КВАЗИМАКСИМАЛЬНЫЕ ПОЛУГРУППЫ

Л. М. Акопян

Известия Академии Наук Армении. Математика,
том 27, № 3, 1992

В работе продолжается исследование квазимаксимальных групп, начатое в [2] (частные случаи таких полугрупп рассматривались в [3–5]). Даётся критерий квазимаксимальности в терминах характеров полугрупп Γ_0, характеризующих геометрическую структуру пространства $M_{A(\Gamma_0)}$ максимальных идеалов алгебры $A(\Gamma_0)$, обобщенных алгебраических функций, порожденной полугруппой Γ_0. Формулируется теорема, характеризующая квазимаксимальные полугруппы на оси с точки зрения теории групп [2], геометрии (структура пространства $M_{A(\Gamma_0)}$) и аппроксимационных свойств равномерной алгебры $A(\Gamma_0)$.

1. Пусть Γ — абелева группа (в аддитивной записи), порожденная собственной полугруппой Γ_0 с единицей, а $\widehat{\Gamma}$ — её компактная группа характеров. Мы также предполагаем, что в Γ нет элементов конечного порядка, что равносильно связности $\widehat{\Gamma}$.

Согласно теореме двойственности Понтрягина, Γ отождествляется с группой характеров группы $\widehat{\Gamma}$ соотношением $a \longrightarrow \chi_a$, где $\chi_a(\alpha) = \alpha(a)$, $\alpha \in \widehat{\Gamma}$.

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: $A(\Gamma_0)$ – равномерная алгебра на $\widehat{\Gamma}$, порожденная полугруппой Γ_0 (т.е. характерами χ_a, $a \in \Gamma_0$, заметим что $A(\Gamma_0)$ есть алгебра обобщенных аналитических функций в смысле Аренса-Зингера [1]); $M_{A(\Gamma_0)}$ — пространство максимальных идеалов $A(\Gamma_0)$; $\mathrm{Hom}\ \Gamma_0$ — полугруппа характеров Γ_0, т.е. гомоморфизмов Γ_0 в единичный круг; $\mathrm{Phom}\ \Gamma_0$ — полугруппа положительных характеров Γ_0, т.е. $\mathrm{Phom}\ \Gamma_0 = \{p \in \mathrm{Hom}\ \Gamma_0;\ \ p(a) \geq 0$ для всех $a \in \Gamma_0\}$; $\mathrm{Ihom}\ \Gamma_0$ — полугруппа идемпотентных характеров, т.е. $\mathrm{Ihom}\ \Gamma_0 = \{\rho \in \mathrm{Hom}\ \Gamma_0,\ \rho^2 = \rho\}$.

Мы пользуемся также следующими утверждениями (см. [1]):

1) $M_{A(\Gamma_0)} = \mathrm{Hom}\ \Gamma_0$ (с точностью до гомеоморфизма);

2) в $\mathrm{Hom}\ \Gamma_0$ имеет место полярное разложение: для каждого $\xi \in \mathrm{Hom}\ \Gamma_0$

$$\xi = p\alpha, \tag{1}$$

где $\alpha \in \widehat{\Gamma}$, $p \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0$;

3) для любого $p \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0$ и $t > 0$, $p^t \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0$, где $p^t(a) = \exp(t \ln p(a))$, если $p(a) > 0$ и $p^t(a) = 0$, если $p(a) = 0$;

4) в полугруппе $\mathrm{Ihom}\ \Gamma_0$ всегда имеются тривиальные идемпотенты $\rho \equiv 1$ и ρ_0, где $\rho_0 = 1$ на $\Gamma_0 \cap (-\Gamma_0)$ и $\rho_0 = 0$ на $\Gamma_0 \setminus (\Gamma_0 \cap (-\Gamma_0))$.

2. Полярное разложение (1) и гомеоморфизм $M_{A(\Gamma_0)} = \mathrm{Hom}\ \Gamma_0$ сводит задачу к описанию полугрупп $\mathrm{Phom}\ \Gamma_0$.

В случае, когда Γ_0 — максимальная полугруппа в Γ (т.е. Γ_0 не содержится ни в одной собственной полугруппе группы Γ), пространство $M_{A(\Gamma_0)}$ одномерно в том смысле, что для любых $p, q \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0$ существует такое $t > 0$, что $q = p^t$ (и $\mathrm{Ihom}\ \Gamma_0 = \{1, \rho_0\}$) (см. [2],[6]).

Последнее обстоятельство мы записываем как

$$\mathrm{Phom}\ \Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0 = \{p^t : \quad t > 0\}$$

и говорим, что группа $\mathrm{Hom}\ \Gamma_0$ одномерна.

Определение. Порождающая группу Γ собственная полугруппа Γ_0 с единицей называется квазимаксимальной, если любая полугруппа в Γ, содержащая Γ_0, либо совпадает с Γ, либо содержится в одной и только одной максимальной полугруппе группы Γ.

Класс квазимаксимальных полугрупп содержит максимальные полугруппы. Легко видеть, что в группе Γ имеется ровно одна максимальная полугруппа, содержащая Γ_0. В частности, все собственные полугруппы группы Γ, содержащие Γ_0, лежат в одной и той же максимальной полугруппе группы Γ, которую будем обозначать через Γ_+.

Следующий пример показывает, что, вообще говоря, полугруппа Γ_0, содержащаяся только в одной максимальной полугруппе группы Γ, порожденной Γ_0, не обязана быть квазимаксимальной.

Пример 1. Пусть $\mathbb{Z}^\infty$ — счетная прямая сумма групп $\mathbb{Z}$ целых чисел и G_0 — множество тех финитных $(n_1, n_2, \dots) \in \mathbb{Z}^\infty$, для которых последняя ненулевая компонента положительна или все компоненты равны нулю. Пусть $G = G_0 \cup (-G_0)$ и $\Gamma = \mathbb{Z} \times G$. Полугруппа $\Gamma_0 = \mathbb{Z}_+ \times G_0$ содержится только в максимальной полугруппе $\Gamma_+ = \mathbb{Z}_+ \times G$, но не квазимаксимальна в группе $\Gamma = \mathbb{Z} \times G$.

Пояснение: полугруппа $\Gamma_1 = \mathbb{Z} \times G_0$, содержащая Γ_0, не содержится в максимальной полугруппе Γ_+ группы Γ, и поэтому не квазимаксимальна. Полугруппа Γ_0 не содержится ни в одной максимальной полугруппе за исключением Γ_+: это следует из того, что Γ_1 не содержится ни в одной максимальной полугруппе группы Γ (так как $\mathbb{Z}^\infty$ не имеет максимальных полугрупп).

Теорема 1. *Полугруппа Γ_0 квазимаксимальна тогда и только тогда, когда существует такой характер $q \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0$, что для каждого $p \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0, p \not\equiv 1$ либо $pq = p$, либо $p = q^t$ при некотором $t > 0$.*

Доказательство основывается на следующей лемме, которая представляет и независимый интерес (показывающий, в частности, существование неидемпотентных положительных характеров произвольной полугруппы Γ_0).

Лемма. *Пусть Γ_0 — собственная полугруппа Γ с единицей, порождающая Γ. Для любого необратимого элемента $a \in \Gamma_0$ существует характер $p \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0$ такой, что $0 < p(a) < 1$.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть $a \in \Gamma_0$ такой, что $-a \notin \Gamma_0$ и $|\zeta(a)| = 0$ или 1 для всех $\zeta \in \mathrm{Hom}\ \Gamma_0$. Так как $\mathrm{Hom}\ \Gamma_0$ совпадает с пространством максимальных идеалов алгебры $A(\Gamma_0)$, сделанное предположение означает, что спектр $\sigma(\chi_a) = \{\zeta(a) : \zeta \in \mathrm{Hom}\ \Gamma_0\}$ элемента $\chi_a \in A(\Gamma_0)$ состоит из 0 и подмножества единичной окружности. ($0 \in \sigma(\chi_a)$, так как a не обратим в Γ_0 и поэтому $\rho_0(a) = 0$, где $\rho_0 \in \mathrm{Hom}\ \Gamma_0$ — тривиальный идемпотент, который равен 1 только на обратимых элементах полугруппы Γ_0.) Применяя функциональное исчисление к банаховой алгебре $A(\Gamma_0)$, можно указать такую функцию $f \in A(\Gamma_0)$, что $\hat{f}(\rho_0) = 1$ и $|\hat{f}| < 1$ на $\hat{\Gamma}$, где $\hat{f}$ есть преобразование Гельфанда функции f, чего не может быть, поскольку $|\hat{f}|$ принимает максимальное значение модуля на $\hat{\Gamma}$. Лемма доказана.

Замечание. Для любого $a \in \Gamma_0$ существует характер $p \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0$ такой, что $p(a) > 0$.

В силу Леммы достаточно рассмотреть случай когда a обратим в Γ_0. Так как Γ_0 — собственная полугруппа группы Γ, то существует $a_0 \in \Gamma_0$. По Лемме ему соответствует характер $p \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0$, соответствующий a_0 такой, что $0 < p(a_0) < 1$, т.е. $p \notin \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0$. Тогда $p(a)p(-a) = p(0) = 1$ и следовательно $p(a) = 1 > 0$.

3. Доказательство Теоремы 1. Пусть Γ_0 — квазимаксимальная полугруппа в порожденной ею группе Γ и $p \notin \mathrm{Phom}\ \Gamma_0$, $p \not\equiv 1$.

Предположим сначала, что p — строго положительный. Тогда можно продолжить гомоморфизм p на всю группу Γ, полагая $p(a) = p(-a)^{-1}$ для $a \in (-\Gamma_0)$.

Положим $\Gamma_+^p = \{a \in \Gamma : \quad p(a) \leq 1\}$. Покажем, что $\Gamma_+^p = \Gamma_+$, где Γ_+ — максимальная полугруппа в Γ, содержащая Γ_0.

Пусть $a, b \in \Gamma \setminus \Gamma_+^p$. Тогда $p(a) > 1$, $p(b) > 1$, поэтому $p(b)p(a)^{-n} \to 0$ при $n \to \infty$. Откуда следует, что, начиная с некоторого номера n

$$p(b - na) = p(b)p(a)^{-n} < 1,$$

т.е. $b - na \in \Gamma_+^p$. Это означает, что полугруппа $[a; \Gamma_+^p]$, порожденная произвольным элементом $a \notin \Gamma_+^p$ и полугруппой Γ_+^p, совпадает с Γ, что равносильно максимальности Γ_+^p. Так как Γ_+ — единственная максимальная полугруппа в Γ, содержащая Γ_0, мы заключаем, что $\Gamma_+^p = \Gamma_+$.

Таким образом, строго положительный характер p полугруппы Γ_0 продолжается до положительного характера максимальной полугруппы Γ_+.

Поскольку $\mathrm{Phom}\,\Gamma_+ \setminus \mathrm{Ihom}\,\Gamma_+ = \{q^t : \quad t > 0\}$ мы получаем, что $p = q^t$ для некоторого $t > 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда p может принимать и нулевые значения. Пусть $J = \{a \in \Gamma_0 : \quad p(a) > 0\}$. По предположению J является собственной подполугруппой Γ_0. Пусть Γ_0' — полугруппа, порожденная множеством $\Gamma_0 \cup (-J)$. Покажем, что $\Gamma_0' \neq \Gamma$ (более того, $(-(\Gamma_0 \setminus J)) \cap \Gamma_0' = \emptyset$).

Пусть $-a = a_1 + a_2 \in -(\Gamma_0 \setminus J)$, где $a_1, a_2 \in \Gamma_0 \cup (-J)$ (т.е. $-a \in \Gamma_0'$). Тогда $a_1 \in \Gamma_0, a_2 \in (-J)$. Заметим, что если $a_1, a_2 \in \Gamma_0$ или $a_1, a_2 \in (-J)$, то $-a = a_1 + a_2 \in \Gamma_0 \cup (-J)$ (Γ_0 и J полугруппы). А это означает, что либо a обратим в Γ_0 (т.е. $p(a) = 1$), либо $a \in J$ (т.е. $p(a) > 0$).

Таким образом, имеется разложение $-a_2 = a_1 + a, -a_2 \in J, a_1 \in \Gamma_0, a \in \Gamma_0 \setminus J$. Откуда $0 < p(-a_2) = p(a_1)p(a) = 0$. Полученное противоречие показывает, что $\Gamma_0' \neq \Gamma$.

Так как Γ_0 квазимаксимальна, то $\Gamma_0' \subset \Gamma_+$. Следовательно, Γ_+ содержит группу, порожденную полугруппой J и поэтому $q(a) = 1$ для всех $a \in J$. Тогда $(pq)(a) = p(a)$ для $a \in J$ и $(pq)(a) = 0 = p(a)$ для $a \in \Gamma_0 \setminus J$, т.е. $pq = p$.

Доказательство обратного утверждения. Покажем, во-первых, что $q(a) > 0$ для всех $a \in \Gamma_0$. По Лемме, для любого $a \in \Gamma_0$ существует характер $p \in \mathrm{Phom}\,\Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$ такой, что $p(a) > 0$. По условию $pq = p^t$ при некотором $t > 0$, откуда $q(a) > 0$.

Продолжим гомоморфизм q на всю группу Γ, полагая $q(a) = q(-a)^{-1}$ для $a \in (-\Gamma_0)$ и определим $\Gamma_+ = \{a \in \Gamma : q(a) \leq 1\}$. Полугруппа Γ_+ максимальна и $\Gamma_+ \supset \Gamma_0$. Покажем, что любая собственная полугруппа Γ_1 группы Γ, содержащая Γ_0, содержится в Γ_+.

Пусть $a = a' - a'' \in \Gamma_+, a', a'' \in \Gamma_0$. По Лемме найдется характер $p \in \mathrm{Phom}\,\Gamma_1 \setminus \mathrm{Ihom}\,\Gamma_1$ такой, что $p(a') > 0$. По условию, для любого $\tau > 0$ найдется такое $t > 0$, что $p^\tau q = p^t$ на Γ_0 (ясно, что $p \not\equiv 1$ на Γ_0). Тогда $p^\tau(a')q(a') = p^\tau(a)p^\tau(a'')q(a)q(a'') = p^t(a') = p^t(a'')p^t(a)$. Так как $p(a)p(a'') = p(a') > 0$ и $p^\tau(a'')q(a'') = p^t(a'')$, получаем $p^\tau(a)q(a) = p^t(a)$.

Теперь, так как τ произвольно и $p(a) \leq 1$, мы заключаем, что $q(a) \leq 1$, т.е.

$a \in \Gamma_+$.

Теорема 1 доказана.

Следующее следствие дает удобное геометрическое условие квазимаксимальности.

Следствие 1. Пусть Phom $\Gamma_0 \setminus$ Ihom $\Gamma_0 = \{p^t: \quad t > 0\}$. Тогда Γ_0 квазимаксимальна (и Ihom $\Gamma_0 = \{1, \rho_0\}$).

Доказательство. В силу Теоремы 1 достаточно показать, что $\rho p = \rho$ для всех $\rho \in$ Ihom Γ_0, $\rho \not\equiv 1$.

На обратимых элементах $a \in \Gamma_0 \cap (-\Gamma_0)$ все положительные характеры равны 1, поэтому для идемпотентного характера ρ_0, равного 1 только на обратимых элементах Γ_0, мы имеем $(\rho_0 p)a = \rho_0(a)p(a) = \rho_0(a) = 1$. В случае же, когда a не обратим, $\rho_0(a) = 0$ и тогда $(\rho_0 p)a = \rho_0(a)p(a) = 0 = \rho_0(a)$.

Следовательно, осталось показать, что Ihom $\Gamma_0 = \{1, \rho_0\}$.

По Лемме, для любого необратимого элемента $a \in \Gamma_0$ мы имеем $0 < p(a) < 1$.

Тогда для любого идемпотента $\rho, \rho \not\equiv 1$ произведение ρp также есть идемпотент (в противном случае $p\rho = p^t$ при некотором $t > 0$ и так как характер p всюду положителен, то $\rho \equiv 1$). Если теперь $\rho(a) = 1$ при некотором необратимом a, то $0 < (\rho_0 p)(a) = p(a) < 1$, что противоречит идемпотентности $p\rho$.

Таким образом, $\rho = \rho_0$, что и требовалось доказать.

Следующий пример показывает необратимость последнего утверждения.

Пример 2. Пусть $\Gamma_0 = [\{0\} \times \mathbb{Z}_+] \cup [(\mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z}], (m, n) \in \Gamma_0$. Квазимаксимальность Γ_0 (в $\Gamma = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) очевидна (в данном случае собственной полугруппой группы Γ, содержащей Γ_0, является максимальная полугруппа $\Gamma_+ = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}$). Легко убедиться, что Phom $\Gamma_+ \setminus$ Ihom $\Gamma_+ = \{q^t: \quad t > 0\}$, где $q(m, n) = e^{-m}$ есть положительный характер группы Γ_0.

Пусть $p \in$ Phom Γ_0, $p \neq 1, \rho_0$ и $p \neq q^t$ для всех $t > 0$. Из Теоремы 1, $pq = p$. Поэтому из равенства $p(m, n)e^{-m} = p(m, n)$ следует, что $p(m, n) = 0$ для $m > 0$. Для $m = 0$ мы имеем $p(0, n) = [p(0, 1)]^n$, тогда если $p(0, 1) = 1$, то p идемпотент; в случае $p(0, 1) < 1$ получаем $p(0, n) = e^{-n}$.

Однако, для полугруппы на полуоси Следствие 1 обратимо.

Следствие 2. Пусть Γ_0 — квазимаксимальная полугруппа неотрицательных целых чисел. Тогда

а) $\mathrm{Ihom}\ \Gamma_0 = \{1, \rho_0\}$,

б) $\mathrm{Phom}\ \Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0 = \{p^t : \quad t > 0\}$.

Доказательство. Пусть $\Gamma_+ = \mathbb{R}_+ \cap \Gamma$, где Γ — группа, порожденная Γ_0, и пусть $q \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0$. По Теореме 1 мы имеем $\rho q = \rho$ для всех $\rho \in \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0$. Так как $0 < q(a) < 1$ для всех $a \in \Gamma_+$ (полугруппа Γ_+ не содержит нетривиальных подгрупп), то либо $\rho \equiv 1$, либо $\rho = \rho_0$.
Для доказательства б) достаточно показать, что каждый неидемпотентный положительный характер группы Γ_0 можно продолжить до положительного характера максимальной полугруппы Γ_+. Для этого достаточно показать, что гомеоморфизм p строго положительный.
Пусть $p \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0$ и $J = \{a \in \Gamma_0 : p(a) = 0\}$. Определим характер ρ, полагая $\rho \equiv 0$ на J и $\rho \equiv 1$ на $\Gamma_0 \setminus J$ (ρ — характер, так как J идеал в Γ_0 и $\Gamma_0 \setminus J$ полугруппа). Тогда, в силу утверждения а), $\rho \equiv 1$, т.е. J пусто. Следствие доказано.
Отметим, что в [2] дается геометрическое доказательство этого результата. Приведем пример квазимаксимальной полугруппы Γ_0, для которой пространство $M_{A(\Gamma_0)}$ одномерно, однако Γ_0 не принадлежит $\mathbb{R}_+$.

Пример 3. Пусть $\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y \geq \ln(|x| + 1)\}$. Полугруппа Γ_0 порождает $\Gamma = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Единственной максимальной полугруппой, которая содержит все собственные полугруппы группы Γ, содержащие Γ_0, есть $\Gamma_+ = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Следовательно, Γ_0 квазимаксимальна. Покажем, что $M_{A(\Gamma_0)}$ одномерна. Заметим, что одним из положительных (неидемпотентных) характеров группы Γ_0 является $q(x, y) = e^{-y}$, который является положительным характером Γ_+. Любой другой характер $p \in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0$ удовлетворяет условию $p(0, y) = e^{-ty}, y \geq 0 (t > 0)$. Сужение p на $\{0\} \times \mathbb{R}_+$ либо имеет указанный вид, либо всюду, кроме точки $(0,0)$, равен нулю. В последнем случае, очевидно, $p(z) = 0$ для всех $z \in \Gamma_0, z \neq 0$, т.е. $p = \rho_0$. Следовательно, $p > 0$ всюду на Γ_0, и поэтому продолжается на максимальную полугруппу Γ_+ с сохранением положительности. Следовательно, получаем $p = q^t$.

4. Объединяя Теорему 1 с Предложением 1.3 [2] и Теорему 2 [3], мы можем сформулировать результат, характеризующий квазимаксимальные полугруппы на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Теорема 2. *Пусть $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}_+$ — полугруппа. Следующие условия эквивалентны:*

а) Γ_0 квазимаксимальна;

б) для каждого $a \in \Gamma$ существует целое число $n \neq 0$, такое, что $na \in \Gamma_0$;

в) $\mathrm{Phom}\ \Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\ \Gamma_0 = \{p^t : t > 0\}$;

г) равномерная алгебра $A(\Gamma_0)$ — проникающая, т.е. для любого собственного замкнутого подмножества $F \subset \widehat{\Gamma}$ все непрерывные функции на F равномерно аппроксимируются функциями из $A(\Gamma_0)$.

ABSTRACT. The present paper continues investigation of the quasimaximal semigroups started in [2] (special cases of such semigroups were considered in [3 - 5]). We obtain a criterion of quasimaximality in terms of characters of a semigroup Γ_0 that characterizes the geometrical structure of space $M_{A(\Gamma_0)}$ of maximal ideals of the algebra $A(\Gamma_0)$ of generalised analytic functions, generated by a quasimaximal semigroup. We state a result which characterizes the quasimaximal semigroups on semiaxis from the points of view of group theory [2], geometry (the structure of space $M_{A(\Gamma_0)}$) and in terms of the approximation properties of uniform algebra $A(\Gamma_0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Arens, I. Singer, "Generalized analytic functions," Trans. Amer. Math. Soc., vol. 81, pp. 379 - 393, 1956.
2. Л. М. Акопян, "Некоторые свойства точечных дифференцирований и автоморфизмов на алгебрах обобщенных аналитических функций," Изв. АН Армении, Математика [английский перевод: Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)], том 22, стр. 152 – 165, 1987.
3. Л. М. Акопян, "Представление квазимаксимальных полугрупп в равномерную алгебру," Докл. АН Армении, , том 89, стр. 203 – 206, 1989.

4. С. А. Григорян, "Об алгебрах конечного типа на компактной группе G," Изв. АН Армении, Математика [английский перевод: Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)], том 14, стр. 168 – 183, 1979.
5. Л. М. Акопян, С. А. Григорян, "Об одном представлении подполугруппы группы рациональных чисел в равномерную алгебру," Докл. Болг. АН, том 38, стр. 829 – 830, 1985.
6. Т. Гамелин, Равномерные Алгебры, Мир, Москва, 1973.

3 Июня 1991

Ереванский Государственный университет