I)}$. Так как система функций $\{K(\alpha_j - \xi)\}_1^{m}$ – чебышевская, то для каждого $t \in I$ следующая система уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} c_i\, K(\alpha_i - \hat{\theta}_j) = K(t - \hat{\theta}_j),\ j = 1, ..., m,$$

имеет единственное решение, причём

$$\operatorname{sign}(K(t-\xi) - \sum_{i=1}^{m} c_i\, K(\alpha_i - \xi)) = \operatorname{sign}\hat{x}(t)u_{\hat{\theta}}(\xi). \tag{8}$$

Пусть $\overline{c}_i$, $1 \le i \le m$ решение этой системы. Тогда учитывая, что $\hat{x}(\alpha_j) = 0$, $1 \le j \le m$ и условие (8) имеем

$$|\hat{x}(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} K(t-\xi)u_{\hat{\theta}}(\xi)\,d\xi\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}(K(t-\xi) - \sum_{i=1}^{m}\overline{c}_i\,K(\alpha_i - \xi))u_{\hat{\theta}}(\xi)\,d\xi\right| =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left|K(t-\xi) - \sum_{i=1}^{m}\overline{c}_i\,K(\alpha_i - \xi)\right|d\xi.$$

Следовательно,

$$|\overline{x}(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} K(t-\xi)u_{\overline{\theta}}(\xi)\,d\xi\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}(K(t-\xi) - \sum_{i=1}^{m}\overline{c}_i\,K(\alpha_i - \xi))u_{\overline{\theta}}(\xi)\,d\xi\right| \le$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| K(t-\xi) - \sum_{i=1}^{m} \overline{c}_i K(\alpha_i - \xi) \right| d\xi = |\hat{x}(t)|.$$

Для того, чтобы доказать неравенство $\|\overline{x}(\cdot)\|_{C(I)} < \|\hat{x}(\cdot)\|_{C(I)}$, заметим, что если существует $\tilde{\tau} \in I$. для которого $|\overline{x}(\tilde{\tau})| = \|\hat{x}(\cdot)\|_{C(I)}$, то найдётся $\tilde{t} \in I, \tilde{t} \neq \alpha_i$ такая, что $\overline{x}(\tilde{t}) = \hat{x}(\tilde{t})$. Но тогда функция $\hat{x}(\cdot) - \overline{x}(\cdot)$ имеет не менее $(m+1)$ нулей. Но по Лемме 1, этот факт противоречит неравенству

$$Z(\hat{x}(\cdot) - \overline{x}(\cdot), \mathbb{R}) \leq S(u_{\hat{g}}(\cdot) - u_{\overline{g}}(\cdot); \mathbb{R}) \leq m.$$

Противоречие доказывает, что $m = n$.

Докажем единственность решения задачи (P). Допустим существуют две функции $x_1(\cdot) = (K * u_1)(\cdot)$ и $x_2(\cdot) = (K * u_2)(\cdot)$ такие, что

$$\mathrm{Alt}(x_i(\cdot, I) = S(u_i(\cdot), \mathbb{R}) = n, \quad |u_i(t)| \equiv 1, \; i = 1, 2.$$

Так как $\mathrm{Alt}(x_i(\cdot), I) = n$, то $Z(x_1(\cdot) - x_2(\cdot), I) \geq n$. По Лемме 1 имеем $S(u_1(\cdot) - u_2(\cdot), \mathbb{R}) \leq n - 1$. Следовательно,

$$Z(x_1(\cdot) - x_2(\cdot), I) > S(u_1(\cdot) - u_2(\cdot), \mathbb{R}),$$

что противоречит утверждению Леммы 2.

Как и в работе [3], обозначим единственное решение задачи (P) через $x_n^{*K}(\cdot)$ и назовём чебышевским свёрточным совершенным K-сплайном. Таким образом мы доказали следующую

Теорема 2. *Если $n \geq 0$ - целое число, то существует единственный с точностью до знака свёрточный совершенный K-сплайн $x_n^{*K}(\cdot) = (K * u_n)(\cdot)$ с n узлами, имеющий на отрезке I "n-альтернанс".*

Аналогично можно доказать существование золотаревских свёрточных совершенных K-сплайнов, которые были введены в работе [3].

§4. ТОЧНЫЕ n-ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССА $W_\infty^{*K}(I)$ В $L_\infty(I)$.

Ниже $\|\cdot\|_\infty$ обозначает $L_\infty(I)$-норму, которая совпадает с $C(I)$-нормой.

Теорема 3. *Колмогоровский n-поперечник $W_\infty^{*K}(I)$ в $L_\infty(I)$ равен*

$$d_n(W_\infty^{*K}(I), L_\infty(I)) = \|x_n^{*K}(\cdot)\|_\infty.$$

Подпространство $L_n^K = \operatorname{lin}\{K(\cdot - \hat\theta_1), \dots, K(\cdot - \hat\theta_n)\}$ *является оптимальным для* $d_n(W_\infty^{*K}(I), L_\infty(I))$, *где* $\{\hat\theta_i\}$ *узлы чебышевского свёрточного совершенного* K*-сплайна.*

Доказательство. Мы разделим доказательство на две части :

А) Оценка снизу. Поскольку имеет место неравенство $b_n(W, X) \le \le d_n(W, X)$ (см. [1]), то оценку снизу достаточно получить для бернштейновского n–поперечника $W_\infty^{*K}(I)$ в $L_\infty(I)$. Докажем, что $b_n(W_\infty^{*K}(I), L_\infty(I)) \ge ||x_n^{*K}(\cdot)||_\infty$. Для этого достаточно показать, что $||x_n^{*K}(\cdot)||_\infty S(\bar x_{n+1}) \subset W_\infty^{*K}(I)$, где $\bar x_{n+1} = \operatorname{lin}\{1, \Phi(t - \hat\theta_1), \dots, \Phi(t - \hat\theta_n)\}$. Ясно, что K-сплайн $y(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} y_i\, \Phi(t - \hat\theta_i)$ из подпространства $\bar x_{n+1}$ принадлежит классу $W_\infty^{*K}(I)$ тогда и только тогда, когда $|y_i| \le 1$, $1 \le i \le n$. Следовательно, осталось показать, что из условия

$$||y_0 + \sum_{i=1}^{n} y_i\, \Phi(t - \hat\theta_i)||_\infty \le ||x_n^{*K}(\cdot)||_\infty \tag{9}$$

следует, что $|y_i| \le 1$, $0 \le i \le n$. Предположим обратное, т.е. существует K-сплайн $\overline{y}(t) = \overline{y}_0 + \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i\, \Phi(t - \hat\theta_i)$, который удовлетворяет условию (9) и тем не менее $|\overline{y}_{i_0}| = \max\limits_{0 \le i \le n} |\overline{y}_i| > 1$. Тогда для $z(t) = \overline{y}(t) / |\overline{y}_{i_0}|$ имеем

$$||z(\cdot)||_\infty = ||y_0 / \overline{y}_{i_0} + \sum_{i=1}^{n} (y_i / \overline{y}_{i_0})\ \Phi(t - \hat\theta_i)||_\infty < ||x_n^{*K}(\cdot)||_\infty.$$

Так как $\operatorname{Alt}(x_n^{*K}(\cdot), I) = n$, то $S(x_n^{*K}(\cdot) - z(\cdot), I) \ge n$. С другой стороны, узлы сплайнов $x_n^{*K}(\cdot)$ и $z(\cdot)$ совпадают и $u_n(t) - u_z(t) \equiv 0$, если $t \in [\hat\theta_{i_0}, \hat\theta_{i_0+1}]$. Следовательно, $S(u_n(\cdot) - u_z(\cdot), \mathbb{R}) \le n - 1$. Это противоречит неравенству $Z(x_n^{*K}(\cdot) - z(\cdot), I) \le S(u_n(\cdot) - u_z(\cdot), \mathbb{R})$, и оценка снизу доказана.

Б) Оценка сверху. Заметим, что для любого $x(\cdot) \in W_\infty^{*K}(I)$ существует интерполяционный K-полином из подпространства $L_n^K = \operatorname{lin}\{K(\cdot - \hat\theta_1), \dots, K(\cdot - \hat\theta_n)\}$ такой, что $y(\alpha_i) = x(\alpha_i)$, $1 \le i \le n$, где α_i – нули функции $x_n^{*K}(\cdot)$. Докажем, что $||x(\cdot) - y(\cdot)||_\infty \le ||x_n^{*K}(\cdot)||_\infty$. Нетрудно убедится, что интерполяционный K-полином для функции $x(\cdot) \doteq (K * u)(\cdot)$ имеет следующий вид

$$y(t) = -\left[K_e * \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 & \dots & \hat{\theta}_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}\right]^{-1} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{vmatrix} K(\alpha_1 - \hat{\theta}_1) & \dots & K(\alpha_1 - \hat{\theta}_n) & K(\alpha_1 - \xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(\alpha_n - \hat{\theta}_1) & \dots & K(\alpha_n - \hat{\theta}_n) & K(\alpha_n - \xi) \\ K(t - \hat{\theta}_1) & \dots & K(t - \hat{\theta}_n) & 0 \end{vmatrix} u(\xi)\, d\xi.$$

Следовательно,

$$x(t) - y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,\xi)\, u(\xi)\, d\xi,$$

где

$$G(t,\xi) = K * \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 & \dots & \hat{\theta}_n & \xi \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n & t \end{pmatrix} \Big/ K * \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 & \dots & \hat{\theta}_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$|x(t) - y(t)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,\xi)|\, d\xi. \tag{10}$$

Так как $\operatorname{sign} G(t,\xi) = (-1)^{i+j}$ для $t \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$ и $\xi \in (\hat{\theta}_j, \hat{\theta}_{j+1})$, равенство в (10) достигается для $u(\cdot) = u_{\hat{\theta}}(\cdot)$. Но при таком $u(\cdot)$ верно следующее соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,\xi)\, u_{\hat{\theta}}(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-\xi)\, u_{\hat{\theta}}(\xi)\, d\xi.$$

Следовательно, мы имеем

$$|x(t) - y(t)| \le \left|\left(K * u_{\hat{\theta}}\right)(t)\right|, \; t \in I.$$

Таким образом, оценка сверху доказана, и более того получено равенство

$$\sup_{x(\cdot) \in W_{\infty}^{*K}(I)} \|x(t) - y(\cdot)\|_{\infty} = \|x_n^{*K}(\cdot)\|_{\infty},$$

которое завершает доказательство Тоеремы 3.

Из неравенства $b_n \le d_n$ а также из того, что оценка сверху для d_n получена линейным методом, мы приходим к следующему результату

Следствие. Имеют место следующие равенства

$$\lambda_n(W_{\infty}^{*K}(I), L_{\infty}(I)) = b_n(W_{\infty}^{*K}(I), L_{\infty}(I)) = \|x_n^{*K}(\cdot)\|_{\infty},$$

причём оптимальным линейным отображением для λ_n будет отображение ранга n, которое каждому $x(\cdot) \in W_{\infty}^{*K}(I)$ ставит в соответствие его интерполяционный K-полином в точках $\{\alpha_i\}$, где α_i – нули $x_n^{*K}(\cdot)$.

ABSTRACT. In this paper we calculate the exact n-widths due to Kolmogorov and Bernstein as well as linear n-width of a functional class $W_{\infty}^{*K}(I) = \{x(\cdot) \mid x(t) = (K * u)(t), t \in I, u(\cdot) \in L_{\infty}(\mathbb{R}), \|u(\cdot)\|_{L_{\infty}(\mathbb{R})} \leq 1\}$ in the space $L_{\infty}(I)$, $I = [0,1]$. Here $K(\cdot)$ is a continuous, integrable function defined on the real axis $\mathbb{R}$, with properties $\int_{-\infty}^{+\infty} K(t)\,dt = 1$ and the function $F(t,\xi) = K(t-\xi)$ is strictly totally positive on $\mathbb{R}^2$. We prove that all three n-widths considered are equal to $\|x_n^{*K}(\cdot)\|_{\infty}$, where $x_n^{*K}(\cdot)$ is the convolution perfect K-spline least deviating from zero in $L_{\infty}(I)$ norm.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Pinkus, n-widths in Approximation Theory, Berlin, Springer, 1985.
2. В. М. Тихомиров, "Наилучшие методы приближения и интерполирования гладких функций в пространстве $C[-1,1]$," Мат. Сборник, том 80, № 2, стр. 290–304, 1969.
3. С. А. Айунц, "Обобщённые совершенные сплайны и их экстремальные свойства," Автореф. канд. дисс., Ереван, 1989.
4. В. М. Тихомиров, Некоторые вопросы теории приближения, Изд–во МГУ, Москва, 1976.
5. С. А. Айунц, "Основная теорема алгебры для свёрточных совершенных K-сплайнов и оптимальная K-интерполяция," , Изв. АН Армении, Математика [английский перевод :Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of sciences)], том 26, № 3, стр. 268–287, 1991.
6. S. Karlin "Oscillatory perfect splines and related extremal problems," In : "Spline Function and Approximation Theory," (ed. by S. Karlin, C. Micchaelli, A. Pinkus and J. Schoenberg), Acad. Press, no. 4, pp. 371–400, 1976.
7. А. А. Женсыкбаев, "Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы," УМН, том 36, № 4, стр. 367–384, 1981.

12 Ноября 1991

Ереванский Государственный Университет