РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГИББСА В МОДЕЛИ ИЗИНГА ВБЛИЗИ ТОЧЕК ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ПЕРВОГО РОДА

Д. Г. Мартиросян

Известия Академии Наук Армении. Математика,
том 27, № 3, 1992

В этой статье мы изучаем состояния Гиббса в классической модел изинговского ферромагнетика на целочисленной решетке Z^ν ($\nu \geq 2$ при низких температурах $\beta\,(\beta \geq \beta_o)$ и внешних полях h. Доказано, чт существуют c_1 и c_2, $0 < c_1 < c_2 < \infty$, зависящие только от β и ν такие, чт распределения Гиббса на W_n (где W_n — куб на Z^ν, с центром в начал координат и с длиной стороны $2n+1$) с (-1) граничными условиями вн W_n и внешними полями $h = c'/n$ и $h = c''/n$, соответственно, $0 \leq c' \leq c_1$, $c_2 \leq c''$, слабо сходятся к чистым фазам P_β^- и P_β^+, соответственно, пр $n \to \infty$.

Настоящая работа посвящена асимптотическому исследованию предельны распределений Гиббса в модели классического изинговского ферромагне тика для объемов, стремящихся к бесконечности, при низких температу рах и внешних полях, стремящихся к нулю с ростом объема. При нулево внешнем поле в рассматриваемой модели имеем по крайней мере два ра зличных состояния Гиббса (так называемых чистых фаз). В этом случа чистые фазы зависят в основном от граничных условий. А именно, распре деления Гиббса в конечном объеме с разными граничными условиями пр стремлении объема к бесконечности сходятся, вообще говоря, к различны гиббсовским состояниям. Напротив, при наличии ненулевого постоянног внешнего поля имеет место единственность гиббсовского поля, т.е. пре дельное распределение Гиббса не зависит от последовательности гранич ных условий. В настоящей работе мы получаем оценки для переменны внешних полей, при которых роль граничных условий несущественна. Эт оценки являются в некотором смысле неулучшаемыми.

Перейдём к определениям. Пусть Z^ν — ν-мерная целочисленная решетка. Расстояние между точками $x, y \in Z^\nu$, $x = (x_1, \dots, x_\nu)$, $y = (y_1, \dots, y_\nu)$ положим равным

$$d(x, y) = \max_{1 \le i \le \nu} |x_i - y_i|.$$

Иногда мы также будем пользоваться метрикой

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{\nu} |x_i - y_i|.$$

Для множества A через $|A|$ будет обозначаться число элементов в A, а через A^c дополнение к A.

Для $A \subset Z^\nu$, $|A| < \infty$ обозначим через ∂A множество всех тех $x \in A$, для которых существует $y \in Z^\nu$, такое что $d_1(x, y) = 1$ и $y \notin A$.

Для целого $i > 0$ обозначим через W_i множество

$$W_i = \{x \in Z^\nu : d(0, x) \le i\}.$$

Мы будем использовать следующее определение распределения Гиббса (см. [2], [3]). Пусть $S = \{+1, -1\}$. Отображение $\varphi : Z^\nu \mapsto S$ будем называть *конфигурацией*. Ограничение конфигурации φ на множество $V \subset Z^\nu$ обозначается через $\varphi(V)$ и называется конфигурацией на V. На $\mathcal{M}(V)$, $V \subset Z^\nu$ рассмотрим обычную σ-алгебру, порождённую цилиндрическими множествами вида

$$\{\varphi(V) \in \mathcal{M}(V) : \varphi(t_1) = s_1, \dots, \varphi(t_k) = s_k, \quad t_1, \dots, t_k \in V, \quad s_1, \dots, s_k \in S\}.$$

Для конфигураций $\varphi_1(V_1)$ и $\varphi_2(V_2)$ с $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ обозначим через $(\varphi_1(V_1), \varphi_2(V_2))$ конфигурацию $\varphi(V_1 \cup V_2)$ такую, что её ограничения на множества V_1 и V_2 совпадают с $\varphi(V_1)$ и $\varphi(V_2)$, соответственно.

Приводимое ниже определение гамильтониана несколько отличается от обычного. Пусть $V \subset Z^\nu$, $|V| < \infty$ — конечное множество, и пусть $\varphi(V)$ и $\varphi(V^c)$ — конфигурации на V и $V^c \subset Z^\nu$, соответственно, и пусть $\mu_V(x)$ — действительная функция, зависящая от V и $x \in V$. Определим гамильтониан $H_V(\varphi(V)|\varphi(V^c))$ следующим образом:

$$H_V(\varphi(V)|\varphi(V^c)) = -\sum_{x \in V} \mu_V(x)\varphi(x) - \frac{1}{2}\sum_{x,y \in V} \varphi(x)\varphi(y) - \frac{1}{2}\sum_{x \in V, y \in V^c} \varphi(x)\varphi(y). \quad (1)$$

где суммирование проводится по всем парам x, y, являющимся ближайшими соседями на решётке. $\mu_V(x)$ будем называть *химическим потенциалом*. Пусть $V \subset Z^\nu$, $|V| < \infty$ и пусть $\varphi(V^c) \in \mathcal{M}(V^c)$ — конфигурация на V^c. Вероятностное распределение на $\mathcal{M}(V)$, заданное по формуле

$$q_{V,\beta,h_V}(\varphi(V)|\varphi(V^c)) = \frac{\exp[-\beta H_V(\varphi(V)|\varphi(V^c))]}{\Xi(V,\beta,\mu,\varphi(V^c))}, \tag{2}$$

называется *распределением Гиббса* на V, соответствующим гамильтониану (1) с граничными условиями $\varphi(V^c)$, параметру $\beta > 0$, обратной температуре, и химическому потенциалу $\mu_V(x)$. Здесь Ξ — нормирующий множитель. $h_V(x) = \beta\mu_V(x)$ мы будем называть *внешним полем*.

В дальнейшем мы будем использовать следующие специальные обозначения для распределений Гиббса на V, отвечающих гамильтониану (1):

$q^+_{V,\beta,h_V(x)}(\cdot)$ (соответственно, $q^-_{V,\beta,h_V(x)}(\cdot)$), если граничные условия — $\varphi(V^c) \equiv +1$ (соответственно, $\varphi(V^c) \equiv -1$).

$q^+_{V,\beta,c}(\cdot)$ (соответственно, $q^-_{V,\beta,c}(\cdot)$), если внешнее поле постоянно, т.е. $h_V(x) \equiv c$ для всех $x \in V$, и с граничными условиями $\varphi(V^c) \equiv +1$ (соответственно, $\varphi(V^c) \equiv -1$).

Мы будем также писать $q^+_{n,\beta,c}(\cdot) \equiv q^+_{W_n,\beta,c}(\cdot)$.

При условии $h_V(x) \equiv 0$ распределение вероятностей (2) является распределением Гиббса для модели классического изинговского ферромагнетика в конечном объёме V, отвечающим нулевому внешнему полю, обратной температуре $\beta > 0$ и граничным условиям $\varphi(V^c)$. Известно (см. [4]), что существует $\beta_0 > 0$, такое что при всех $\beta > \beta_0$ для любой последовательности убывающих объёмов V_n, таких что $\cup V_n = Z^\nu$, гиббсовские распределения $q^-_{V_n,\beta,0}(\cdot)$ и $q^+_{V_n,\beta,0}(\cdot)$, при $n \to \infty$ слабо сходятся к взаимно сингулярным распределениям вероятностей на $\mathcal{M}(Z^\nu)$. Эти два распределения вероятностей всюду в дальнейшем будут обозначаться P^-_β и P^+_β, соответственно.

Пусть $\beta_o > 0$ и пусть $c_1(\beta,\nu)$ и $c_2(\beta,\nu)$ — функции, определённые для всех $\beta > 0$, такие что $0 < c_1(\beta,\nu) < c_2(\beta,\nu)$. Рассмотрим плоские области

$$D_1(\beta_o, c_1(\beta,\nu)) = \{(\beta,c') \in \mathbb{R}^2 : \quad \beta > \beta_o, \quad 0 < c' \le c_1(\beta,\nu)\}, \tag{3}$$

$$D_2(\beta_o, c_2(\beta,\nu)) = \{(\beta, c'') \in \mathbb{R}^2 : \quad \beta > \beta_o, \quad c'' \geq c_2(\beta,\nu)\}.$$

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. *Существуют $\beta_o > 0$ и $c_1(\beta,\nu)$, $c_2(\beta,\nu)$ $(0 < c_1(\beta,\nu) < c_2(\beta,\nu)$ для всех $\beta > \beta_o)$ таких, что*

а) *если $(\beta, c') \in D_1(\beta_o, c_1(\beta,\nu))$, то $q^-_{n,\beta,c'/n}(\cdot)$ слабо сходится к P^-_β, при $n \to \infty$;*

б) *если $(\beta, c'') \in D_2(\beta_o, c_2(\beta,\nu))$, то $q^-_{n,\beta,c''/n}(\cdot)$ слабо сходится к P^+_β, при $n \to \infty$.*

Определение 1. Пусть $V_1 \subset V_2 \subset \ldots, \cup V_i = Z^\nu$ — последовательность возрастающих объёмов, и $h_{V_i}(x)$, $i = 1, 2, \ldots$ — последовательность внешних полей. Мы скажем, что $\{h_{V_i}(x)\}_{i=1,2,\ldots}$ удовлетворяет:

условию а), если $|h_{V_i}(x)| \leq c' h_o(x)$ для всех V_i, $x \in V_i$, где c' — постоянная и

$$h_o(x) = \begin{cases} [d(0,x)]^{-1}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 1, & \text{если} \quad x = 0; \end{cases}$$

условию б), если $h_{V_i}(x) \to 0$ для любого $x \in Z^\nu$, при $i \to \infty$;

условию в), если $|h_{V_i}(x)| \leq c''$ для всех V_i, $x \in V_i$, где c'' — постоянная.

Первая часть теоремы может быть усилена.

Теорема 2. *Существует $\beta_o > 0$ такое, что для всех $\beta > \beta_o$ найдётся $c(\beta,\nu) > 0$ такое, что для любой возрастающей последовательности объёмов $V_1 \subset V_2 \subset \ldots, \cup V_i = Z^\nu$ и любой последовательности внешних полей $h_{V_i}(x)$, удовлетворяющих условиям а) и б) с постоянной $c(\beta,\nu)$, распределения Гиббса $q^-_{V_i,\beta,h_V(x)}$ слабо сходятся к P_- при $i \to \infty$.*

Замечание. Нетрудно видеть, что условия Теоремы 2 выполнены для $V_n = W_n$ и $h_{W_n}(x) = c'/n$, $x \in W_n$, где $0 < c' \leq c(\beta,\nu)$ с $c(\beta,\nu)$ как в Теореме 2. Следовательно, из Теоремы 2 следует справедливость соответствующего утверждения Теоремы 1.

В дальнейшем нам потребуется ряд дополнительных определений. Через $A(x)$, $x \in Z^\nu$ будем обозначать единичный замкнутый куб с центром в точке $x \in Z^\nu$, и рёбрами, параллельными координатным осям. Для точек

$x, y \in Z^\nu$ таких, что $d(x, y) = 1$, пересечение $A(x) \cap A(y)$ будем называть *гранью* (в $\mathbb{R}^\nu$), разделяющей точки x и y.

Пусть φ — такая конфигурация, что $\{x \in Z^\nu : \varphi(x) = +1\}$ — конечное множество. Объединение граней, разделяющих точки x и y такие, что $d(x, y) = 1$ и $\varphi(x)\varphi(y) = -1$, называется *границей* конфигурации φ. Пусть $G = \{g_1, ..., g_m\}$ — множество всех граней, содержащихся в границе конфигурации φ. Множество $\mathbb{R}^\nu \setminus \{g_1 \cup ... \cup g_m\}$ разбивается на связные (в $\mathbb{R}^\nu$) компоненты, которые обозначим через $O_1, ..., O_s$. В точности одна из этих компонент неограничена. Для простоты предположим, что через O_1 обозначена неограниченная компонента. Граница (в $\mathbb{R}^\nu$) множества O_1 называется *внешней границей* конфигурации φ. (Внешняя граница φ содержится в границе φ).

Мы нумеруем грани в G, так что $G^{(ext)} = \{g_1, ..., g_{m'}\}$, $m' < m$ является множеством всех граней, содержащихся во внешней границе конфигурации φ. Далее, пусть $O'_1, O'_2, ..., O'_s$ — связные (в $\mathbb{R}^\nu$) компоненты множества $\mathbb{R}^\nu \setminus \{g_1 \cup ... \cup g_m\}$. Граница (в $\mathbb{R}^\nu$) множества O'_i, $i \geq 2$ называется *внешним контуром* конфигурации φ (ср. с определением, данным в [5]). Аналогичным образом выделяются контуры из множества оставшихся граней. Продолжая этот процесс до исчерпания, мы получим разбиение границы конфигурации φ на контуры. Контуры будут обозначаться в дальнейшем через Γ, а через $|\Gamma|$ мы будем обозначать число граней, входящих в контур Γ.

Пусть Γ — контур конфигурации φ. Дополнение к этому контуру в $\mathbb{R}^\nu$ разбивается на две связные компоненты O' и O'', где O' — ограниченная, а O'' — неограниченная компонента. Множество $\text{int}(\Gamma) = O' \cap Z^\nu$ называется *внутренностью* контура Γ.

Пусть теперь $V \subset Z^\nu$, $|V| < \infty$. Рассмотрим гамильтониан

$$H(\varphi(V)|\varphi(V^c) \equiv -1) = \sum_{x \in V} \mu_V(x)(1 + \varphi(x)) + \sum{}' |\Gamma_j|. \qquad (4)$$

где последняя сумма в (4) берётся по всем контурам конфигурации φ, такой что её ограничения на множества V и V^c совпадают с $\varphi(V)$ и $\varphi(V^c) \equiv -1$

соответственно. Используя определение контура, нетрудно видеть, что распределения Гиббса (2) на V, отвечающие гамильтонианам (1) и (4), соответственно, и обшим граничным условиям $\varphi(V^c) \equiv -1$ при совпадении параметров β и внешних полей $h_V(x) = \beta\mu_V(x)$, также совпадают. Пусть $V \subset Z^\nu$, $|V| < \infty$, и пусть H_V — гамильтониан, заданный посредством (4), и пусть граничные условия $\varphi(V^c) \equiv -1$. Для контура Γ такого, что $\mathrm{int}(\Gamma) \subset V$, обозначим через

$$\mathcal{M}(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \text{ является единственным контуром для } \varphi\}$$

(в частности, из условия $\varphi \in \mathcal{M}(\Gamma)$ вытекает, что $\varphi(x) = -1$ для всех $x \in V \setminus \mathrm{int}(\Gamma)$).

Выражение

$$\Xi(\Gamma | H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1) = \sum_{\varphi \in \mathcal{M}(\Gamma)} \exp\{-\beta H_V(\varphi(V)|\varphi(V^c) \equiv -1)\} \tag{5}$$

назовем *кристаллической статистической суммой*.

Далее, пусть $V' \subset V$. Разреженной статистической суммой назовем

$$\Xi(V' | H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1) = \sum_{\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s\}} \prod_{i=1}^{s} \Xi(\Gamma_i | H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1), \tag{6}$$

где суммирование проводится по всем наборам внешних контуров таких, что $\mathrm{int}(\Gamma_j)$, $j = 1, \ldots, s$ целиком содержится в $V' \setminus \partial V'$.

Через $\rho_s(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s | H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1)$ обозначим корреляционную функцию, равную вероятности того, что $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ являются внешними контурами конфигурации φ. Пусть $(Z^\nu)^*$ — решётка, получаемая из решётки $Z^\nu \subset \mathbb{R}^\nu$ сдвигом на вектор $(1/2, \ldots, 1/2)$. Для произвольного $x^* \in (Z^\nu)^*$ и для $\beta > 0$ рассмотрим ряд

$$\sigma(\beta, \nu) = \sum_{x^* \in \Gamma} \exp\{-\beta|\Gamma|\}. \tag{7}$$

Заметим, что $\sigma(\beta, \nu)$ не зависит от x^* и существует $\beta_0 > 0$ такое, что $\sigma(\beta, \nu) < \infty$ для всех $\beta > \beta_0$.

Лемма 1. *Существует $\beta_o > 0$ такое, что для всех $\beta > \beta_o$ найдётся $c_1(\beta,\nu) > 0$, такое что если $h_V(x)$ удовлетворяет условию a) с одной и той же постоянной $c_1(\beta,\nu)$ для всех V, т.е.*

$$|h_V(x)| \le c_1(\beta,\nu) h^{(o)}(x), \quad x \in V, \tag{8}$$

то корреляционные функции удовлетворяют неравенству

$$\rho_s(\Gamma_1, ..., \Gamma_s | H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1) \le \exp\{-\frac{(\beta+\beta_o)}{2}\sum_{j=1}^{s}|\Gamma_j|\}. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть Γ — контур конфигурации φ. Учитывая, что $\varphi(x) = \pm 1$, из условия (8) получаем

$$\left|\sum_{x\in \mathrm{int}(\Gamma)} h_V(x)[1+\varphi(x)]\right| \le 2\sum_{x\in \mathrm{int}(\Gamma)} |h_V(x)| \le 2c_1(\beta,\nu)\sum_{x\in \mathrm{int}(\Gamma)} h^{(o)}(x). \tag{10}$$

Перейдём к оценке правой части неравенства (10). Зафиксируем целое положительное число u и выберем k так, чтобы $|W_k| \le u < |W_{k+1}|$. Для заданного $U \subset Z^\nu$, $|U| < \infty$, положим

$$f(U) = \sum_{x\in U} h^{(o)}(x).$$

Мы докажем, что при фиксированном значении $|U| = u$ функция $f(U)$ принимает наибольшее значение на тех подмножествах U решётки Z^ν, для которых $W_k \subseteq U \subset W_{k+1}$. Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что если $|U| = u$ и условие $W_k \subseteq U \subset W_{k+1}$ нарушено, то существует U' такое, что $|U'| = |U| = u$ и $f(U') > f(U)$.

Предположим сначала, что $W_k \not\subseteq U$. Тогда найдётся $y \in W_k$ такое, что $y \notin U$. Отсюда и из того, что $|W_k| \le u = |U|$, следует, что существует $z \in U$ такое, что $z \notin W_k$. Рассмотрим множество $U' = \{U \setminus \{z\}\} \cup \{y\}$. Очевидно

$$f(U') = \sum_{x\in U'} h^{(o)}(x) = \sum_{x\in U} h^{(o)}(x) - h^{(o)}(z) + h^{(o)}(y) = f(U) - h^{(o)}(z) + h^{(o)}(y).$$

Используя условие $y \in W_k$ заключаем, что $h^{(o)}(y) \ge 1/k$, а из условия $z \notin W_k$ следует, что $h^{(o)}(z) < 1/k$. Следовательно, $f(U') > f(U)$. В случае $U \not\subset W_{k+1}$ доказатеьство проводится аналогичным способом.

Пусть $W_k \subseteq U \subset W_{k+1}$. Замечая, что $|W_k| = (2k+1)^\nu$, получаем

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x\in U} h^{(o)}(x) = |W_o| + |W_1 \setminus W_o| + \frac{1}{2}|W_2 \setminus W_1| + \dots + \frac{1}{k+1}|U \setminus W_k| = \\
&= \frac{1}{1\cdot 2}|W_1| + \frac{1}{2\cdot 3}|W_2| + \dots + \frac{1}{k(k+1)}|W_k| + \frac{|U|}{k+1} = \\
&= \frac{1}{1\cdot 2}3^\nu + \frac{1}{2\cdot 3}5^\nu + \dots + \frac{1}{k(k+1)}(2k+1)^\nu + \frac{|U|}{k+1} < \\
&< (2k+1)^{\nu-2}\left[\sum_{s=1}^{k}\frac{(2s+1)^2}{s(s+1)}\right] + \frac{|U|}{k+1} = \\
&= (2k+1)^{\nu-2}\left[\sum_{s=1}^{k}(4 + \frac{1}{s(s+1)}\right] + \frac{|U|}{k+1} < \\
&< (2k+1)^{\nu-2}(4k+1) + \frac{|U|}{k+1} < 2(2k+1)^{\nu-1} + \frac{|U|}{k+1},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Мы также имеем $(2k+1)^\nu = |W_k| \le |U|$ и $k+1 > \frac{1}{3}(2k+3) = \frac{1}{3}|W_{k+1}|^{1/\nu} > \frac{1}{3}|U|^{1/\nu}$. Следовательно

$$
2(2k+1)^{\nu-1} + \frac{|U|}{k+1} < 2|U|^{\frac{\nu-1}{\nu}} + 3|U|^{\frac{\nu-1}{\nu}} = 5|U|^{\frac{\nu-1}{\nu}}. \tag{12}
$$

Из (11) и (12) следует, что для любого $U \subset Z^\nu$, $|U| < \infty$

$$
\sum_{x\in U} h^{(o)}(x) < 5|U|^{\frac{\nu-1}{\nu}}. \tag{13}
$$

Полагая в (13) $U = \mathrm{int}(\Gamma)$, мы получаем из (9) и (13), что

$$
\left|\sum_{x\in \mathrm{int}(\Gamma)} h_V(x)[1+\varphi(x)]\right| \le 10c_1(\beta,\nu)|\mathrm{int}(\Gamma)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}. \tag{14}
$$

Обозначим через $H_V^{(o)}$ гамильтониан вида (4), подчинённый условию $h_V(x) = \beta\mu_V(x) \equiv 0$. Используя определения кристаллической и разрежённой статистических сумм и оценку (14), получаем

$$
\begin{aligned}
&\Xi(\Gamma|\, H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1) \le \\
&\le \exp[10c_1(\beta,\nu)|\mathrm{int}(\Gamma)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}]\Xi(\Gamma|\, H_V^{(o)}, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1),
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Xi(\mathrm{int}(\Gamma)|\, H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1) \ge \\
&\ge \exp[-10c_1(\beta,\nu)|\mathrm{int}(\Gamma)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}]\Xi(\mathrm{int}(\Gamma)|\, H_V^{(o)}, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Далее, в силу определения корреляционной функции имеем

$$
\begin{aligned}
&\rho_s(\Gamma_1,\dots,\Gamma_s|\, H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1) = \\
&\frac{\Xi(V \setminus \bigcup_{i=1}^{s}\mathrm{int}(\Gamma_j)|\, H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1)\prod_{i=1}^{s}\Xi(\Gamma_j|\, H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1)}{\Xi(V|\, H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1)}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

и поскольку

$$
\begin{gathered}
\Xi(V | H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1) \geq \\
\geq \Xi(V \setminus \bigcup_{j=1}^{s} \mathrm{int}(\Gamma_j) | H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1) \prod_{j=1}^{s} \Xi(\mathrm{int}(\Gamma_j) | H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1),
\end{gathered}
\tag{18}
$$

то из (14) - (17) вытекает оценка

$$
\begin{gathered}
\rho_s(\Gamma_1, ..., \Gamma_s | H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1) \leq \\
\leq \prod_{j=1}^{s} \exp[20c_1(\beta, \nu)|\mathrm{int}(\Gamma_j)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}] \frac{\Xi(\Gamma_j | H_V^{(o)}, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1)}{\Xi(\mathrm{int}(\Gamma_j) | H_V^{(o)}, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1)}.
\end{gathered}
\tag{19}
$$

Наконец, заметим, что распределение Гиббса (2) на V, отвечающее гамильтониану $H_V^{(o)}$, является распределением Гиббса на V для модели классического изинговского ферромагнетика с нулевым внешним полем. Известно (см. [4]), что для этой модели справедливо неравенство Пайерлса:

$$
\frac{\Xi(\Gamma_j | H_V^{(o)}, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1)}{\Xi(\mathrm{int}(\Gamma_j) | H_V^{(o)}, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1)} \leq \exp[-\beta|\Gamma_j|].
\tag{20}
$$

Из (19) и (20) получаем

$$
\rho_s(\Gamma_1, ..., \Gamma_s | H_V, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1) \leq \prod_{j=1}^{s} \exp[-\beta|\Gamma_j| + 20c_1(\beta, \nu)|\mathrm{int}(\Gamma_j)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}].
\tag{21}
$$

Перейдём к выбору постоянных $\beta_o(\nu)$, $c_1(\beta, \nu)$ и $c_2(\beta, \nu)$. Вначале мы выберем $\beta_o(\nu)$ таким образом, чтобы гарантировать сходимость ряда (7). Далее воспользуемся изопериметрическим неравенством

$$
c_{(is)}(\nu)|\mathrm{int}(\Gamma_j)|^{\frac{\nu-1}{\nu}} \leq |\Gamma_j|, \quad j = 1, ..., s,
\tag{22}
$$

справедливым для любого контура Γ_j. Здесь $c_{(is)}(\nu)$ — изопериметрическая постоянная, зависящая только от размерности решётки. Полагая теперь

$$
c_1(\beta, \nu) = \frac{1}{40}[\beta - \beta_o(\nu)]c_{(is)}(\nu),
$$

мы получаем из (21) и (22) оценку (9) с $c_2(\beta, \nu) > [\beta + \beta_o(\nu)]/2$. Лемма 1 доказана.

Определение 2. Пусть $V_1 \subset V_2 \subset \ldots, \cup V_i = Z^\nu$ — возрастающая последовательность объёмов и $h_{V_i}(x)$, $i = 1, 2, \ldots$ — последовательность внешних полей. Мы будем говорить, что $\{h_{V_i}(x)\}_{i=1,2,\ldots}$ удовлетворяет *условию* г), если

$$\rho_s(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s | H_{V_i}, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1) \leq \exp[-c''' \sum_{j=1}^{s} |\Gamma_j|], \tag{23}$$

где c''' — постоянная, а $H_{V_i}(x)$ являются гамильтонианами вида (4) с внешними полями $h_{V_i}(x)$.

Обозначим через $H_{V_i}^{(t)}$ гамильтониан вида (4) с $V = V_i$ и внешними полями $h_{V_i}^{(t)} = t h_{V_i}(x)$, $\quad 0 \leq t \leq 1$.

Лемма 2. *Пусть $V_1 \subset V_2 \subset \ldots, \cup V_i = Z^\nu$, пусть β_o таково, что $\sigma(\beta_o, \nu) < \infty$, и пусть $\{h_{V_i}(x)\}_{i=1,2,\ldots}$ — последовательность внешних полей, удовлетворяющих условиям б) и в) с некоторой постоянной $c_o > 0$. Тогда, если внешние поля $\{h_{V_i}^{(t)}(x), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots\}$ удовлетворяют при всех t условию г) с некоторой постоянной $c_3(\beta, \nu) > \beta_o$, то $q^-_{V_i, \beta, h_{V_i}(x)}(\cdot)$ слабо сходятся к P_- при $i \to \infty$.*

Доказательство. Мы будем опираться на некоторые результаты работы Р. А. Минлоса и Я. Г. Синая [4]. Введём обозначения

$$\Xi(\Gamma | V_i, t) = \Xi(\Gamma | H_{V_i}^{(t)}, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1),$$

$$\Xi(V_i, t) = \Xi(V_i | H_{V_i}^{(t)}, \beta, \varphi(V^c) \equiv -1).$$

Из формулы (17) вытекает, что для всех t, $\quad 0 \leq t \leq 1$

$$\ln \rho_s(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s | V_i, t) = \ln \Xi(V_i \setminus \bigcup_{j=1}^{s} \mathrm{int}(\Gamma_j) | V_i, t) - \ln \Xi(V_i, t) + \sum_{j=1}^{s} \ln \Xi(\Gamma_j | V_i, t). \tag{24}$$

Следовательно

$$\ln \rho_s(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s | V_i, 1) = \ln \rho_s(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s | V_i, 0) +$$
$$+ \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} [\ln \Xi(V_i \setminus \bigcup_{j=1}^{s} \mathrm{int}(\Gamma_j) | V_i, t) - \ln \Xi(V_i, t) + \sum_{j=1}^{s} \ln \Xi(\Gamma_j | V_i, t)] dt. \tag{25}$$

Заметим, что для любого контура Γ

$$\frac{\partial}{\partial t}\Xi(\Gamma|V_i,t)=\frac{\partial}{\partial t}\sum_{\varphi\in\mathcal{M}(\Gamma)}\exp\left[-\beta|\Gamma|-\beta\sum_{k=1}^{m}|\Gamma_k(\varphi)|+\right.$$

$$\left.+t\sum_{x\in\mathrm{int}(\Gamma)}h_V(x)(1+\varphi(x))\right]=\sum_{\varphi\in\mathcal{M}(\Gamma)}\left[\sum_{x\in\mathrm{int}(\Gamma)}h_{V_i}(x)(1+\right. \tag{26}$$

$$\left.+\varphi(x))\right]\exp\left[-\beta|\Gamma|-\beta\sum_{k=1}^{m}|\Gamma_k(\varphi)|+t\sum_{x\in\mathrm{int}(\Gamma)}h_V(x)(1+\varphi(x))\right],$$

где через $\Gamma_k(\varphi)$, $k=1,...,m$ обозначены контуры конфигурации φ, $\mathrm{int}(\Gamma_k(\varphi))\subset\mathrm{int}(\Gamma)$.

Обозначая для данного t, $0\le t\le 1$, через $E_{\Gamma,t}$ условное математическое ожидание, при условии, что Γ является контуром конфигурации φ. Из (26) мы получим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma|V_i,t)=E_{\Gamma,t}\sum_{x\in\mathrm{int}(\Gamma)}h_{V_i}(x)[1+\varphi(x)]. \tag{27}$$

Поскольку $h_V(x)$ удовлетворяет условиям б) и в), величина

$$|\sum_{x\in\mathrm{int}(\Gamma)}h_{V_i}(x)[1+\varphi(x)]|$$

не превосходит $2c_0|\mathrm{int}(\Gamma)|$ (ср. с (10)) и для фиксированного Γ стремится к нулю при $i\to\infty$. Следовательно, правая часть (27) (и $\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma|V_i,t)$, соответственно) стремится к нулю равномерно по t, $0\le t\le 1$.

Далее, в силу определения разреженной статистической суммы для любого $V'\subseteq V_i$ получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(V'|V_i,t)=[\Xi(V'|V_i,t)]^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{\{\Gamma_1,...,\Gamma_m\}}\prod_{j=1}^{m}\Xi(\Gamma_j|V_i,t), \tag{28}$$

где суммирование в правой части (28) проводится по всевозможным наборам внешних контуров

$\{\Gamma_1,...,\Gamma_m\}$, $\mathrm{int}(\Gamma_j)\subseteq V'\setminus\partial V'$, $j=1,...,m$. Из (28) следует, что ([5])

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(V'|V_i,t)=[\Xi(V'|V_i,t)]^{-1}\sum_{\{\Gamma_1,...,\Gamma_m\}}\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma_j|V_i,t)\right]\prod_{j=1}^{m}\Xi(\Gamma_j|V_i,t)=$$

$$= \sum_{\Gamma:\mathrm{int}(\Gamma)\subseteq V'\setminus\partial V'} \rho_1(\Gamma|V_i,t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma|V_i,t). \tag{29}$$

Используя формулу (29), заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(V_i\setminus\bigcup_{j=1}^{s}\mathrm{int}(\Gamma_j)|V_i,t)-\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(V_i,t)=\sum_{\Gamma}{}'\rho_1(\Gamma|V_i,t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma|V_i,t), \tag{30}$$

где суммирование в $\sum'$ проводится по $\{\Gamma:\mathrm{int}(\Gamma)\cap\bigcup_{j=1}^{s}\mathrm{int}(\Gamma_j)\neq\emptyset\}$. Из формул (25) и (30) получаем

$$\begin{aligned}\ln\rho_s(\Gamma_1,\dots,\Gamma_s|V_i,1)&=\ln\rho_s(\Gamma_1,\dots,\Gamma_s|V_i,0)+\\&+\int_0^1\left[-\sum_{\Gamma}{}'\rho_1(\Gamma|V_i,t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma|V_i,t)+\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma_j|V_i,t)\right]dt\end{aligned} \tag{31}$$

Зафиксируем в (31) набор внешних контуров $\{\Gamma_1,\dots,\Gamma_s\}$ и оценим подынтегральное выражение. В силу сделанных выше замечаний величина $\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma_j|V_i,t)$ при $i\to\infty$ равномерно по t стремится к нулю. Поскольку

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma|V_i,t)\right|\le 2|\mathrm{int}(\Gamma)|$$

и $\rho_1(\Gamma|V_i,t)$, в силу условия г), удовлетворяет неравенству

$$\rho_1(\Gamma|V_i,t)\le\exp[-c(\beta,\nu)|\Gamma|],$$

мы имеем

$$\left|\sum_{\Gamma}{}'\rho_1(\Gamma|V_i,t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma|V_i,t)\right|\le 2\sum_{\Gamma}{}'|\mathrm{int}(\Gamma)|\exp[-\beta|\Gamma|]. \tag{32}$$

Правая часть (32) сходится для любого фиксированного набора контуров (см. [4]). Следовательно, ряд

$$\sum{}'\rho_1(\Gamma|V_i,t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma|V_i,t) \tag{33}$$

сходится абсолютно и равномерно по t, $0\le t\le 1$. Поскольку для каждого фиксированного Γ, $\frac{\partial}{\partial t}\ln\Xi(\Gamma|V_i,t)$ стремится к нулю при $i\to\infty$, ряд (33) стремится к нулю равномерно по t.

Наконец, $\rho_s(\Gamma_1,...,\Gamma_s|V_i,0)$, при $i \to \infty$ сходятся к предельным корреляционным функциям (см. [4]), которые мы обозначим через $\rho_s(\Gamma_1,...,\Gamma_s)$. Отсюда и из (31) следует, что $\rho_s(\Gamma_1,...,\Gamma_s|V_i,1)$ стремится к $\rho_s(\Gamma_1,...,\Gamma_s)$, при $i \to \infty$, что и доказывает лемму.

Перейдём к доказательству Теоремы 2. Выберем, в соответствии с Леммой 1, β_o и $c_1(\beta,\nu)$ так, чтобы выполнялась оценка (8). Тогда для внешнего поля $h_V(x)$ выполнены условия б), в) и г). Применяя Лемму 2, мы получим доказательство Теоремы 2. В силу замечания к Теореме 2 мы получим отсюда в качестве следствия также доказательство соответствующего утверждения Теоремы 1.

Доказательство оставшейся части Теоремы 1 опирается на так называемую "теорему о полоске" (см. [6]). Для полноты изложения приведём формулировку этой теоремы из работы [6] в удобной для дальнейшего изложения форме.

Теорема о полоске. *Найдутся $\beta_o > 0$ и $c(\beta,\nu) > 0$, определённая для всех $\beta > \beta_o$ такие, что для любой последовательности внешних полей $h_{W_n}(x)$, $n = 1,2,...$, удовлетворяющих неравенству $h_{W_n}(x) \geq c(\beta,\nu)/n$, мы имеем*

$$\lim_{n\to\infty} q^-_{n,\beta,h_{W_n}(x)}(E_n) = 1,$$

где E_n — следующее событие:

$$E_n = \{\varphi(W_n) : \text{существует внешний контур } \Gamma \text{ конфигурации}$$
$$(\varphi(W_n),\varphi(W_n^c) \equiv -1) \text{ такой, что } \mathrm{int}(\Gamma) \supset W_{[n/6]}\}$$

Доказательство Теоремы 1. Предположим, что $c(\beta,\nu)$ как в Теореме о полоске. Обозначим через $\mathcal{A}(\Gamma)$ событие

$$\mathcal{A}(\Gamma) = \{\Gamma \text{ наибольший контур, содержащий } W_{[n/6]}\},$$

а через $\mathcal{A}_o$ событие

$$\mathcal{A}_o = \{\text{ куб } W_{[n/6]} \text{ не содержится во внутренности}$$
$$\text{ни одного из внешних контуров }\}.$$

Если $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$, то события $\mathcal{A}(\Gamma_1)$ и $\mathcal{A}(\Gamma_2)$ несовместимы. Поэтому для любого события C

$$q_n(C) = \sum_{\mathcal{A}(\Gamma)} q_n(C|\mathcal{A}(\Gamma))q_n(\mathcal{A}(\Gamma)) + q_n(C|\mathcal{A}_o)q_n(\mathcal{A}_o), \tag{34}$$

где через $q_n(\cdot)$ обозначены распределения Гиббса на W_n с граничными условиями $\varphi(W_n^c) \equiv -1$, параметром β и внешними полями $h_{W_n}(x) = c/n$. Рассмотрим теперь условные вероятности $q_n(\cdot|\mathcal{A}(\Gamma))$. Используя специальный вид гамильтониана (1) (или (4)), можно заключить, что условное распределение вероятностей на множестве $\operatorname{int}(\Gamma) \setminus \partial\operatorname{int}(\Gamma)$, при условии, что Γ является внешним контуром конфигурации φ, зависит только от $\varphi(\partial\operatorname{int}(\Gamma))$ и не зависит от $\varphi\big((\operatorname{int}(\Gamma))^c\big)$. Далее, если $\varphi \in \mathcal{A}(\Gamma)$, то $\varphi(\partial\operatorname{int}(\Gamma)) \equiv +1$. Отсюда вытекает, что указанное условное распределение вероятностей является распределением вероятностей для модели классического изинговского ферромагнетика, отвечающим обратной температуре β, граничным условиям $\varphi(\partial\operatorname{int}(\Gamma)) = +1$ и постоянному внешнему полю $h = c/n$. Рассмотрим следующие корреляционные функции на множестве $\operatorname{int}(\Gamma) \setminus \partial\operatorname{int}(\Gamma)$.

Контур γ будем называть *внешним контуром конфигурации* $\varphi \in \mathcal{A}(\Gamma)$ *на множестве* $\operatorname{int}(\Gamma) \setminus \partial\operatorname{int}(\Gamma)$, если

1) $\operatorname{int}(\gamma) \subset \operatorname{int}(\Gamma)$;

2) не существует контура γ' такого, что $\operatorname{int}(\gamma) \subset \operatorname{int}(\gamma') \subset \operatorname{int}(\Gamma)$.

Для $h \geq 0$, через $\rho_n^{(m)}(\gamma_1, ..., \gamma_m|\mathcal{A}(\Gamma), h)$ обозначим условную вероятность того, что $\gamma_1, ..., \gamma_m$ являются внешними контурами конфигурации φ на множестве $\operatorname{int}(\Gamma) \setminus \partial\operatorname{int}(\Gamma)$. Из результатов работы [5] (ср. с [7]) следует, что $\rho_n^{(m)}(\gamma_1, ..., \gamma_m|\mathcal{A}(\Gamma), h)$ являются монотонно убывающими функциями от h при фиксированных $\gamma_1, ..., \gamma_m, \Gamma$ и $h \geq 0$. Следовательно, поскольку оценка (23) с $c_3(\beta, \nu) = \beta$ выполнена для $h = 0$, она остаётся справедливой для всех $h > 0$. Таким образом

$$\rho_n^{(m)}(\gamma_1, ..., \gamma_m|\mathcal{A}(\Gamma), h) \leq \exp[-\beta \sum_{l=1}^{m} |\gamma_l|]. \tag{35}$$

Далее, для $V \subset Z^\nu$, $|V| < \infty$ численное значение гамильтониана (1) не изменится при одновременной замене $\varphi(x)$ на $-\varphi(x)$, и $h_V(x)$ на $-h_V(x)$ во всех точках $x \in V$, и $\varphi(V^c)$ на $-\varphi(V^c)$ в точках $x \in V^c$. Следовательно, мы можем использовать Лемму 2 для доказательства теоремы. Условия б) и в), очевидно, выполнены, а условие г) следует из формулы (35). Следовательно, для фиксированных $\gamma_1, ..., \gamma_m$, $\rho_n^{(m)}(\gamma_1, ..., \gamma_m|\mathcal{A}(\Gamma), c/n)$ стремится к пределу $\rho^{(m)}(\gamma_1, ..., \gamma_m)$, при $n \to \infty$ равномерно по всем Γ таким, что $\mathrm{int}(\Gamma) \supset W_{[n/6]}$. По Теореме о полоске $q_n(\mathcal{A}_o)$ стремится к нулю. Таким образом, в силу формулы (34) распределения вероятностей $q_n(\cdot)$ слабо сходятся к P_β^+. Теорема 1 доказана.

В заключение автор благодарит Я. Г. Синая и Е. И. Динабурга за полезные обсуждения, и Р. В. Амбарцумяна за замечания, которые существенно улучшили текст работы.

ABSTRACT. We study in this article Gibbs states in classical Ising ferromagnet on the integer lattice Z^ν ($\nu \geq 2$) for large inverse temperature β ($\beta \geq \beta_o$) and variable external fields h. We prove that there exist c_1 and c_2, $0 < c_1 < c_2 < \infty$, depending only on β and ν, such that the Gibbs distributions on W_n (where W_n is a cube on Z^ν, centered at the origin with the side lenght $2n+1$) with (-1) boundary conditions outside W_n and external fields $h = c'/n$ and $h = c''/n$ respectively, $0 \leq c' \leq c_1$, $c_2 \leq c''$, converge weakly to the pure phases P_β^- and P_β^+ respectively, as $n \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Ruelle, "On the use of "small external fields" in the problem of symmetry breakdown in statistical mechanics," Annals of Physics, vol. 69, no. 2, pp. 364 – 374, 1972.
2. O. E. Lanford, D. Ruelle, "Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics," Commun. in Math. Phys., vol. 13, pp. 194 – 215, 1968.
3. Р. Л. Добрушин, "Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием," Функц. Анализ и его прил., том 2, стр. 292 – 301, 1968.
4. Я. Г. Синай, Теория Фазовых Переходов, М., Наука, 1980.
5. Р. А. Минлос, Я. Г. Синай, "Новые результаты о фазовых переходах 1-го рода в моделях решетчатого газа," Труды ММО, том 17, стр. 213 – 243, 1967.
6. Д. Г. Мартиросян, "Теоремы о полосках в модели классического изинговского ферромагнетика," Изв. АН Армении, Математика [английский перевод: Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)], том 23, № 3, стр. 272 – 297, 1987.
7. R. B. Griffiths, "Correlations in Ising ferromagnets," J. Math. Phys., vol. 8, pp. 478 – 489, 1967.

13 Апреля 1992

Институт Математики АН Армении