ЗАДАЧА ТИПА КОШИ-РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А. А. Андрян

Известия Академии Наук Армении. Математика,
том. 27, 3, 1992

Пусть $u(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \overline{\Pi}_\alpha)$ аналитическая $t \in \Pi_\alpha = \{t | 0 < \arg t < \alpha < \pi\}$ с полиномиалным ростом. Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^{n} A_j \left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^{n-j} u(x,t)}{\partial t^{n-j}} = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \Pi_\alpha.$$

Предполагаем, что число корней характеристического уравнения $\lambda^n + A_1(\xi)\lambda^{n-1} + \cdots + A_n(\xi) = 0$, принадлежащих $\Pi_\alpha^* = \{t | \pi/2 \le \arg t \le \frac{3}{2}\pi - \alpha\}$ постоянный для $\xi > 0$ и $\xi < 0$. Изучают ся задача типа Коши-Римана-Гильберта и общая граничная задача. Осноаной результат этой статьи состоит в том, что задача типа Коши-Римана-Гильберта всегда имеет решение. Для общей граничной задачи приводят ся необходимые и достаточные условия её разрешимости. Получен класс корректности в случае $f(x,t) \equiv 0$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Введем углы $\Pi_\alpha = \{t | 0 < \arg t < \alpha < \pi\}$, $\Pi_\alpha^* = \{t | \pi/2 \le \arg t \le \frac{3}{2}\pi - \alpha\}$ в комплексной плоскости Π. Через M_β обозначим класс функций $u(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \overline{\Pi}_\alpha)$, аналитических по $t \in \Pi_\alpha$ и удовлетворящих оценкам

$$|D_x^j D_t^l u(x,t)| \le c_{jl}(1+|x|)^{\beta_{jl}}(1+|t|)^{\gamma_{jl}}, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \overline{\Pi}_\alpha, \tag{1}$$

где β-целое, а $\beta_{jl} < \beta$. Пусть $M = \cup_{\beta \ge 0} M_\beta$.

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффицентами вида

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t) = \frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^{n} A_j \left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^{n-j} u(x,t)}{\partial t^{n-j}} = f(x,t), \tag{2}$$

$$(x,t) \in \mathbb{R} \times \Pi_\alpha,$$

где $A_j(\xi)$–полиномы от ξ, f и u–функции из M. Через $\lambda_1(\xi), ..., \lambda_n(\xi)$ мы обозначим, с учетом их кратностей, корни характеристического уравнения

$$P_n(\xi, \lambda) = \lambda^n + A_1(\xi)\lambda^{n-1} + \cdots + A_n(\xi) = 0, \tag{3}$$

а через-$\rho(\xi)$-число корней, принадлежащих Π_α^- в точке ξ.

Мы предполагаем, что

$$\rho(\xi) = k, \quad \text{при } \xi > 0, \qquad \rho(\xi) = m, \quad \text{при } \xi < 0, \tag{4}$$

где k и m–константы и $m > k$ (случай, когда $m = k$ изучен в [1]).

В работе изучают ся следующие задачи. Требует ся найти решение $u \in M$ уравнения (2), удовлетворяющее граничным условиям:

Задача A1. (задача Коши-Римана-Гильберта)

$$\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j} = f_j(x), \quad j = 0, ..., k-1, \tag{5}$$

$$\mathrm{Re}\, \frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j} = f_j(x), \quad j = k, ..., m-1. \tag{6}$$

Задача A2. (общая граничная задача)

$$\sum_{l=0}^{n-1} a_{jl}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^l u(x,0)}{\partial t^l} = f_j(x), \quad j = 0, ..., k-1, \tag{7}$$

$$\mathrm{Re} \sum_{l=0}^{n-1} a_{jl}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^l u(x,0)}{\partial t^l} = f_j(x), \quad j = k, ..., m-1, \tag{8}$$

где $f_j(x)$–заданные функции из M, а $a_{jl}(\xi)$–полиномы с постоянными коэффициентами.

Основной результат состоит в том, что задача A1 всегда имеет решение, что касаеця задачи A2, то приводяця необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Наконец, если в (2) $f \equiv 0$ и все $f_j \in M_0$, то имеем теорему существования и единственности решения задачи A1 в M_0.

§1. РАЗРЕШИМОСТЬ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ (2)

Корни $\lambda_1(\xi),\dots,\lambda_n(\xi)$ уравнения (3) на основании (4) будем нумеровать так, чтобы

$$\lambda_1(\xi),\dots,\lambda_k(\xi)\in \Pi^*_o;\quad \lambda_{k+1}(\xi),\dots,\lambda_n(\xi)\in C\Pi^*_o=\Pi\setminus\Pi^*_o,\ \text{при}\ \xi<0, \tag{1.1}$$

$$\lambda_1(\xi),\dots,\lambda_m(\xi)\in \Pi^*_o;\quad \lambda_{m+1}(\xi),\dots,\lambda_n(\xi)\in C\Pi^*_o,\ \text{при}\ \xi>0. \tag{1.2}$$

Разложение в ряд Пюизье корня $\lambda_j(\xi)$ имеет вид

$$\lambda_j(\xi)=\sum_{k=0}^{+\infty} b_{jk}\left[(\xi-\xi_o)^{1/r_j}\right]^k,\qquad \xi\in(\xi_o,\xi_o+\varepsilon),\quad \varepsilon>0,\quad r_j\in N. \tag{1.3}$$

Аналогичное разложение имеет место и при $\xi\in(\xi_o-\varepsilon,\xi_o)$, $\varepsilon>0$.

В окрестности же точек $|\xi|=\infty$ имеем

$$\lambda_j(\xi)=\sum_{k=-N_j}^{+\infty} c_{jk}\left[\xi^{-1/p_j}\right]^k,\quad p_j,N_j\in N, \tag{1.4}$$

вообще говоря разные, при $\xi=+\infty$ и $\xi=-\infty$.

Введем следующие полиномы по λ:

$$Q_1^-(\xi,\lambda)=\prod_{j=1}^{k}[\lambda-\lambda_j(\xi)]=\sum_{j=0}^{k} q_{j1}^-(\xi)\lambda^{k-j};$$

$$R_1^-(\xi,\lambda)=\prod_{j=1}^{n-k}[\lambda-\lambda_{k+j}(\xi)]=\sum_{j=0}^{n-k} r_{j1}^-(\xi)\lambda^{n-k-j}\quad(\xi<0), \tag{1.5}$$

$$Q_1^+(\xi,\lambda)=\prod_{j=1}^{m}[\lambda-\lambda_j(\xi)]=\sum_{j=0}^{m} q_{j1}^+(\xi)\lambda^{m-j};$$

$$R_1^+(\xi,\lambda)=\prod_{j=1}^{n-m}[\lambda-\lambda_{m+j}(\xi)]=\sum_{j=0}^{n-m} r_{j1}^+(\xi)\lambda^{n-m-j}, \tag{1.6}$$

$$(\xi>0,\quad q_{01}^{\pm}(\xi)=r_{01}^{\pm}(\xi)\equiv 1).$$

Заметим, что коэффициенты введенных полиномов бесконечно дифференцируемы, непрерывны, соответственно, слева и справа в точке $\xi=0$ и удовлетворяют оценке

$$|D_\xi^j a(\xi)|\le c_j|\xi|^{\varepsilon-j}(1+|\xi|)^{m_j},\quad j=1,2,\dots,\quad 0<\varepsilon\le 1, \tag{1.7}$$

откуда следует их локальная интегрируемость, а также их первых производных.

1. Пусть $f(x,t) = a(t)x^\nu$, $a(t) \in M$, $\nu \geq 0$–целое. Решение уравнения (2) ищем в виде

$$w(x,t) = \sum_{j \leq \nu} c_j(t) x^j, \tag{1.8}$$

где $c_j(t) \in M$ подлежат определению. Подставляя $w(x,t)$ из (1.8) в уравнение (2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x^j, получим

$$P_n\left(0, \frac{\partial}{\partial t}\right) c_\nu(t) = a(t), \quad t \in \Pi_a; \tag{1.9}$$

$$P_n\left(0, \frac{\partial}{\partial t}\right) c_j(t) = L_j\big(c_{j+1}(t), ..., c_\nu(t)\big), \quad j = 0, ..., \nu - 1, \tag{1.10}$$

где $L_j(\cdot)$–линейные выражения относительно своих аргументов.

В работе [2] доказана разрешимость уравнения (1.9) в классе M, поэтому из системы (1.9), (1.10) последовательно определим функции $c_\nu(t), ..., c_o(t)$, то есть уравнение (2) с правой частью вида $a(t)x^\nu$, $a \in M$, разрешимо. Отсюда вытекает, что если вместо $f(x,t)$ в правой части (2) взять $(i\frac{\partial}{\partial x})^\nu f(x,t)$ и доказать разрешимость такого уравнения, то мы получим разрешимость уравнения (2) и с правой частью $f(x,t)$. Действительно, пусть

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u_o(x,t) = \left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu f(x,t),$$

а $u_1 \in M$ такая, что $(i\frac{\partial}{\partial x})^\nu u_1 = u_o$. Отсюда имеем

$$\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu \left[P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u_1(x,t) - f(x,t)\right] = 0$$

или

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u_1(x,t) = f(x,t) + \sum_{j \leq \nu - 1} a_j(t) x^j, \tag{1.11}$$

где $a_j(t) \in M$–вполне определенные функции. Теперь, если $u(x,t)$– решение уравнения (2), то подставляя $u_1 = u + w$ в (1.11), для определения $w(x,t)$ мы получим расмотренную выше задачу.

2. Пусть $f(x,t) = (i\frac{\partial}{\partial x})^\nu g(x)t^l$, $g(x) \in M$. Заметим, что $M \subset S'(R)\, \forall t \in \Pi_a$. Перейдя в (2) к образам Фурье по x, получим

$$\frac{\partial^n \hat{u}(\xi,t)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^{n} A_j(\xi) \frac{\partial^{n-j} \hat{u}(\xi,t)}{\partial t^{n-j}} = \xi^\nu \hat{g}(\xi) t^l, \quad t \in \Pi_a, \tag{1.12}$$

где $\hat{u}(\xi,t) = F_x[u(x,t)]$, $\hat{g}(\xi) = F[g(x)]$–обобщенные преобразования Фурье. Пусть при каждом $\xi \neq 0$ $\gamma^-(\xi)$ обозначает замкнутый контур, содержащий внутри себя только те корни уравнения (3), которые принадлежат области Π_σ^* и точку $\lambda = 0$. Введем функционал

$$\hat{u}_o(\xi,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-(\xi)} \frac{\xi^\nu \hat{g}(\xi)}{\lambda^{l+1}P_n(\xi,\lambda)} e^{\lambda t} d\lambda, \quad t \in \Pi_\sigma, \quad \xi \neq 0. \tag{1.13}$$

Покажем, что его прообраз Фурье есть искомое решение.

Так как полиномы $Q_1^-(\xi,\lambda)$, $R_1^-(\xi,\lambda)$ и $Q_1^+(\xi,\lambda)$, $R_1^+(\xi,\lambda)$ взаимно просты при $\xi < 0$ и $\xi > 0$, соотвецтвенно, то имеем

$$1 = r_1^\pm(\xi,\lambda)Q_1^\pm(\xi,\lambda) + q_1^\pm(\xi,\lambda)R_1^\pm(\xi,\lambda), \tag{1.14}$$

где $r_1^\pm(\xi,\lambda)$, $q_1^\pm(\xi,\lambda)$ полиномы по λ, коэффиценты которых удовлетворяют оценкам 1–ого типа (1.7). Рас-
смотрим функцию

$$\hat{V}(\xi,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-(\xi)} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{l+1}P_n(\xi,\lambda)} d\lambda =$$

$$= \frac{\theta^-(\xi)}{2\pi i}\int_{\gamma^-(\xi)} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{l+1}Q_1^-(\xi,\lambda)R_1^-(\xi,\lambda)} d\lambda + \frac{\theta^+(\xi)}{2\pi i}\int_{\gamma^-(\xi)} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{l+1}Q_1^+(\xi,\lambda)R_1^+(\xi,\lambda)} d\lambda.$$

Учитывая (1.14), представим $\hat{V}(\xi,t) = \hat{V}_1^-(\xi,t) + \hat{V}_1^+(\xi,t)$, где

$$\hat{V}_1^\pm(\xi,t) = \frac{\theta^\pm(\xi)}{2\pi i}\int_{\gamma^-(\xi)} \frac{q_1^\pm(\xi,\lambda)e^{\lambda t}}{\lambda^{l+1}Q_1^\pm(\xi,\lambda)} d\lambda, \quad t \in \overline{\Pi}_\sigma. \tag{1.15}$$

Лемма 1.1. Функции $\hat{V}_1^\pm(\xi,t)$ удовлетворяют оценкам

$$|\hat{V}_1^\pm(\xi,t)| \leq c|\xi|^{\epsilon_o}(1+|\xi|)^{m_o}(1+|t|)^{n_o}, \tag{1.16}$$

$$|D_\xi^j D_t^k \hat{V}_1^\pm(\xi,t)| \leq c_{jk}|\xi|^{\epsilon_j}(1+|\xi|)^{m_j}(1+|t|)^{n_j}, \; j = 1,2,.... \tag{1.17}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $D_\xi^j D_t^k \hat{V}_1^\pm(\xi,0)$ удовлетворяют приведенным оценкам, в чем можно убедиться, вычисляя интегралы в (1.15) по теореме о вычетах в точке $\lambda = \infty$, используя при этом оценки (1.7). С другой стороны, эти функции удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^{l+1}}{\partial t^{l+1}} Q_1^\pm(\xi, \frac{\partial}{\partial t})\hat{V}_1^\pm(\xi,t) = 0, \quad \xi \neq 0, \quad t \in \Pi_\sigma, \tag{1.18}$$

все корни характеристических уравнений которых принадлежат Π^{*}_{o} и в окрестности точки $\xi = 0$ и $\xi = \infty$ удовлетворяют оценкам (1.17). Представляя левую часть (1.18) в виде произведения операторов первого порядка и используя указанные свойства характеристических корней, мы без труда выведем оценки (1.16), (1,17). Лемма 1.1 доказана.

Пусть β такое, что $g(x) \in M_\beta$.

Лемма 1.2. Существуют натуральные $\nu(\beta)$ и $k_o(\beta)$ такие, что прообраз Фурье

$$V_o(x,t) = F_\xi^{-1}\left[\frac{\xi^\nu \hat{V}(\xi,t)}{(1+\xi^2)^{k_o}}\right]$$

удовлетворяет оценке

$$|D_t^j V_o(x,t)| \le c_j \frac{(1+|t|)^{p_j}}{(1+x^2)^{\beta+1}}, \qquad j = 0, ..., n-1. \tag{1.19}$$

Доказательство. Выбирая ν мы можем, в силу Леммы 1.1, добиться любой наперед заданной

гладкости функции $\xi^\nu \hat{V}(\xi,t)$ в точке $\xi = 0$. Выбирая $k_o \gg 1$ мы легко получим оценку (1.19). Лемма 1.2 доказана.

Теперь ясно, что

$$u_o(x,t) = V_o(x,t) * \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{k_o} \left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu g(x) \in M_\beta \tag{1.20}$$

и имеет место

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u_o(x,t) = \left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu g(x)t^l + \sum_{j<\beta} a_j(t)x^j,$$

где $a_j(t) \in M$–вполне определенные функции.

Согласно пункту 1 существует $w_o(x,t)$ такая, что

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) w_o(x,t) = \sum_{j<\beta} a_j(t)x^j$$

и тогда $u(x,t) = u_o(x,t) - w_o(x,t)$ есть решение уравнения (2) с правой частью $f(x,t) = \left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu g(x)t^l$.

3. Общий случай. Используя представление

$$f(x,t) = [f(x,0) + t f_t'(x,0) + \cdots + \frac{t^l}{l!} f_t^{(l)}(x,0)] + g(x,t), \tag{1.21}$$

а также случаи, изученные в пунктах 1, 2, мы сведём вопрос о разрешимости уравнения (2) к разрешимости уравнения

$$\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n}+\sum_{j=1}^{n} A_j\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{n-j}u(x,t)}{\partial t^{n-j}}=\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} g(x,t), \quad (x,t)\in \mathbb{R}\times\Pi_\alpha, \tag{1.22}$$

где $D_t^j g(x,0) = 0$, j,ν,l–наперед заданные целые числа, $j \le l$. Границу угла Π_α^* обозначим через Γ_o, а $\Gamma_\varepsilon = \Gamma_o + \varepsilon e^{-i\alpha/2}$, $\varepsilon > 0$. Пусть $g(t) \in M$ удовлетворяет условиям

$$|D_t^j g(t)| \le c_j(1+|t|)^\gamma, \quad \gamma \ge 0 \text{ целое}, \quad t\in\overline{\Pi}_\alpha, \tag{1.23}$$

$$D_t^j g(0) = 0 \quad \forall j \le l. \tag{1.24}$$

Через $G(p)$ или $L[g](p)$ обозначим образ Лапласа функции $g(t)$, когда $t \in \mathbb{R}^+$. В работе [3] доказана

Лемма 1.3. Функция $G_o(p) = L[g(t)(1+t)^{-\gamma-2}]$ аналитична в области $C\Pi_\alpha^*$ и удовлетворяет оценкам

$$|G_o(p)| \le c(1+|p|)^{-l-1}, \quad p\in\overline{C\Pi_\alpha^*}, \tag{1.25}$$

$$|G_o^{(s)}(p)| \le c_s(\tilde{\Pi}_\alpha)(1+|p|)^{-l-s-1}, \quad s=0,1,\dots, p\in\tilde{\Pi}_\alpha\subseteq C\Pi_\alpha^*. \tag{1.26}$$

Образ Фурье решения уравнения (1.22) представит ся в виде

$$\hat{u}(\xi,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon(\xi)}\frac{\xi^\nu \hat{G}(\xi,\lambda)}{P_n(\xi,\lambda)}e^{\lambda t}d\lambda=$$

$$=\frac{\theta^-(\xi)}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon(\xi)}\frac{\xi^\nu \hat{G}(\xi,\lambda)}{P_n(\xi,\lambda)}e^{\lambda t}d\lambda+\frac{\theta^+(\xi)}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon(\xi)}\frac{\xi^\nu \hat{G}(\xi,\lambda)}{P_n(\xi,\lambda)}e^{\lambda t}d\lambda=\hat{u}^-(\xi,t)+\hat{u}^+(\xi,t),$$

$$\xi\neq 0, \tag{1.27}$$

где контур $\Gamma_\varepsilon(\xi)$ для $\xi \neq 0$ выбирает ся так, чтобы корни, принадлежащие Π_α^* и $C\Pi_\alpha^*$ лежали по разные стороны от него.

Покажем, что прообраз Фурье функционала $\hat{u}^-(\xi,t)$ принадлежит классу M. Аналогичным образом мы поступим и с $\hat{u}^+(\xi,t)$.

Используя представление (1.14), перепишем $\hat{u}^-(\xi,t)$ в форме

$$\hat{u}^-(\xi,t)=\frac{\theta^-(\xi)}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon(\xi)}\frac{\xi^\nu q_1^-(\xi,\lambda)}{Q_1^-(\xi,\lambda)}\hat{G}(\xi,\lambda)e^{\lambda t}d\lambda+$$

$$+\frac{\theta^-(\xi)}{2\pi i}\int_{\Gamma_o(\xi)}\frac{\xi^\nu r_1^-(\xi,\lambda)}{R_1^-(\xi,\lambda)}\hat G(\xi,\lambda)e^{\lambda t}d\lambda=\hat u_1^-(\xi,t)+\hat u_2^-(\xi,t). \qquad (1.28)$$

Следуя лемме 1.3 представим $\hat G(\xi,\lambda)(1-\frac{\partial}{\partial\lambda})^{\gamma+\alpha}\hat G_o(\xi,\lambda)$, где функционал $\hat G_o(\xi,\lambda)$, зависящий от параметра λ, удовлетворяет оценкам (1.25), (1.26), затем интегрированием по частям преобразуем $\hat u_2^-(\xi,t)$ к виду

$$\hat u_2^-(\xi,t)=\frac{\theta^-(\xi)}{2\pi i}\int_{\Gamma_o(\xi)}\xi^\nu\left(1+\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{\gamma+2}\left[\frac{r_1^-(\xi,\lambda)e^{\lambda t}}{R_1^-(\xi,\lambda)}\right]\hat G_o(\xi,\lambda)d\lambda=$$

$$=\frac{\theta^-(\xi)}{2\pi i}\int_{\Gamma_o}\xi^\nu\left(1+\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{\gamma+2}\left[\frac{r_1^-(\xi,\lambda)e^{\lambda t}}{R_1^-(\xi,\lambda)}\right]\hat G_o(\xi,\lambda)d\lambda. \qquad (1.29)$$

Введем функцию

$$\psi(\xi,\lambda,t)=\left(1+\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{\gamma+2}\left[\frac{r_1^-(\xi,\lambda)e^{\lambda t}}{R_1^-(\xi,\lambda)}\right],\qquad \xi<0,\quad \lambda\in\Gamma_o,\quad t\in\overline{\Pi}_\alpha. \qquad (1.30)$$

Имеет место

Лемма 1.4. Справедлива оценка:

$$|D_\xi^j D_\lambda^k D_t^l\psi(\xi,\lambda,t)|\le c_{jkl}|\xi|^{m_{jkl}}(1+|\xi|)^{n_{jkl}}(1+|\lambda|)^{p_{jkl}}(1+|t|)^{q_{jkl}}. \qquad (1.31)$$

Доказательство. Лемма 1.4 следует из оценки (1.7) и того, что

$$|\lambda-\lambda_j(\xi)|\ge c_j|\xi|^{m_j}(1+|\xi|)^{n_j},\qquad \lambda\in\Gamma_o,\quad \xi<0,\quad j\ge k+1. \qquad (1.32)$$

Докажем оценку (1.32). При $-M<\xi\le-\delta<0$ (1.32) вытекает из непрерывности корня $\lambda_j(\xi)$. Поэтому достаточно установить (1.32), при $-\delta<\xi<0$ и $\xi\ll-1$. Ограничимся случаем $-\delta<\xi<0$ (в случае $\xi\ll-1$ доказательство аналогично). Согласно (1.3) имеем

$$\lambda_j(\xi)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_{jk}|\xi|^{k/r_j},\qquad -\delta<\xi<0. \qquad (1.33)$$

От сюда и из того, что $\lambda_j(\xi)\in C\Pi_\alpha^*$, $j\ge k+1$, $-\delta<\xi<0$ вытекает существование $\theta_j\in[0,\alpha]$ такого, что

$$\mathrm{Re}\,[e^{i\theta_j}\lambda_j(\xi)]>0,\qquad \forall\xi\in(-\delta,0). \qquad (1.34)$$

Из (1.33), (1.34) имеем

$$\mathrm{Re}\,[e^{i\theta_j}\lambda_j(\xi)]\ge c_j|\xi|^{m_j},\qquad \xi\in(-\delta,0). \qquad (1.35)$$

А теперь заметим, что

$$|\lambda-\lambda_j(\xi)|=|e^{i\theta_j}\lambda-e^{i\theta_j}\lambda_j(\xi)|\ge\mathrm{Re}\,[e^{i\theta_j}\lambda_j(\xi)]\ge c_j|\xi|^{m_j}, \qquad (1.36)$$

и оценка (1.32) получена. Лемма 1.4 доказана.

Замечание 1.1. Оценка (1.32) легко выводится и из принципа Зайденберга-Тарского (см. Теорему А.2.5 в [4]).

Из оценки (1.31), при подходящем выборе ν, вытекает гладкость функции $\theta^-(\xi)\xi^\nu\psi(\xi,\lambda,t)$ по ξ до наперед заданного порядка. Отсюда получаем (см. Лемму 1.2 и (1.20))

$$u_1^-(x,t) = F_\xi^{-1}[\hat{u}_1^-(\xi,t)](x,t) = \int_{\Gamma_o} \varphi(x,\lambda,t) * \tilde{G}_o(x,\lambda)d\lambda \in M, \tag{1.37}$$

где

$$\varphi(x,\lambda,t) = F_\xi^{-1}\left[\frac{\theta^-(\xi)\xi^\nu\psi(\xi,\lambda,t)}{(1+\xi^2)^{k_o}}\right], \quad k_o \gg 1;$$

$$\tilde{G}(x,\lambda) = \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{k_o} G_o(x,\lambda).$$

Займемся теперь функционалом $\hat{u}_2^-(\xi,t)$. Пусть целое $l_o \geq 0$ таково, что

$$\left|\frac{q_1^-(\xi,\lambda)}{\lambda^{l_o}Q_1^-(\xi,\lambda)}\right| \leq \frac{c(\xi)}{|\lambda|}, \qquad |\lambda| > 1, \quad \xi < 0. \tag{1.38}$$

Введем функцию

$$\psi_1(\xi,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-(\xi)} \frac{q_1^-(\xi,\lambda)}{\lambda^{l_o}Q_1^-(\xi,\lambda)} e^{\lambda t} d\lambda, \qquad t \in \overline{\Pi}_o, \quad \xi < 0, \tag{1.39}$$

где $\gamma^-(\xi)$ определена в (1.13). В силу Леммы 1.1 функция $\psi_1(\xi,t)$ удовлетворяет оценкам (1.16), (1.17). Теперь, если положим

$$\varphi_1(x,t) = F_\xi^{-1}\left[\frac{\theta^-(\xi)\xi^\nu\psi_1(\xi,t)}{(1+\xi^2)^{k_o}}\right], \quad k_o \gg 1,$$

то будем иметь

$$u_2^-(x,t) = \int_0^t \varphi_1(x,\tau) * g(x,t-\tau)d\tau \in M,$$

где $g(x,t) = (1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{k_o}(\frac{\partial}{\partial t})^{l_o} g(x,t)$. Следовательно, прообраз Фурье $u_o(x,t)$ функционала $\hat{u}(\xi,t)$ из (1.27) принадлежит классу M и, вообще говоря, от решения $u(x;t)$ уравнения (1.22) отличается на функцию вида $\sum c_j(t)x^j$, которая легко находится согласно пункту 1.

Таким образом, получена

Теорема 1.1. Неоднородное уравнение $P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u = f(x,t)$ имеет решение в классе M для всех $f \in M$.

Теорема 1.1 позволяет при исследовании граничных задач А1 и А2 в уравнении (2) считать $f(x,t) \equiv 0$, что мы и будем предполагать. Заметим, что если в (2) $f \in M_\beta$, то решение $u \in M_{\beta_1}$ с $\beta_1 \geq \beta$, что подтверждают следующие примеры. В $\mathbb{R} \times \Pi_\alpha$, с $\pi/2 < \alpha < \pi$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t).$$

1) Пусть $f(x,t) \equiv 1 \in M_1$, тогда $u(x,t) = -it \in M_1$.

2) Если же $f(x,t) = \sqrt{x+i} \in M_1$, то $u(x,t) = 2/3(x+i)^{3/2} + \varphi(x+it)$, где $\varphi(\cdot)$–целая аналитическая функция, а значит в классе $\varphi(\cdot) \in M_\beta$ есть многочлен и ясно, что невозможно подобрать $\varphi(\cdot) \in M_\beta$ так, чтобы $u \in M_1$.

§2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ А1

В этом параграфе в отличие от §1 корни $\lambda_1(\xi), ..., \lambda_n(\xi)$ характеристического уравнения (3) перенумеруем так, чтобы

$$\lambda_1(\xi), ..., \lambda_k(\xi) \in \Pi^*_\alpha, \quad \xi \in \mathbb{R};$$

$$\lambda_{k+1}(\xi), ..., \lambda_m(\xi) \in \begin{cases} C\Pi^*_\alpha, & \xi > 0, \\ \Pi^*_\alpha, & \xi < 0; \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\lambda_{m+1}(\xi), ..., \lambda_n(\xi) \in C\Pi^*_\alpha, \quad \xi \neq 0.$$

Отметим, что в силу (1.3) введенные множества корней могут пересекаться лишь в конечном числе точек и так как характер этих точек ничем не отличается от точки $\xi = 0$, то мы будем предполагать, что $\xi = 0$ – единственная такая точка. Введем полиномы по λ:

$$P_k(\xi,\lambda) = \prod_{j=1}^{k}(\lambda - \lambda_j(\xi)) = \lambda^k + \sum_{j=1}^{k} p_j(\xi)\lambda^{k-j},$$

$$Q_{m-k}(\xi,\lambda) = \prod_{j=1}^{m-k}(\lambda - \lambda_{k+j}(\xi)) = \lambda^{m-k} + \sum_{j=1}^{m-k} q_j(\xi)\lambda^{m-k-j}, \tag{2.2}$$

$$R_{n-m}(\xi,\lambda) = \prod_{j=1}^{n-m}(\lambda - \lambda_{m+j}(\xi)) = \lambda^{n-m} + \sum_{j=1}^{n-m} r_j(\xi)\lambda^{n-m-j}.$$

Заметим, что коэффициенты введенных полиномов удовлетворяют оценкам (1.7). Рассмотрим функции

$$\hat{V}_j(\xi,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(\xi)} \frac{\lambda^{m-k-j-1} + q_1(\xi)\lambda^{m-k-j-2} + \ldots + q_{m-k-j-1}(\xi)}{Q_{m-k}(\xi,\lambda)} e^{\lambda t} d\lambda,$$

$$t \in \overline{\Pi}_\alpha, \quad \xi \neq 0, \tag{2.3}$$

где замкнутый контур $\gamma(\xi)$ содержит все корни полинома $Q_{m-k}(\xi,\lambda)$. На основании Леммы 1.1 функция $\theta^-(\xi)\hat{V}_j(\xi,t)$ удовлетворяет оценкам (1.16), (1.17) с $\varepsilon_o = 0$, $\varepsilon_j = \varepsilon - j$, $0 < \varepsilon < 1$. Положим

$$\hat{w}_j(\xi,t) = \frac{\theta^-(\xi)\hat{V}_j(\xi,t)}{(1+\xi^2)^{k_o}}, \quad k_o \gg 1. \tag{2.4}$$

Лемма 2.1. Прообраз Фурье $w_j(x,t)$ функции $\hat{w}_j(\xi,t)$ продолжается аналитически в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, $z = x + iy$ и удовлетворяет там оценке

$$|w_j(z,t)| \leq c_j \frac{(1+|t|)^{l_j}}{1+|z|}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $\hat{V}_j(\xi,t)$ непрерывна слева и справа в точке $\xi = 0$ и имеет место

$$|\hat{V}_j(0\pm,t)| \leq c_j(1+|t|)^{l_{j1}}. \tag{2.6}$$

Очевидно также, что

$$|w_j(z,t)| \leq c_j(1+|t|)^{l_{j2}}, \quad \operatorname{Im} z \geq 0, \quad t \in \overline{\Pi}_\alpha. \tag{2.7}$$

Далее, имеем

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\hat{w}_j(\xi,t) = -\frac{2k_o\xi}{(1+\xi^2)^{k_o+1}}\theta^-(\xi)\hat{V}_j(\xi,t) + \hat{V}_j(0-,t)\delta(\xi) + \frac{\theta^-(\xi)}{(1+\xi^2)^{k_o}}\frac{\partial}{\partial\xi}\hat{V}_j(\xi,t), \tag{2.8}$$

где $\delta(\xi)$–дельта-функция Дирака. Применяя к (2.8) обратное преобразование Фурье и используя оценки (1.16), (1.17), получим

$$|zw_j(z,t)| \leq c_j(1+|t|)^{l_j}. \tag{2.9}$$

Из (2.7) и (2.9) вытекает утверждение леммы 2.1.

Лемма 2.2. Пусть $V(x,t) \in M_\beta$, а её образ Фурье $\hat{V}(\xi,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$Q_{m-k}\left(\xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) \hat{V}(\xi,t) = 0, \qquad \xi \neq 0, \quad t \in \Pi_\alpha. \tag{2.10}$$

Тогда $V(x,t)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z \geq 0$ и удовлетворяет оценкам

$$|D_z^j D_t^k V(z,t)| \leq c_{jk}(1+|z|)^{\beta_{jk}}(1+|t|)^{\gamma_{jk}}, \quad \beta_{jk} < \beta. \tag{2.11}$$

Доказательство. Так как характеристические корни полинома Q_{m-k} при $\xi > 0$ принадлежат области $C\Pi_\alpha^*$, то из (2.10) легко вывести, что $\operatorname{supp}\hat{V}(\xi,t) \subset \overline{\mathbb{R}^-}$. Функцию $V_o(x,t) = (i+x)^{-\beta} V(x,t) \in M_o$ представим в виде [5]

$$V_o(x,t) = \Pi^+ V_o + \Pi^- V_o = V_o^+ + V_o^-, \tag{2.12}$$

где

$$V_o^\pm = \Pi^\pm V_o = \lim_{y \to 0\pm} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V_o(\eta,t)}{x - \eta + iy} d\eta,$$

удовлетворяют оценкам

$$|D_z^j D_t^k V_o^+(z,t)| \leq c_{jk}(1+|z|)^{\beta_{jk}}(1+|t|)^{\gamma_{jk}}, \quad \beta_{jk} < 0, \quad \operatorname{Im} z \geq 0, \quad t \in \overline{\Pi}_\alpha. \tag{2.13}$$

Для $V_o^-(z,t)$ такая же оценка имеет место в $\operatorname{Im} z \leq 0$, $t \in \overline{\Pi}_\alpha$.

Таким образом, $v(x,t) \in M_\beta$ может быть представлена в виде

$$V(x,t) = V^+(x,t) + V^-(x,t), \tag{2.14}$$

где $V^\pm(z,t)$ аналитически продолжаются, соотвецтвенно, в верхнюю и нижнюю полуплоскости, удовлетворяя оценкам (2.11). Заметим, что $M_o \subset \tilde{H}_\delta$, $|\delta| < 1/2$, где

$$\tilde{H}_\delta = \{u(\xi) : \|(1+|\xi|)^\delta u(\xi)\|_{L_2} < +\infty\}$$

–пространство Соболева и как показано в [5]

$$\Pi^\pm V_o^\pm = V_o^\pm = F[\theta^\pm(\xi) F^{-1}[V_o^\pm(x,t)](\xi,t)](x,t); \quad \Pi^\pm V_o^\mp = 0.$$

Отсюда легко вывести, что $\operatorname{supp} V^{\mp}(\xi,t) \subset \overline{\mathbb{R}^{\pm}}$ и так как $\operatorname{supp}\hat{V}(\xi,t) \subset \overline{\mathbb{R}^{-}}$, то носитель $F_x[V(x,t)-V^{+}(x,t)](\xi,t)$ сосредоточен в точке $\xi = 0$, следовательно

$$V(x,t) - V^{+}(x,t) = \sum_{j<\beta} a_j(t)x^j, \quad a_j(t) \in M. \tag{2.15}$$

Из (2.15) вытекает утверждение Леммы 2.2.

Нам понадобится также

Лемма 2.3. Если $u(x,t) \in M_\beta$ является решением однородной $(f_j \equiv 0)$ задачи А1, то

$$u(x,t) = \sum_{j\leq\beta-1} a_j(t)x^j, \quad a_j(t) \in M. \tag{2.16}$$

Доказательство. Представляя $u(x,t) = u^{+}(x,t) + u^{-}(x,t)$ (см. (2.14)), будем иметь

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u^{+}(x,t) = -P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u^{-}(x,t). \tag{2.17}$$

Так как левая часть аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, а правая–в нижнюю, имея степенной рост, то по Теореме Лиувилля

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u^{\pm}(x,t) = \pm \sum_{j\leq\beta-1} b_j(t)x^j, \quad b_j(t) \in M. \tag{2.18}$$

Граничное условие (5) также перепишется в виде $f_j \equiv 0$

$$\frac{\partial^j u^{\pm}(x,0)}{\partial t^j} = \pm \sum_{s\leq\beta-1} q_{sj}x^s, \quad j = 0,\dots,k-1, \tag{2.19}$$

где q_{sj}–постоянные. Переходя в (2.18), (2.19) к образам Фурье, получим

$$P_n\left(\xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) \hat{u}^{-}(\xi,t) = 0, \qquad \xi \neq 0, \quad t \in \Pi_a; \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial^j \hat{u}^{-}(\xi,0)}{\partial t^j} = 0, \qquad \xi \neq 0, \quad j = 0,\dots,k-1. \tag{2.21}$$

Уравнение (2.20) легко редуцируется к уравнению

$$Q_{m-k}\left(\xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) P_k\left(\xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) \hat{u}^{-}(\xi,t) = 0, \qquad \xi \neq 0, \quad t \in \Pi_a, \tag{2.22}$$

откуда (см. Лемму 2.2) $\operatorname{supp} P_k\left(\xi, \frac{\partial}{\partial t}\right)\hat{u}^{-} \subset \overline{\mathbb{R}^{-}}$ и так как $\operatorname{supp}\hat{u}^{-} \subset \overline{\mathbb{R}^{+}}$, то

$$P_k\left(\xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) \hat{u}^{-}(\xi,t) = 0, \quad \xi \neq 0. \tag{2.23}$$

Решая задачу Коши (2.23), (2.21), получим $\hat{u}^-(\xi,t) = 0$, $\xi \neq 0$. Используя это, образ Фурье однородных $f_j \equiv 0$ условий (6) перепишем в виде

$$\frac{\partial^j \hat{u}^+(\xi,0)}{\partial t^j} + \frac{\partial^j \overline{\hat{u}^+}(-\xi,0)}{\partial t^j} = 0, \quad j = k,...,m-1, \quad \xi \neq 0,$$

откуда

$$\frac{\partial^j \hat{u}^+(\xi,0)}{\partial t^j} = 0, \quad j = k,...,m-1, \quad \xi \neq 0. \tag{2.24}$$

Ясно, что $\hat{u}^+(\xi,t)$ также удовлетворяет уравнению (2.22) и граничным условиям (2.21), которые вместе с условиями (2.24) представляют однородную задачу Коши для уравнения (2.22), поэтому $\hat{u}^+(\xi,t) = 0$, $\xi \neq 0$.

Таким образом, $\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}^+ + \hat{u}^- = 0$, при $\xi \neq 0$, откуда и следует представление (2.16). Лемма 2.3 доказана.

I. **ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ А1.** Отметим сразу, что в классе M_o, $u \equiv 0$, (вытекает из Леммы 2.3). Согласно этой же лемме решение однородной задачи А1 в классе M_β, $\beta > 0$ есть многочлен по x степени $\beta - 1$ и поэтому условие (6) $f_j \equiv 0$ может быть переписано в форме

$$\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j} = i(c_o^j + c_1^j x + \cdots + c_{\beta-1}^j x^{\beta-1}), \tag{2.25}$$

где $c_k^j \in \mathbb{R}$–произвольные числа.

Таким образом, однородная задача А1 принимает вид:

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t) = 0, \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j} = 0, \quad j = 0,...,k-1, \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j} = i(c_o^j + c_1^j x + \cdots + c_{\beta-1}^j x^{\beta-1}), \quad j = k,...,m-1. \tag{2.28}$$

Очевидно $\rho(0) \geq m$, где $\rho(0)$–число корней характеристического уравнения (3), принадлежащих области Π_α°. Подставляя $u(x,t)$ из (2.16) в (2.26)–(2.28), мы без труда установим:

Теорема 2.1. Однородная задача А1 в классе M_β, $\beta > 0$ целое, имеет $r \geq \beta(m-k)$ линейно независимых решений.

Следствие. Однородная задача А1 в классе M имеет бесконечно много линейно независимых решений.

II. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ А1. Напомним, что в (2) $f(x,t) \equiv 0$, в силу Теоремы 1.1. Используя представление (2.14) как для решения $u(x,t)$, так и для функций $f_j(x)$, задачу А1 расчленим на следующие задачи:

1.

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u^-(x,t) = 0, \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial^j u^-(x,0)}{\partial t^j} = f_j^-(x), \quad j = 0,\dots,k-1. \tag{2.30}$$

2.

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u^+(x,t) = 0, \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial^j u^+(x,0)}{\partial t^j} = f_j^+(x), \quad j = 0,\dots,k-1, \tag{2.32}$$

$$\operatorname{Re}\frac{\partial^j u^+(x,0)}{\partial t^j} = f_j(x) - \operatorname{Re}\frac{\partial^j u^-(x,0)}{\partial t^j} = g_j(x), \quad j = k,\dots,m-1. \tag{2.33}$$

Освободимся от символа Re в (2.33). Если $g_j(x) \in M_0$, то имеем

$$\frac{\partial^j u^+(x,0)}{\partial t^j} = 2g_j^+(x), \quad j = k,\dots,m-1;\ g_j^+ = \Pi^+ g_j. \tag{2.34}$$

Если же $g_j(x) \in M_\beta$, $\beta \geq 1$, то представляя $g_j(x) = g_j(0) + \dots + \frac{x^{\beta-1}}{(\beta-1)!} g_j^{(\beta-1)}(0) + g_j^0(x)$, заметим, что $q_{j0}(x) = g_j^0(x)/x^\beta \in M_0$, и поэтому из (2.33) легко выводим

$$\frac{\partial^j u^+(x,0)}{\partial t^j} = g_j(0) + \dots + \frac{x^{\beta-1}}{(\beta-1)!} g_j^{(\beta-1)}(0) + x^\beta q_{j0}^+(x) = q_j^+(x),$$

$$j = k,\dots,m-1;\ q_{j0}^+ = \Pi^+ q_{j0}. \tag{2.35}$$

Вначале докажем разрешимость задачи 1, а затем, подставляя $u^-(x,t)$ в (2.33), и разрешимость задачи 2. Переходя к образам Фурье в (2.29), (2.30), мы как и выше (см. доказательство леммы 2.3), получим

$$P_k\left(\xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) \hat{u}^-(\xi,t) = 0, \quad \xi \neq 0, \quad t \in \Pi_\alpha, \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial^j \hat{u}^-(\xi,0)}{\partial t^j} = \hat{f}_j^-(\xi), \quad j = 0,\dots,k-1. \tag{2.37}$$

Нам понадобится

Лемма 2.4. Пусть $f(x) \in M_o$, а $|V(x)| \le (1+|x|)^{-1}$. Тогда их свёртка $f * V \in M_o$.

Доказательство. Имеем

$$|D_x^j(V * f)| = |V * D_x^j f| \le c_j \int \frac{d\tau}{(1+|x-\tau|)(1+|\tau|)^{\beta_j}}, \quad 0 < \beta_j < 1.$$

Из $|\tau| \le |x|/2$ следует, что $1+|x-\tau| \ge 1+|x|-|\tau| \ge 1+|x|/2$, поэтому

$$\int_{|\tau|\le|x|/2} \frac{d\tau}{(1+|x-\tau|)(1+|\tau|)^{\beta_j}} \le \frac{2}{1+|x|/2} \int_0^{|x|/2} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{\beta_j}} \le c_{jo} \frac{1}{(1+|x|)^{\beta_j}}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$–достаточно малое заданное число, а $q \in \mathbb{R}$ такое, что $q\varepsilon > 1$. Используя неравенство Гёльдера, получим

$$\int_{|\tau|>|x|/2} \frac{d\tau}{(1+|x-\tau|)(1+|\tau|)^{\beta_j}} = \int_{|\tau|>|x|/2} \frac{1}{(1+|x-\tau|)} \frac{1}{(1+|\tau|)^{\varepsilon}} \frac{d\tau}{(1+|\tau|)^{\beta_j-\varepsilon}} \le$$

$$\le \frac{1}{(1+\frac{|x|}{2})^{\beta_j-\varepsilon}} \left(\int \frac{d\tau}{(1+|x-\tau|)^p}\right)^{1/p} \left(\int \frac{d\tau}{(1+|\tau|)^{q\varepsilon}}\right)^{1/q} \le \frac{c}{(1+|x|)^{\beta_j-\varepsilon}},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Объединяя полученные оценки, установим утверждение леммы 2.4.

Следствие 2.4. Если $f \in M_\beta$, а $|v(x)| \le (1+|x|)^{-\beta-1}$, то $f * v \in M_\beta$.

Доказательство. В силу неравенства Питре

$$(1+|x-\tau|)^{-\beta} \le (1+|x|)^{\beta}(1+|\tau|)^{-\beta}.$$

будем иметь

$$|v * f| \le \int \frac{(1+|x|)^{\beta} d\tau}{(1+|x-\tau|)(1+|\tau|)^{\beta-\beta_j}} \le c_j(1+|x|)^{\gamma_j}, \quad \gamma_j < \beta.$$

Пусть $v_j^{(1)}(\xi,t)$ обозначают функции из (2.3), построенные для полинома $P_k(\xi,\lambda)$, которые также удовлетворяют оценкам (1.16), (1.17).

Рассмотрим функционал

$$\bar{u}_o^-(\xi,t) = \sum_{j\le k-1} \theta^+(\xi) v_j^{(1)}(\xi,t) f_j^-(\xi). \tag{2.38}$$

Пусть вначале $f_j \in M_o$, $j = 0, \dots, k-1$. Тогда в силу Лемм 2.1 и 2.4

$$u_o^-(x,t) = F_\xi^{-1}[\hat{u}^-(\xi,t)] = \sum_{j \le k-1} F_\xi^{-1}[\theta^+(\xi)v_j^{(1)}(\xi,t)] * f_j^-(x) \in M_o \tag{2.39}$$

является решением задачи 1 (здесь мы используем тот факт, что элементы пространства M_o стремятся к нулю при $x \to \infty$). Если же $f_j \in M_\beta$, $\beta \ge 1$, то поступаем следующим образом. Пусть $k_o \gg 1$ такое, что

$$\left| F_\xi^{-1}\left[\frac{\theta^+(\xi)v_j^{(1)}(\xi,t)\xi^\beta}{(1+\xi^2)^{k_o}}\right]\right| \le c\frac{(1+|t|)^{m_o}}{(1+|x|)^{\beta+1}}. \tag{2.40}$$

В условии (5), а значит и в (2.30) вместо $f_j(x) \in M_\beta$ возьмем $D_x^\beta f_j(x) \in M_\beta$. Тогда формула (2.38) примет вид

$$\hat{u}_o^-(\xi,t) = \sum_{j \le k-1} \frac{\theta^+(\xi)v_j^{(1)}(\xi,t)\xi^\beta}{(1+\xi^2)^{k_o}}(1+\xi^2)^{k_o}\hat{f}_j^-(\xi) \tag{2.41}$$

и в силу следствия 2.4 и из Леммы 2.4 $u_o^-(x,t) = F^{-1}[\hat{u}_o^-(\xi,t)] \in M_\beta$. Построенная функция $u_o^-(x,t)$ удовлетворяет задаче

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u_o^-(x,t) = \sum_{l \le \beta-1} a_j(t)x^j, \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial^j u_o^-(x,0)}{\partial t^j} = D_x^\beta f_j^-(x) + \sum_{s \le \beta-1} b_{sj}x^s, \quad j = 0, \dots, k-1. \tag{2.43}$$

Заменяя $u_o^-(x,t) = D_x^\beta u_1^-(x,t)$, где $u_1^- \in M_{2\beta}$ в (2.42), (2.43) получим

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u_1^-(x,t) = \sum_{j \le 2\beta-1} a_{j1}(t)x^j, \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial^j u_1^-(x,0)}{\partial t^j} = f_j^-(x) + \sum_{s \le 2\beta-1} b_{js}x^s, \quad j = 0, \dots, k-1. \tag{2.45}$$

Очевидно задача

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)w = \sum_{j \le 2\beta-1} a_{j1}(t)x^j, \tag{2.46}$$

$$\frac{\partial^j w(x,0)}{\partial t^j} = \sum_{s \le 2\beta-1} b_{js}x^s, \quad j = 0, \dots, k-1 \tag{2.47}$$

имеет решение $w \in M_{2\beta}$ вида $\sum_{j \le 2\beta-1} c_j(t)x^j$. Тогда функция

$$u^-(x,t) = u_1^-(x,t) - w(x,t) \in M_{2\beta}$$

является решением задачи 1. Исследование задачи 2 проводится аналогичным образом, при этом в образах Фурье вместо задачи (2.36), (2.37) мы будем иметь (см. доказательство Леммы 2.3)

$$Q_{m-k}\left(\xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) P_k\left(\xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) \hat{u}^+(\xi, t) = 0, \quad \xi \neq 0, \tag{2.48}$$

$$\frac{\partial^j \hat{u}^+(\xi, 0)}{\partial t^j} = f_j^+(\xi), \quad j = 0, \dots, k-1, \quad \xi \neq 0, \tag{2.49}$$

$$\frac{\partial^j \hat{u}^+(\xi, 0)}{\partial t^j} = q_j^+(\xi), \quad j = k, \dots, m-1, \quad \xi \neq 0. \tag{2.50}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2.2. Неоднородная задача А1 в классе M разрешима. При этом, если $f_j \in M_o$, $j = 0, \dots, m-1$, то решение $u \in M_o$, если же $f_j \in M_\beta$, $\beta \geq 1$, то $u \in M_{2\beta}$.

Объединяя теоремы 2.1 и 2.2, получим:

Теорема 2.3. Задача Коши-Римана-Гильберта (К-Р-Г) в классе M_o имеет единственное решение. Если же $f_j \in M_\beta$, то неоднородная задача К-Р-Г в классе $M_{2\beta}$ имеет решение, а однородная задача в этом же классе имеет конечное число линейно независимых решений. В классе $M = \cup_{\beta \geq 0} M_\beta$ неоднородная задача К-Р-Г имеет решение, а однородная–бесконечно много линейно независимых решений.

§3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Введём полиномы по λ:

$$a_j(\xi, \lambda) = \sum_{l \leq n-1} a_{jl}(\xi)\lambda^l, \quad j = 0, \dots, m-1, \tag{3.1}$$

$$b_j(\xi, \lambda) = a_j(\xi, \lambda) (\mathrm{mod}\, P_k(\xi, \lambda)) = \sum_{l \leq k-1} b_{jl}^{(1)}(\xi)\lambda^l, \quad j = 0, \dots, k-1, \quad \xi > 0, \tag{3.2}$$

$$b'_j(\xi, \lambda) = a_j(\xi, \lambda) (\mathrm{mod}\, Q_{m-k}(\xi, \lambda) P_k(\xi, \lambda)) = \sum_{l \leq m-1} b_{jl}^{(2)}(\xi)\lambda^l,$$
$$j = 0, \dots, m-1, \xi < 0. \tag{3.3}$$

Пусть

$$B_1(\xi) = \left(b_{jl}^{(1)}(\xi)\right)_{j,l=0}^{k-1}, \xi > 0, \tag{3.4}$$

$$B_2(\xi) = \left(b_{jl}^{(2)}(\xi)\right)_{j,l=0}^{m-1}, \xi < 0 \tag{3.5}$$

–матрицы порядков k и m.

Теорема 3.1. Условия

$$\det B_1(\xi) \not\equiv 0, \tag{3.6}$$

$$\det B_2(\xi) \not\equiv 0 \tag{3.7}$$

необходимы и достаточны для разрешимости неоднородной задачи А2 в классе M.

Теорема 3.2. Условия

$$\det B_1(\xi) \neq 0 \ \forall \xi \geq 0 \tag{3.8}$$

$$\det B_2(\xi) \neq 0 \ \forall \xi \leq 0 \tag{3.9}$$

необходимы и дастаточны для существования и единственности решения задачи А2 в классе M_0.

Доказательство теоремы 3.1. Докажем достаточность условий (3.6), (3.7). Из разложения в ряд Пюизьё элементов матриц $B_1(\xi)$, $B_2(\xi)$ следует, что функции $\det B_1(\xi)$, $\det B_2(\xi)$ могут иметь лишь конечное число нулей или быть тождественным нулем. Мы ограничимся лишь единственной точкой $\xi = 0$, в которой $\det B_1(0+) = \det B_2(0-) = 0$.

Заметим, что $b_{jl}^{(1)}(\xi) \in C^\infty(R^+)$, $b_{jl}^{(2)}(\xi) \in C^\infty(R^-)$, при $\xi \neq 0$.

Представляя $u(x,t)$ в виде $u(x,t) = u^+(x,t) + u^-(x,t)$ (см. (2.14)), мы вместо задачи (2), (7), (8), получим задачи:

3.

$$P_n(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})u^-(x,t) = 0, \tag{3.10}$$

$$\sum_{l=0}^{n-1} a_{jl}(i\frac{\partial}{\partial x})\frac{\partial^l u^-(x,0)}{\partial t^l} = f_j^-(x), \quad j = 0, ..., k-1. \tag{3.11}$$

4.

$$P_n(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})u^+(x,t) = 0, \tag{3.12}$$

$$\sum_{l=0}^{n-1} a_{jl}(i\frac{\partial}{\partial x})\frac{\partial^l u^+(x,0)}{\partial t^l} = f_j^+(x), \quad j = 0, ..., k-1, \tag{3.13}$$

$$\sum_{l=0}^{n-1} a_{jl}(i\frac{\partial}{\partial x})\frac{\partial^l u^+(x,0)}{\partial t^l} = q_j^+(x), \quad j = k, ..., m-1. \tag{3.14}$$

Условие (3.14) мы получаем так же, как и (2.35) из (2.33).

Рассмотрим вспомогательную задачу

5.
$$P_n(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})w(x,t) = \sum_{j \le N_0} a_j(t)x^j, \tag{3.15}$$

$$\sum_{l \le n-1} a_{jl}(i\frac{\partial}{\partial x})\frac{\partial^l w(x,0)}{\partial t^l} = \sum_{s \le N_0} b_{js}x^s, \quad j = 0, ..., k-1, \tag{3.16}$$

где $a_j(t) \in M, b_{js} \in C$. Покажем, что задача 5 в классе M имеет решение, если выполнено условие (3.6).

Рассмотрим

$$P_{\rho(0)}(\xi,\lambda) = \prod_{j=1}^{\rho(0)}(\lambda - \lambda_{r_j}(\xi)) = \lambda^{\rho(0)} + \sum_{j=1}^{\rho(0)} p_j(\xi)\lambda^{\rho(0)-j}, \quad |\xi| < \varepsilon, \tag{3.17}$$

где $\lambda_{r_j}(\xi)$–те из корней, которые принадлежат области Π^*_λ при $\xi = 0$. Очевидно, что коэффициенты $p_j(\xi)$ полинома $P_{\rho(0)}(\xi,\lambda)$ бесконечно дифференцируемы. Мы имеем

$$P_{\rho(0)}(\xi,\lambda) = Q_{\rho(0)-k}(\xi,\lambda)P_k(\xi,\lambda), \quad |\xi| < \varepsilon, \tag{3.18}$$

где $Q_{\rho(0)-k}(\xi,\lambda)$–полином по λ степени $\rho(0) - k$.

Положим

$$c_j(\xi,\lambda) = a_j(\xi,\lambda)(\mathrm{mod} P_{\rho(0)}(\xi,\lambda)) = \sum_{l=0}^{\rho(0)-1} c_{jl}(\xi)\lambda^l, \quad j = 0, ..., k-1, \quad |\xi| < \varepsilon \tag{3.19}$$

и введем прямоугольную матрицу

$$C(\xi) = (c_{jl}(\xi)), \quad j = 0, ..., k-1;\ l = 0, ..., \rho(0) - 1. \tag{3.20}$$

Имеет место

Лемма 3.1. Справедлива формула

$$\mathrm{rank} C(\xi) = k \quad \forall \xi \in (0,\varepsilon). \tag{3.21}$$

Доказательство. Напомним, что по предположению $\mathrm{rank} b^{(1)}_{jl}(\xi) = k$ при $0 < \xi < \varepsilon$, где $b^{(1)}_{jl}(\xi)$ определены в (3.2). Согласно (3.18) имеем

$$c_j(\xi,\lambda) = P_k(\xi,\lambda)r_j(\xi,\lambda) + b_j(\xi,\lambda), \quad j = 0, ..., k-1, \quad \xi \in (0,\varepsilon), \tag{3.22}$$

где $r_j(\xi,\lambda)$–полиномы от λ, а $b_j(\xi,\lambda)$ определены в (3.2). Если в некоторой точке $\xi_0 \in (0,\varepsilon)$ ранг матрицы $C(\xi_0)$ меньше k, то $\mathrm{rank}(b_{jl}^{(1)}(\xi_0)) < k$, что противоречит условию $\mathrm{rank}(b_{jl}^{(1)}(\xi)) = k$ при $\xi > 0$.

Согласно работе [6] матрица $C(\xi)$ может быть представлена в форме:

$$C(\xi) = R_1(\xi)D(\xi)R_2(\xi), \quad |\xi| < \varepsilon, \tag{3.23}$$

где $D(\xi) = \{\xi^{n_j}\delta_l^j\}$–диагональная матрица порядка k, элементы матриц $R_1(\xi)$, $R_2(\xi)$ аналитичны при $|\xi| < \varepsilon$, $\det R_1(\xi) \neq 0$, $\mathrm{rank} R_2(0) = k$.

Теперь мы готовы к доказательству разрешимости задачи 5.

Заметим, что правая часть в (3.15) может быть взята равной нулю (см. Теорему 1.1). Таким образом имеем

$$P_{\rho(0)}(\xi, \frac{\partial}{\partial t})\widehat{w}(\xi,t) = 0, \tag{3.24}$$

$$\sum_{l=0}^{\rho(0)-1} c_{jl}(\xi)\frac{\partial^l \widehat{w}(\xi,0)}{\partial t^l} = \alpha_j(\xi), \quad j = 0,...,k-1, \tag{3.25}$$

где $\alpha_j(\xi) = F[\sum_{s\leq N_0} b_{js}x^s]$ сосредоточен в точке $\xi = 0$.

Положим

$$v = (v_0,...,v_{k-1}) = R_2(\xi)\left(\widehat{w}(\xi,0),..., \frac{\partial^{\rho(0)-1}\widehat{w}(\xi,0)}{\partial t^{\rho(0)-1}}\right). \tag{3.26}$$

Условия (3.25) перепишут ся в виде

$$\xi^{n_j} v_j(\xi) = \alpha_j^{(1)}(\xi), \quad j = 0,...,k-1, \tag{3.27}$$

где функционалы $\alpha_j^{(1)}(\xi)$ также сосредоточены в точке $\xi = 0$. Ясно, что система (3.27) допускает решение, сосредоточенное в точке $\xi = 0$. Следовательно, из (3.26) получим

$$\sum_{l=0}^{\rho(0)-1} r_{jl}^{(2)}(\xi)\frac{\partial^l \widehat{w}(\xi,0)}{\partial t^l} = \beta_j(\xi), \quad j = 0,...,k-1, \tag{3.28}$$

где $\mathrm{rank}(r_{jl}^{(2)}(\xi)) = k$, при $|\xi| < \varepsilon$, а $\beta_j(\xi)$ сосредоточены в точке $\xi = 0$. Добавляя к условиям (3.28) $\rho(0) - k$ условий такого же вида так, чтобы определитель полученной системы был отличен от нуля, при $|\xi| < \varepsilon$, мы найдём

$$\frac{\partial^j \widehat{w}(\xi,0)}{\partial t^j} = \gamma_j(\xi), \quad j = 0, ..., \rho(0) - 1, \tag{3.29}$$

где функционалы $\gamma_j(\xi)$ сосредоточены в точке $\xi = 0$. Таким образом, для определения $\widehat{w}(\xi,t)$ мы получили задачу Коши (3.24), (3.29), решение которой запишет ся в виде

$$\widehat{w}(\xi,t) = \sum_{j=0}^{\rho(0)-1} v_j(\xi,t)\gamma_j(\xi), \tag{3.30}$$

где $v_j(\xi,t) \in C^\infty$ аналитичны по $t \in \Pi_\alpha$, определяют ся формулой (2.3), выписанной для полинома $P_{\rho(0)}(\xi,\lambda)$, $|\xi| < \varepsilon$. Так как все корни полинома $P_{\rho(0)}(\xi,\lambda)$ в точке $\xi = 0$ принадлежат области Π^*_α, то

$$|D^l_\xi D^k_t v_j(0,t)| \le c_{lk}(1+|t|)^{m_{lk}}, \ t \in \overline{\Pi}_\alpha. \tag{3.31}$$

Остает ся заметить, что формула (3.30) зависит от функции $D^l_\xi v_j(0,t)$, поскольку функционал $\gamma_j(\xi)$ сосредоточен в точке $\xi = 0$. Таким образом, $w(x,t) = F^{-1}[\widehat{w}(\xi,t)] \in M$ и разрешимость задачи 5 доказана.

Исследуем теперь задачи 3, 4. Переходя к образам Фурье в (3.10), (3.11) и используя обозначение (3.2), будем иметь (см. (2.36))

$$P_k(\xi,\frac{\partial}{\partial t})\widehat{u}^-(\xi,t) = 0, \quad \xi > 0, \tag{3.32}$$

$$\sum_{l=0}^{k-1} b^{(1)}_{jl}(\xi)\frac{\partial^l \widehat{u}^-(\xi,0)}{\partial t^l} = \widehat{f}^-_j(\xi), \ \xi > 0, \ j = 0, ..., k-1. \tag{3.33}$$

Условие (3.33) перепишем в форме

$$\frac{\partial^j \widehat{u}(\xi,0)}{\partial t^j} = \sum_{l=0}^{k-1} B^{(1)}_{jl}(\xi)\widehat{f}^-_l(\xi), \ j = 0, ..., k-1, \tag{3.34}$$

где $B^{(1)}_{jl}(\xi)$–элементы матрицы $(B_1(\xi))^{-1}$. Так как коэффициенты полинома $P_k(\xi,\lambda)$ удовлетворяют

оценкам (1.7), то имеем

$$|D^s_\xi B^{(1)}_{jl}(\xi)| \le c_s|\xi|^{m_s}(1+|\xi|)^{n_s}. \tag{3.35}$$

Предположим, что $f_j(x) \in M_\beta, j = 0, ..., m-1$, а $k_0, \nu_0 \gg 1$ такие, что (см. (2.38),(2.40))

$$\left| F_\xi^{-1} \left[\frac{\theta^+(\xi^{\nu_0}) B_{jl}^{(1)}(\xi) v_j^{(1)}(\xi,t)}{(1+\xi^2)^{k_0}} \right] \right| \le c \frac{(1+|t|)^{m_{01}}}{(1+|x|)^{\beta+1}}. \quad (3.36)$$

Тогда, взяв в условиях (7), (3.11), вместо $f_j \in M_{beta}$ функцию $D_x^{\nu_0} f_j \in M_\beta$, получим

$$u_0^-(x,t) = F_\xi^{-1} \left[\sum_{j \le k-1} \frac{\theta^+(\xi^{\nu_0}) B_{jl}^{(1)}(\xi) v_j^{(1)}(\xi,t)}{(1+\xi^2)^{k_0}} \right] * (1 - \frac{d^2}{dx^2})^{k_0} f_j(x) \in M_\beta. \quad (3.37)$$

Функция $u_0^-(x,t)$ удовлетворяет равенствам (см. также (2.46), (2.47))

$$P_n(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) u_0^-(x,t) = \sum_{j \le \beta-1} a_j(t) x^j, \quad (3.38)$$

$$\sum_{l=0}^{n-1} a_{jl}(i\frac{\partial}{\partial x}) \frac{\partial^l u^-(x,0)}{\partial t^l} = D_x^{\nu_0} f_j^-(x) + \sum_{s \le \beta-1} b_{js} x^s, \quad j = 0, ..., k-1. \quad (3.39)$$

Далее, поступая как и при исследовании задачи (2.42), (2.43), мы сведём вопрос о разрешимости задачи 3 к разрешимости задачи 5. Таким образом, задача 3 имеет решение. Задача 4 исследует ся аналогично и доказывает ся её разрешимость.

Итак, достаточность условий (3.6), (3.7) доказана. Теперь докажем их необходимость. Для определенности пусть $\det B_1(\xi) \equiv 0$ при $\xi \ge 0$. Покажем, что задача А2 в классе M имеет решение не для всех $f_j(x)$. Заметим, что если задача А2 имеет решение u, то образ Фурье $\widehat{u}^-$ функции u^- (см. 2.14) удовлетворяет задаче:

$$P_k(\xi, \frac{\partial}{\partial t}) \widehat{u}^-(\xi,t) = 0, \xi > \delta > 0, \quad (3.40)$$

$$\sum_{l=0}^{k-1} b_{jl}^{(1)}(\xi) \frac{\partial^l \widehat{u}^-(\xi,0)}{\partial t^l} = \widehat{f}_j^-(\xi), \; j = 0, ..., k-1, \xi > \delta > 0. \quad (3.41)$$

Заметим также, что элементы $b_{jl}^{(1)}(\xi)$ матрицы $B_1(\xi)$-аналитические функции от $\xi > 0$ и имеют конечное число нулей при $\xi \ge \delta > 0$ или равны тождественно нулю. От сюда следует, что существует интервал $(a,b) \subset \{\xi > \delta\}$, на котором

$$B_1(\xi) = M_1(\xi) D_1(\xi) N_1(\xi), \quad (3.42)$$

где $\det M_1(\xi) \neq 0, \det N_1(\xi) \neq 0$, а $D_1(\xi)$– диагональная матрица, элементы этих матриц также аналитичны. Так как $\det B_1(\xi) \equiv 0$, то по крайней мере один из диагональных элементов матрицы $D_1(\xi)$ равен тождественно нулю. Используя (3.42) и (3.41), убедимся, что задача (3.40), (3.41) имеет решение не для всех правых частей. Необходимость условий (3.6), (3.7), а заодно и Теорема 3.1 доказана.

Доказательство теоремы 3.2 очевидно.

§4 ПРИМЕРЫ

I. Модельным уравнением вида (2) является уравнение Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad u \in M, x \in \mathbb{R}, t \in \Pi_\alpha. \tag{4.1}$$

Имеем, $\lambda(\xi) = \xi$ и поэтому $\rho(\xi) = 0$, при $\xi > 0$ и $\rho(\xi) = 1$, при $\xi \leq 0$, если $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Если же $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\rho(\xi) = 0$, при $\xi \neq 0$. В наших обозначениях $m = 1$, $k = 0$, при $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ и $m = k = 0$, при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Очевидно, при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ граничная задача для уравнения (4.1) отсутствует, а при $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ имеем задачу Римана-Гильберта

$$\mathrm{Re}\, u(x,0) = f(x), \quad f \in M. \tag{4.2}$$

Исследуем задачу (4.1),(4.2). Представим решение уравнения (4.1) в виде $u(x,t) = \varphi(x + it)$. Так как $u(x,t)$ аналитична для $t \in \Pi_\alpha$ при всех $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(.)$ — аналитическая функция в верхней полуплоскости. Заметим, что для $\alpha > \frac{\pi}{2}$ функция $\varphi(.)$ целая и поскольку $u \in M$ имеет рост, не выше степенного, то по теореме Лиувилля $u(x,t)$ есть многочлен по x и по t. В этом случае не может быть речи о граничной задаче. Итак, мы имеем задачу нахождения функции φ, аналитической в верхней полуплоскости, имеющей степенной рост и удовлетворяющей следующему условию:

$$\mathrm{Re}\,\varphi(x) = f(x). \tag{4.3}$$

Решение этой задачи известно и в классе M_0 задаётся формулой

$$\varphi(x + iy) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - (x + iy)}\, d\tau.$$

От сюда имеем

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - (x+it)}\,d\tau \in M_0.$$

Для случая $f \in M_\beta$, $\beta \geq 1$, решение (4.3) может быть получено следующим образом. Пусть $D_x^j f(0) = 0$ для всех $j \leq \beta - 1$, тогда $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^\beta} \in M_0$ и поэтому

$$\varphi(x+iy) = \frac{(x+iy)^\beta}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau^\beta(\tau - x - iy)}\,d\tau.$$

Используя разложение $f(x) = f(0) + \ldots + \frac{x^{\beta-1}}{(\beta-1)!}f^{(\beta-1)}(0) + q(x)$, мы решим (4.3) и, следовательно, (4.1) и (4.2) для любой $f \in M_\beta$.

II. Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_n$–попарно различные действительные числа такие, что $\mu_1, \ldots, \mu_m > 0$ и $\mu_{m+1}, \ldots, \mu_n < 0$. Рассмотрим уравнение вида:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\mu_1\frac{\partial}{\partial t}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\mu_n\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times\Pi_\alpha,\ 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}. \tag{4.4}$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:

$$(-i\xi + i\mu_1\lambda)\cdots(-i\xi + i\mu_n\lambda) = 0.$$

Откуда $\lambda_j = \xi/\mu_j$, $j = 1, \ldots, n$ и $\rho(\xi) = m$ при $\xi < 0$ и $\rho(\xi) = n - m = k$, при $\xi > 0$. Предположим, что $m > k$, с граничными условиями

$$\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j} = f_j(x), \quad j = 0, \ldots, k-1, \tag{4.5}$$

$$\mathrm{Re}\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j} = f_j(x), \quad j = k, \ldots, m-1, \tag{4.6}$$

мы получаем задачу A1, для которой укажем схему доказательства существования решения.

Решение уравнения (4.4) представим в виде

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{m}\varphi_j\left(x + i\frac{t}{\mu_j}\right) + \sum_{j=m+1}^{n}\varphi_j\left(x + i\frac{t}{\mu_j}\right), \tag{4.7}$$

где $\varphi_1(.), \ldots, \varphi_m(.)$ и $\varphi_{m+1}(.), \ldots, \varphi_n(.)$ —функции, имеющие степенной рост и аналитические в верхней и нижней полуплоскости, соответственно. Подставляя (4.7) в (4.5) и (4.6), мы получим

$$\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{i}{\mu_l}\right)^j\varphi_l^{(j)}(x) + \sum_{l=m+1}^{n}\left(\frac{i}{\mu_l}\right)^j\varphi_l^{(j)}(x) = f_j(x), \quad j = 0, \ldots, k-1, \tag{4.8}$$

$$\mathrm{Re}\left[\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{i}{\mu_l}\right)^j \varphi_l^{(j)}(x)+\sum_{l=m+1}^{n}\left(\frac{i}{\mu_l}\right)^j \varphi_l^{(j)}(x)\right]=f_j(x), \quad j=k,...,m-1. \quad (4.9)$$

Решая уравнения в (4.8), находим

$$\sum_{l=m+1}^{n}\left(\frac{i}{\mu_l}\right)^j \varphi_l^{(j)}(x)=g_j^-(x), \quad j=0,...,k-1, \quad (4.10)$$

$$\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{i}{\mu_l}\right)^j \varphi_l^{(j)}(x)=g_j^+(x), \quad j=0,...,k-1. \quad (4.11)$$

Дифференцируя $k-j-1$ раз j-ое уравнение в (4.10), получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно функций $\varphi_{m+1}^{(k-1)}(x),...,\varphi_n^{(k-1)}(x)$ с определителем Вандермонда, отличным от нуля. Таким образом, мы найдём функции $\varphi_{m+1}(x),...,\varphi_n(x)$, подставляя которые в (4.9), получим

$$\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{i}{\mu_l}\right)^j \varphi_l^{(j)}(x)=g_j^+(x), \quad j=k,...,m-1. \quad (4.12)$$

Решая систему (4.11), (4.12), мы найдём функции $\varphi_1(x),...,\varphi_m(x)$, это завершает решение задачи (4.4) – (4.6).

III. Рассмотрим уравнение вида (4.1) с младшим членом:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial t}+u=0, \quad u\in M_0,\ x\in \mathbb{R},\ t\in \Pi_\alpha,\ 0<\alpha\le\frac{\pi}{2}. \quad (4.13)$$

Имеем $\lambda=\xi+i$ и рассматриваем задачу

$$\mathrm{Re}\,u(x,0)=f(x)\in M_0. \quad (4.14)$$

Общее решение уравнения (4.13) можно записать в виде

$$u(x,t)=e^{it}\varphi(x+it), \quad (4.15)$$

где $\varphi(.)$ — функция, аналитическая в верхней полуплоскости. Из (4.15), при $t\in\mathbb{R}^+$ имеем $\varphi(x+it)=e^{-it}u\in M_0$. Следовательно, задача $\mathrm{Re}\varphi(x)=f(x)$ решается как и в примере 1. Так как $|e^{it}|\le 1$, $t\in\Pi_\alpha$, то по формуле (4.15) найдём искомое решение рассматриваемой задачи.

В заключении отметим, что если вместо (4.13) рассмотреть уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial t}-u=0, \quad x\in \mathbb{R},\ t\in \Pi_\alpha,\ 0<\alpha\le\frac{\pi}{2}, \quad (4.16)$$

то $\lambda(\xi) = \xi - i$ и ясно, что условие (4) не имеет места. Поэтому уравнение (4.16) не входит в изученный класс. Но если рассмотреть (4.16) только для $t \in \mathbb{R}^+$, то полученные результаты остаются в силе.

ABSTRACT. Let $u(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \overline{\Pi}_\alpha)$ be analytic in $t \in \Pi_\alpha = \{t | 0 < \arg t < \alpha < \pi\}$ having polynomial growth. We consider partial differential equation $\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^n A_j\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{n-j}u(x,t)}{\partial t^{n-j}} = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \Pi_\alpha$. The main assumption is that the number of roots of characteristic equation $\lambda^n + A_1(\xi)\lambda^{n-1} + \cdots + A_n(\xi) = 0$ within angular domain $\Pi_\alpha^* = \{t | \pi/2 \leq \arg t \leq \frac{3}{2}\pi - \alpha\}$ remains constant for $\xi > 0$ and $\xi < 0$. The Cauchy-Riemann-Hilbert type problem and the general boundary value problem are posed. The main result of the paper is that the Cauchy-Riemann-Hilbert type problem always has a solution. For general boundary value problem the necessary and sufficient condition of solvability is obtained. A class of correctness is given for $f(x,t) \equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андрян, "Задача Коши для уравнений с частными производными в угловых областях в классе функций полиномиального роста," Доклады расш. заседаний семинара ИПМ им. Векуа, том 5, № 1, 1990.
2. А. А. Андрян, "Граничные задачи в двугранных углах для уравнений в частных производных, не разрешённых относительно старшей производной," Докл. Акад. Наук Армении, том 93, № 1, стр. 11 – 16, 1992.
3. A. A. Andrian, "On the existence of solution of system of partial differential equations" (to appear).
4. Л. Хермандер, Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, том 2, Москва, Мир, 1986.
5. Г. И. Эскин, Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений, Москва, Наука, 1973.
6. Н. Е. Товмасян, "Краевые задачи для нерегулярных систем дифференциальных уравнений на полуплоскости в классе обобщённых функции и функций полиномиального роста," Математ. сборник, том 131 (173), № 2 (10), 1986.

12 Мая 1992

Ереванский Инженерный Университет