ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ТРУБЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ НАД АФФИННО-ОДНОРОДНЫМИ КОНУСАМИ[1]

А. О. Карапетян

Известия Академии Наук Армении. Математика,
том 27, 3, 1992

В настоящей статье рассматривается класс функций $f(z) \equiv f(x+iy)$ голоморфных в трубчатых областях $T_V = \{z = x+iy \in \mathbb{C}^n : x \in \mathbb{R}^n, y \in V\}$ и удовлетворяющих условию $\int_V \{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+iy)|^p\, dx\}^s \gamma(y)\, dy < +\infty$, $(0 < p, s < +\infty)$. Здесь V – аффинно-однородный острый открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$ с рангом $l \geq 1$, т.е. $V = \{y \in \mathbb{R}^n : \chi_m(y) > 0, \quad (1 \leq m \leq l)\}$, где $\chi_m (1 \leq m \leq l)$ – рациональные функции, ассоциированные с конусом V, а $\gamma(y) > 0$ – весовая функция вида $\gamma(y) \equiv \prod_{m=1}^{l} \varphi_m(\chi_m(y))$, $y \in V$, где $\varphi_m(\tau)$ $(1 \leq m \leq l)$ положительны и непрерывны и $\tau \in (0, +\infty)$. Для $1 \leq p \leq 2$ найдены некоторые условия на параметр s и функцию φ_m $(1 \leq m \leq l)$, которые гарантируют существование интегральных представлений типа Пэли–Винера и воспроизводящих ядер для классов голоморфных функций.

§0. ВВЕДЕНИЕ

0.1. Хорошо известное пространство Харди H^2 в правой полуплоскости $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z > 0\}$ определяется как класс тех голоморфных функций $f(z) \equiv f(x+iy)$, $\operatorname{Re} z > 0$, для которых

$$\sup_{0<x<+\infty} \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2\, dy\right\} < +\infty. \tag{0.1}$$

Классическая теорема Винера-Пэли (см. [1,2]) утверждает, что класс $H^2\{\operatorname{Re} z > 0\}$ совпадает с множеством функций, допускающих представление

$$f(z) = \int_0^{+\infty} F(t) \cdot e^{-zt}\, dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \tag{0.2}$$

где $F(t) \in L^2(0, \infty)$.

---

[1] Настоящая работа была депонирована в АрмНИИНТИ 16 ноября 1990г., деп. 48-Ар90, Ереван, 42 стр. (1990)

Этот важный результат имеет обобщения в различных направлениях. С. Бохнер [3] установил аналог интегрального представления (0.2) для многомерных пространств Харди в радиальных трубчатых областях (т.е. в трубчатых областях над конусами).

М. М. Джрбашян и А. Е. Аветисян [4] установили новые интегральные представления типа (0.2) для весовых пространств Харди в угловых областях. Эти представления записывались посредством ядер типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)}. \tag{0.3}$$

В дальнейшем эти результаты были развиты в монографии М. М. Джрбашяна [5] по гармоническому анализу и интегральным преобразованиям в комплексной области.

Особый интерес представляет работа С. Г. Гиндикина [6], где рассматривались довольно общие многомерные области (так называемые области Зигеля). Эти области являются обобщениями радиальных трубчатых областей.

С. Г. Гиндикин [6] обобщил результат С. Бохнера на случай произвольной области Зигеля. Кроме того, в [6] были получены интегральные представления типа Винера-Пэли для квадратично интегрируемых голоморфных функций. С помощью этих представлений для соответствующих классов голоморфных функций были построены воспроизводящие ядра посредством интеграла Лапласа. Эти результаты С. Г. Гиндикина были развиты М. М. Джрбашяном и В. М. Мартиросяном [7, 8], Т. Г. Генчевым [9 – 11], С. Саито [12] (см. также работы автора [13 – 16], причем последние две содержат подробные обзоры).

В [6] была поставлена следующая задача: в какой степени формулы, полученные в [6] для воспро- изводящих ядер L^2-классов функций, голоморфных в произвольных областях Зигеля, упрощаются в случае аффинно-однородных областей? В [6] было найдено, что в этом случае воспроизводящие ядра могут быть записаны посредством специальных степенных

функций.

Р. Р. Койфман и Р. Рохберг [17] утверждают, что использованием аналогичных методов можно получить воспроизводящие ядра для специальных весовых L^2–классов функций, голоморфных в симметрических аффинно-однородных областях Зигеля.

0.2. В настоящей работе мы рассматриваем интегральные представления типа Винера–Пэли и строим воспроизводящие ядра для весовых классов функций, голоморфных в трубчатых областях над аффинно-однородными острыми ОВК (открытыми выпуклыми конусами) в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$). Острота V означает, что V не содержит целиком какой-либо прямой из $\mathbb{R}^n$.

В §1 мы приводим сводку некоторых необходимых сведений из работы С. Г. Гиндикина [6] относительно аффинно-однородных конусов. В §2 мы вычисляем несколько интегралов, в частности

$$\int_V e^{-[t,y]}\gamma(y)\,dy, \quad t \in \mathbb{R}^n, \tag{0.4}$$

где V – аффинно-однородный острый ОВК в $\mathbb{R}^n$, $[.,.]$ – скалярное произведение (в $\mathbb{R}^n$), ассоциированное с V, и

$$\gamma(y) \equiv \prod_{m=1}^{l} \varphi_m(\chi_m(y)), \quad y \in V. \tag{0.5}$$

Здесь $\varphi_m(\tau)$, $\tau \in (0,+\infty)$, $1 \leq m \leq l$ – непрерывные положительные функции, χ_m ($1 \leq m \leq l$) – рациональные функции, естественным образом связанные с V (их определение см. в [6]) и такие, что

$$V = \{y \in \mathbb{R}^n : \chi_m(y) > 0, \quad 1 \leq m \leq l\}. \tag{0.6}$$

Соответствие, определяемое (0.5), мы будем обозначать $\gamma \prec (\varphi_1, ..., \varphi_l)$.

В §3 содержатся основные результаты. Мы рассматриваем функции $f(z) \equiv f(x+iy)$, голоморфные в трубчатой области $T_V \subset \mathbb{C}^n$, для которых

$$M^p_{s,\gamma}(f) = \int_V \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+iy)|^p \, d\nu(x) \right\}^s \gamma(y)\,d\nu(y) < +\infty. \tag{0.7}$$

Здесь $1 \leq p \leq 2$, $0 < s < +\infty$, $d\nu$ кратна n-мерной мере Лебега и $\gamma \prec (\varphi_1, ..., \varphi_l)$. При определенных условиях на функции φ_m ($1 \leq m \leq l$) и

параметр s, мы получаем интегральные представления типа Винера-Пэли (теорема 3.1) и строим воспроизводящие ядра (теорема 3.2 и формула (3.9)) для этих классов голоморфных функций.

Автор признателен академику М. М. Джрбашяну и профессору С. Г. Гиндикину за постановку задачи и полезные обсуждения.

§1. ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ГИНДИКИНА ОТНОСИТЕЛЬНО АФФИННО-ОДНОРОДНЫХ КОНУСОВ

1.1. Пусть V – острый ОВК в пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geq 1)$, и $L(V)$ обозначает группу всех невырожденных линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^k$, сохраняющих V. Конус V называется аффинно-однородным, если группа $L(V)$ действует на нем транзитивно.

Отображение $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^k$ назовем V-билинейной симметрической формой на пространстве $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 0)$, если выполняются следующие условия:

1) $F(s_1 + s_2, t) = F(s_1, t) + F(s_2, t), \quad s_1, s_2, t \in \mathbb{R}^m;$

2) $F(\lambda s, t) = \lambda \cdot F(s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}^m, \quad \lambda \in \mathbb{R};$

3) $F(t, s) = F(s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}^m;$

4) $F(t, t) \in \overline{V}$ (замыкание V), $t \in \mathbb{R}^m$, причём $F(t, t) = 0 \in \mathbb{R}^k$ лишь при $t = 0 \in \mathbb{R}^m$.

Через $\mathcal{P}_{V,F}$ будем обозначать вещественную область Зигеля, ассоциированную с острым ОВК $V \subset \mathbb{R}^k$ и V-билинейной симметрической формой F на $\mathbb{R}^m$. По определению

$$\mathcal{P}_{V,F} = \{(y, t) \in \mathbb{R}^{k+m}: \quad y \in \mathbb{R}^k, \quad t \in \mathbb{R}^m, \quad y - F(t, t) \in V\}.$$

Отметим, что при $m = 0$, $\mathcal{P}_{V,F}$ совпадает с исходным конусом $V \subset \mathbb{R}^k$. Вещественная область Зигеля $\mathcal{P}_{V,F} \subset \mathbb{R}^{k+m}$ называется аффинно-однородной, если

а) конус V аффинно-однородный;

б) существует подгруппа $G(V) \subset L(V)$, продолжающая действовать транзитивно на V и такая, что для каждого $g \in G(V)$ найдется невырож

денное линейное преобразование $\tilde{g}$ пространства $\mathbb{R}^m$, при котором

$$gF(t,t) = F(\tilde{g}t, \tilde{g}t), \qquad t \in \mathbb{R}^m. \tag{1.1}$$

Пусть E – произвольное непустое множество в $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$. Положим

$$V(E) = \{(v,r) \in \mathbb{R}^{N+1}: \quad v \in \mathbb{R}^N, r \in \mathbb{R}, r > 0, v/r \in E\}. \tag{1.2}$$

Предложение 1.1. (см. [6]) *Пусть V – острый ОВК в $\mathbb{R}^k$ $(k \geq 1)$, а F есть V-билинейная симметрическая форма на $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 0)$. Если вещественная область Зигеля $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{V,F} \subset \mathbb{R}^{k+m}$ аффинно-однородна, то $V(\mathcal{P}) \subset \mathbb{R}^{k+m+1}$ является аффинно-однородным острым ОВК.*

Теперь опишем индуктивный алгоритм для построения бесконечной последовательности аффинно-однородных острых ОВК V^i. На первом шаге положим $V^1 = (0, +\infty)$. Очевидно, V^1 есть аффинно-однородный острый ОВК в $\mathbb{R}^1$. Допустим, что после i-го шага построен некоторый аффинно-однородный острый ОВК V^i. Тогда на $(i+1)$-ом шаге выбирается V^i-билинейная симметрическая форма F^{i+1} таким образом, чтобы ассоциированная с V^i и F^{i+1} вещественная область Зигеля $\mathcal{P}^{i+1} = \mathcal{P}_{V^i,F^{i+1}}$, была бы аффинно-однородной, и после этого полагается $V^{i+1} = V(\mathcal{P}^{i+1})$. Согласно предложению 1.1, V^{i+1} является аффинно-однородным острым ОВК.

Аффинно-однородный острый ОВК $V \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ называется приведенным, если он может быть построен при помощи описанной выше процедуры за конечное число шагов. При этом количество этих шагов называется рангом V.

Теорема 1.1. (см. [6]) *Каждый аффинно-однородный острый ОВК $V \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ некоторым линейным изоморфизмом $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ может быть преобразован в приведенный аффинно-однородный острый ОВК.*

1.2. Всюду дальше V будет обозначать лежащий в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ приведенный аффинно-однородный острый ОВК ранга $l = l(V)$. Пусть $V^i (1 \leq i \leq l)$ суть конусы, участвующие в индуктивном построении V. Вещественное координатное пространство, содержащее конус V^i, обозначим через $\mathbb{R}(i)$, $1 \leq i \leq l$, причем заметим, что $V^l = V$, $\mathbb{R}(l) = \mathbb{R}^n$.

Обозначим через R_{i+1} вещественное координатное пространство, на котором задается форма F^{i+1}. Очевидно, $\mathcal{P}^{i+1} \subset \mathbb{R}(i) \times R_{i+1}$. Поэтому $V^{i+1} \subset \mathbb{R}(i) \times R_{i+1} \times R_{i+1\,i+1}$, где $R_{i+1\,i+1}$ суть одномерное вещественное координатное пространство. Таким образом, имеем

$$\mathbb{R}(i+1) = \mathbb{R}(i) \times R_{i+1} \times R_{i+1\,i+1}, \tag{1.3}$$

и следующее каноническое разбиение всего пространства $\mathbb{R}^n$, порожденное конусом $V \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = R_{11} \times R_2 \times R_{22} \times \ldots \times R_{l-1} \times R_{l-1\,l-1} \times R_l \times R_{ll}. \tag{1.4}$$

Здесь R_{ii} $(1 \leq i \leq l)$ являются одномерными вещественными координатными пространствами, а R_j $(2 \leq j \leq l)$ суть вещественные координатные пространства размерности $n_j \geq 0$. Очевидно,

$$n = l + \sum_{j=2}^{l} n_j. \tag{1.5}$$

Заметим также, что при всех i $(1 \leq i \leq l)$ имеем разбиения:

$$\mathbb{R}(i) = R_{11} \times R_2 \times R_{22} \times \ldots \times R_i \times R_{ii}. \tag{1.6}$$

Далее, для произвольного вектора $x \in \mathbb{R}^n$ через x_{ii} $(1 \leq i \leq l)$ и x_j $(2 \leq j \leq l)$ соответственно обозначаются проекции x на подпространства R_{ii} $(1 \leq i \leq l)$ и R_j $(2 \leq j \leq l)$. Зафиксируем теперь некоторое j, $2 \leq j \leq l$. Тогда, как это следует из способа построения конуса V, на R_j задана V^{j-1}-билинейная симметрическая форма F^j. Кроме того,

$$V^{j-1} \subset \mathbb{R}(j-1) = R_{11} \times R_2 \times R_{22} \times \ldots \times R_{j-1} \times R_{j-1\,j-1}. \tag{1.7}$$

Обозначим через F^j_{ii} проекции формы F^j на одномерные пространства R_{ii} $(1 \leq i < j)$. Очевидно, F^j_{ii} $(1 \leq i < j)$ являются уже скалярными неотрицательными билинейными симметрическими формами, заданными на пространстве R_j. Оказывается R_j разбивается на прямую сумму определенных подпространств R_{ij} $(1 \leq i < j)$:

$$R_j = \bigoplus_{1 \leq i < j} R_{ij}, \tag{1.8}$$

где при $1 \leq i < j$ форма F^j_{ii} сосредоточена на R_{ij}. Таким образом F^j_{ii} является скалярной положительной билинейной симметрической формой на R_{ij}. Для размерностей n_{ij} $(1 \leq i < j)$ подпространств R_{ij} имеем

$$n_j = \sum_{1 \leq i < j} n_{ij}. \tag{1.9}$$

Рассмотрим следующие l-компонентные векторы:

$$N = N(V) = (N_1, ..., N_l), \quad M = M(V) = (M_1, ..., M_l); \tag{1.10}$$

$$N_1 = 0, \quad N_m = \sum_{i=1}^{m-1} n_{im} = n_m \quad (2 \leq m \leq l),$$
$$M_m = \sum_{j=m+1}^{l} n_{mj} \quad (1 \leq m \leq l-1), \quad M_l = 0, \tag{1.11}$$

$$d = d(V) = (d_1, ..., d_l), \tag{1.12}$$

$$d_m = -\left(1 + \frac{N_m + M_m}{2}\right) \quad (1 \leq m \leq l). \tag{1.13}$$

Наконец, если $x \in \mathbb{R}^n$, то через x_{ij} обозначается проекция вектора x на R_{ij}.

1.3. Пусть V – приведенный аффинно-однородный острый ОВК. В [6] построена группа $G(V) \subset L(V)$, действующая просто транзитивно на V, т.е. для произвольных $y_1, y_2 \in V$ существует ровно одно преобразование $g \in G(V)$ такое, что $y_2 = g\, y_1$. Затем условиями

$$e_{ii} = 1 \quad (1 \leq i \leq l), \quad e_j = 0 \in R_j \quad (2 \leq j \leq l) \tag{1.14}$$

в конусе V выделяется точка e, с помощью которой между V и группой $G(V)$ устанавливается биекция $x \mapsto g(x)$. А именно, если $x \in V$, то $g(x)$ есть то единственное отображение из $G(V)$, для которого

$$x = g(x)\, e. \tag{1.15}$$

Таким образом, V становится группой относительно бинарной операции

$$x \cdot y = g(x)\, y, \quad \forall x, y \in V. \tag{1.16}$$

Точка $e \in V$ – единица этой группы. Заметим, что (1.16) позволяет придать смысл выражению $x \cdot y$ и при $x \in V$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Функции χ_i, $1 \le i \le l$ (см. (0.6)) являются непрерывными мультипликативными характерами группы V, т.е.

$$\chi_i(x \cdot y) = \chi_i(x) \cdot \chi_i(y), \quad x, y \in V; \qquad \chi_i(e) = 1. \tag{1.17}$$

Кроме того,

$$\chi_i(\alpha \cdot y) = \alpha \cdot \chi_i(y), \quad \alpha > 0, \quad y \in V \quad (1 \le i \le l). \tag{1.18}$$

Наличие функций χ_i позволяет определить в конусе V следующие степенные функции: для произволь- ного $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_l) \in \mathbb{C}^l$ положим

$$y^\rho = \prod_{i=1}^{l} [\chi_i(y)]^{\rho_i}, \quad y \in V. \tag{1.19}$$

При $\lambda \in V$

$$|\det g(\lambda)| = \lambda^{-d}, \quad d = d(V), \tag{1.20}$$

и поэтому

$$d(\lambda \cdot y) = \lambda^{-d} \cdot dy, \quad y \in V. \tag{1.21}$$

1.4. Теперь мы введем ассоциированное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$[x, y] = \sum_{i=1}^{l} x_{ii} \cdot y_{ii} + \sum_{\substack{2 \le j \le l \\ 1 \le i < j}} F_{ii}^j(x_{ij}, y_{ij}). \tag{1.22}$$

Для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\text{сп}(x) = [x, e] = \sum_{i=1}^{l} x_{ii}. \tag{1.23}$$

Отметим, что подпространства R_{ii} $(1 \le i \le l)$ и R_j $(2 \le j \le l)$ в каноническом разбиении (1.4) пространства $\mathbb{R}^n$ взаимно ортогональны в смысле скалярного произведения (1.22). Более того, при фиксированном j, $2 \le j \le l$, подпространства R_{ij} $(1 \le i < j)$ в разложении (1.8) также взаимно ортогональны.

Зафиксируем далее некоторое j, $2 \le j \le l$. Обозначим через $d\nu_j$ меру Лебега в R_j,

$$d\nu_j(s) = c_j \cdot ds, \quad s \in R_j, \tag{1.24}$$

нормированную условием

$$\int_{R_j} e^{-[s,s]}\, d\nu_j(s) = \pi^{n_j/2}. \tag{1.25}$$

Затем с учетом (1.4) определим в $\mathbb{R}^n$ меру

$$d\nu(x) = \prod_{i=1}^{l} dx_{ii} \times \prod_{j=2}^{l} d\nu_j(x_j), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.26}$$

кратную мере Лебега, т.е.

$$d\nu(x) = \text{ const } \cdot dx, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.27}$$

причем константа определяется лишь конусом $V \subset \mathbb{R}^n$ и

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-[x,x]}\, d\nu(x) = \pi^{n/2}. \tag{1.28}$$

1.5. Специальной заменой переменных интегрирование по произвольному приведенному аффинно-однородному острому ОВК $V \subset \mathbb{R}^n$ может быть сведено к интегрированию по более простой области. Положим

$$T^+ = \{t \in \mathbb{R}^n : \quad t_{ii} > 0 \quad (1 \le i \le l), t_j \in R_j\, (2 \le j \le l)\}. \tag{1.29}$$

Тогда существует диффеоморфизм $x = x(t)$: $\quad T^+ \mapsto V$:

$$x_{ii} = t_{ii}^2 + \sum_{k=i+1}^{l} F_{ii}^k(t_k, t_k), \quad 1 \le i \le l,$$

$$x_j = t_{jj} \cdot t_j + \sum_{k=j+1}^{l} F_j^k(t_k, t_k), \quad 2 \le j \le l. \tag{1.30}$$

Здесь F_j^k обозначает проекцию формы F^k на подпространство R_j. Для этого диффеоморфизма справед- ливы следующие соотношения:

$$\text{sp}\,(x(t)) = [t, t], \quad t \in T^+; \tag{1.31}$$

$$\chi_m(x(t)) = t_{mm}^2, \quad t \in T^+ \quad (1 \le m \le l); \tag{1.32}$$

$$dx(t) = 2^l \prod_{i=1}^{l} (t_{ii})^{N_i+1}\, dt, \quad t \in T^+. \tag{1.33}$$

1.6. Обозначим

$$V^* = \{v \in \mathbb{R}^n : \quad [v, y] \geq 0, \quad \forall y \in V\}. \tag{1.34}$$

Оказывается, что Int $V^* \subset \mathbb{R}^n$ также является приведенным аффинно-однородным острым ОВК того же ранга l. Далее, для произвольного $\rho = (\rho_1, ..., \rho_l) \in \mathbf{C}^l$ условимся полагать $\rho^* = (\rho_l, ..., \rho_1) \in \mathbf{C}^l$. Тогда имеем (см. [6])

$$N(\text{Int } V^*) = M^*, \quad M(\text{Int } V^*) = N^*, \quad d(\text{Int } V^*) = d^*. \tag{1.35}$$

Условия (1.15), примененые к V или Int V^*, в обоих случаях выделяют одну и ту же точку e. Положим далее

$$G^*(V) = \{g^* : \quad g \in G(V)\}, \tag{1.36}$$

где для данного $g \in G(V)$, g^* означает отображение, сопряженное относительно скалярного произведения $[.,.]$. Тогда группа $G^*(V)$ сохраняет конус Int V^* и к тому же действует просто транзитивно на нем. Следовательно, по аналогии с тем как строилась биекция между V и $G(V)$, между Int V^* и $G^*(V)$ также устанавливается биективное отображение. В частности, на Int V^* индуцируется групповая структура. В результате мы приходим к биекции $x \mapsto x^*$ между V и Int V^*:

$$x \in V \mapsto x^* = (g(x))^* e \in \text{Int } V^*. \tag{1.37}$$

Для произвольных $x \in V$ и $y \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned} [x^*, y] &= \text{sp } (x \cdot y), \\ [x, y] &= \text{sp } (x^* \cdot y). \end{aligned} \tag{1.38}$$

Как и с V, с конусом Int V^* можно ассоциировать некоторые функции χ_i^* $(1 \leq i \leq l)$, задающие его и являющиеся непрерывными мультипликативными характерами группы Int V^*. Наличие этих функций позволяет определить в Int V^* следующие степенные функции:

$$(\lambda)_*^\rho = \prod_{i=1}^{l} [\chi_i^*(\lambda)]^{\rho_i}, \quad \lambda \in \text{Int } V^*. \tag{1.39}$$

Функции χ_i и χ_i^* $(1 \le i \le l)$ взаимосвязаны:

$$\chi_i^*(y^*) \equiv \chi_{l-i+1}(y),\ y \in V. \tag{1.40}$$

Комбинируя (1.19), (1.39) и (1.40), получаем

$$(y^*)_*^\rho = y^{\rho^*}, \quad y \in V. \tag{1.41}$$

Наконец, через $[.,.]_*$ и $d\nu_*$ соответственно будут обозначаться скалярное произведение и мера, каноническим образом ассоциированные с приведенным аффинно-однородным острым ОВК $\operatorname{Int} V^* \subset \mathbb{R}^n$. В частности, полагаем

$$\operatorname{sp}_*(x) = [x, e]_*, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.42}$$

Очевидно,

$$\operatorname{sp}_*(x) = \operatorname{sp}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.43}$$

и $d\nu_*$ кратна n-мерной мере Лебега.

§2 ВЫЧИСЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

2.1. Пусть C_+ – класс непрерывных положительных функций, определенных на $(0, +\infty)$. Для $\varphi(\tau) \in C_+$ положим

$$\varphi^*(t) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-t\tau}\, \varphi(\tau)\, d\tau, \qquad -\infty < t < +\infty. \tag{2.1}$$

Мы изучим подклассы C_+ при условии, что:

(А) $\displaystyle\lim_{\tau \to +\infty} \frac{\ln \varphi(\tau)}{\tau} = 0;$

(Б) $\displaystyle\limsup_{\tau \to +\infty} \frac{\ln \varphi(\tau)}{\tau} \le 0;$

(В) $\displaystyle\varliminf_{\tau \to +\infty} \frac{\ln \varphi(\tau)}{\tau} \ge 0;$

(Г) $\varphi \in L^1(0, +\infty);$

(Д) $\varphi \in L^1(0, R)$ при любом $R \in (0, +\infty);$

(Е) $\varphi(2\tau) \le C\varphi(\tau), \quad \tau \in (0, +\infty),$ где константа $C > 0$.

Из Предложений 1.2 [15] и 2.4 [13] имеем информацию о свойствах функции $\varphi^*(t)$ в зависимости от свойств $\varphi(\tau)$. Всюду ниже предполагается, что $\gamma \prec (\varphi_1, \ldots, \varphi_l)$ (см. (0.5)).

Предложение 2.1. *Пусть $\{\varphi_m(\tau)\}_1^l$ – произвольные функции из C_+. Положим $\tilde{\varphi}_m(\tau) \equiv \varphi_m(\tau) \cdot \tau^{N_m/2}$ $(1 \le m \le l)$. Тогда*

$$\int_V e^{-sp(\lambda \cdot y)} \gamma(y)\, d\nu(y) = \pi^{\frac{n-l}{2}} \cdot \lambda^{-M/2} \cdot \prod_{m=1}^{l} \tilde{\varphi}_m(\chi_m(\lambda)), \quad \lambda \in V. \tag{2.2}$$

Доказательство. Полагая $y = \lambda^{-1} \cdot x$, согласно (1.21) мы имеем

$$dy = \lambda^d\, dx. \tag{2.3}$$

Принимая во внимание (1.27), получаем

$$d\nu(y) = \lambda^d\, d\nu(x). \tag{2.4}$$

Поскольку функции χ_m являются мультипликативными характерами группы V, то

$$\chi_m(y) = \chi_m(\lambda^{-1} \cdot x) = \frac{\chi_m(x)}{\chi_m(\lambda)}. \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5) следует, что

$$I = \int_V e^{-sp(\lambda \cdot y)} \gamma(y)\, d\nu(y) = \lambda^d \int_V e^{-sp(x)} \prod_{m=1}^{l} \varphi_m\left(\frac{\chi_m(x)}{\chi_m(\lambda)}\right) d\nu(x). \tag{2.6}$$

Произведя замену переменной $x = x(t)$, $t \in T^+$ и воспользовавшись соотношениями (1.31)–(1.33), получим

$$I = \lambda^d \cdot 2^l \cdot \int_{T^+} e^{-[t,t]} \cdot \prod_{m=1}^{l} \varphi_m\left(\frac{t_{mm}^2}{\chi_m(\lambda)}\right) \cdot \prod_{m=1}^{l} (t_{mm})^{N_m+1}\, d\nu(t). \tag{2.7}$$

Используя описание (1.29) множества T^+ и (1.26), (2.7) можно записать следующим образом:

$$I = \lambda^d \cdot 2^l \cdot \prod_{m=1}^{l} A_m \cdot \prod_{j=2}^{l} B_j, \tag{2.8}$$

где

$$A_m = \int_0^{+\infty} e^{-t_{mm}^2} \cdot (t_{mm})^{N_m+1} \cdot \varphi_m\left(\frac{t_{mm}^2}{\chi_m(\lambda)}\right) dt_{mm}, \tag{2.9}$$

$$B_j = \int_{R_j} e^{-[t_j,t_j]}\, d\nu_j(t_j); \tag{2.10}$$

Из условий (1.25) следует, что $B_j = \pi^{n_j/2}$. Поэтому

$$\prod_{j=2}^{l} B_j = \pi^{1/2\sum_{j=2}^{l} n_j} = \pi^{\frac{n-1}{2}}. \tag{2.11}$$

Произведя естественную замену переменной $t_{mm} = (\tau \cdot \chi_m(\lambda))^{1/2}$, $\tau \in (0, +\infty)$, получим

$$A_m = \frac{1}{2} \cdot [\chi_m(\lambda)]^{1+N_m/2} \cdot \widetilde{\varphi}^*_m(\chi_m(\lambda)). \tag{2.12}$$

Заметим теперь, что $1 + N_m/2 = -d_m - M_m/2$. Следовательно,

$$\prod_{m=1}^{l} A_m = \frac{1}{2^l} \cdot \lambda^{-d-\frac{M}{2}} \cdot \prod_{m=1}^{l} \widetilde{\varphi}^*_m(\chi_m(\lambda)). \tag{2.13}$$

Наконец, комбинируя (2.8), (2.11) и (2.13), мы получим (2.2). Предложение 2.1 доказано.

Поскольку Int V^*, как и V, является приведенным аффинно-однородным острым ОВК ранга l в пространстве $\mathbb{R}^n$, то можем заменить в Предложении 2.1 V на Int V^*. Принимая во внимание (1.35), получаем

Следствие 2.1. Пусть $\{\Psi_m(\tau)\}_1^l$ – произвольные функции из C_+. Положим $\bar{\Psi}_m(\tau) \equiv \Psi_m(\tau) \cdot \tau^{M_{l-m+1}/2}$, $(1 \le m \le l)$. Тогда

$$\int_{\mathrm{Int}\, V^*} e^{-sp_*(\lambda \cdot t)} \cdot \prod_{m=1}^{l} \Psi_m(\chi^*_m(t))\, d\nu_*(t) =$$

$$= \pi^{\frac{n-l}{2}} \cdot (\lambda)_*^{-N^*/2} \cdot \prod_{m=1}^{l} \bar{\Psi}^*_m(\chi^*_m(\lambda)), \quad \forall \lambda \in \mathrm{Int}\, V^*. \tag{2.14}$$

Доказанные утверждения допускают полезные переформулировки:

Предложение 2.2. *В условиях Предложения 2.1*

$$\gamma^*_V(t) \stackrel{def}{=} \int_V e^{-[t,y]} \cdot \gamma(y)\, d\nu(y) = \pi^{\frac{n-l}{2}} \cdot (t)_*^{-M^*/2} \cdot \prod_{m=1}^{l} \widetilde{\varphi}^*_m(\chi^*_{l-m+1}(t)), \quad t \in \mathrm{Int}\, V^*. \tag{2.15}$$

Доказательство. Из (1.38),(1.40) и (1.41) следует, что для $\lambda \in V$ такого, что $t = \lambda^*$, справедливы соотношения

$$\mathrm{sp}\,(\lambda \cdot y) = [t, y], \quad \chi_m(\lambda) = \chi^*_{l-m+1}(t) \text{ и } \quad \lambda^{-M/2} = (t)_*^{-M^*/2}. \tag{2.16}$$

Сопоставляя Предложение 2.1 с (2.16), непосредственно получаем (2.15).

Следствие 2.2. В условиях следствия 2.1 имеет место

$$\int_{\mathrm{Int}\, V^*} e^{-[y,t]} \cdot \prod_{m=1}^{l} \Psi_m(\chi_m^*(t))\, d\nu_*(t) = \pi^{\frac{n-l}{2}} \cdot (y)^{-N/2} \cdot \prod_{m=1}^{l} \bar{\Psi}_m^*(\chi_{l-m+1}(y)), \quad \forall y \in V \tag{2.17}$$

Доказательство. Из (1.38), (1.40), (1.41) и (1.43) следует, что

$$(y^*)_*^{-N^*/2} = y^{-N/2}, \quad sp_*(y^* \cdot t) = [y,t] \quad \text{и} \quad \chi_m^*(y^*) = \chi_{l-m+1}(y). \tag{2.18}$$

Используя (2.18), перепишем (2.14) в виде (2.17).

2.2. Сформулируем следующую простую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть E – открытое непустое множество в $\mathbb{R}^N$. Для любой измеримой неотрицательной функции f, определенной на $V(E)$ (см. (1.2)), имеем*

$$\int_{V(E)} f(y)\, dy = \int_0^{+\infty} r^N \int_E f(r \cdot v, r)\, dv\, dr. \tag{2.19}$$

Доказательство оставляется читателю.

На основании этой леммы получается

Лемма 2.2. *Пусть $\{\varphi_m(\tau)\}_1^l$ – произвольные функции из C_+, удовлетворяющие условию (B). Тогда*

$$\gamma_V^*(t) \equiv +\infty, \quad t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*. \tag{2.20}$$

Доказательство. Поскольку $V \subset \mathbb{R}^n$ – приведенный аффинно-однородный острый ОВК ранга l, то $V = V(\mathcal{P}^l)$, где $\mathcal{P}^l$ – вещественная аффинно-однородная область Зигеля в $\mathbb{R}^{n-1}$. Зафиксируем произвольное $t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*$. Тогда при некотором $y_0 \in V = V(\mathcal{P}^l)$ имеет место

$$[t, y_0] < 0. \tag{2.21}$$

Поскольку

$$y_0 = (r_0 \cdot v_0, r_0) = r_0 \cdot (v_0, 1), \quad r_0 > 0, \quad v_0 \in \mathcal{P}^l, \tag{2.22}$$

то (2.21) влечет

$$[t, (v_0, 1)] < 0. \tag{2.23}$$

Следовательно, существует компактная окрестность $W \subset \mathcal{P}^l$ точки v_0 такая, что

$$[t, (v, 1)] \leq -\varepsilon, \quad v \in W, \tag{2.24}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. При этом нетрудно заметить, что существуют также числа $0 < a < A < +\infty$, для которых справедливы неравенства:

$$a \leq \chi_m((v, 1)) \leq A, \quad v \in W, \quad (1 \leq m \leq l). \tag{2.25}$$

Далее, так как все функции φ_m $(1 \leq m \leq l)$ обладают свойством (В), то можно подобрать такое $R \in (0, +\infty)$, что

$$\varphi_m(\tau) \geq \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{2lA} \cdot \tau\right\}, \quad \tau \geq R. \tag{2.26}$$

С учетом формулы (2.19) и соотношений (2.24) – (2.26) приходим к следующей цепочке неравенств:

$$\begin{aligned}
\gamma_V^*(t) &\geq \int_{V(W)} e^{-[t,y]}\gamma(y)\, d\nu(y) \geq \\
&\geq \text{const} \int_{R/a}^{+\infty} r^{n-1} \int_W e^{-r\,[t,(v,1)]} \cdot \prod_{m=1}^{l} \varphi_m(r \cdot \chi_m((v,1)))\, dv\, dr \geq \\
&\geq \text{const} \int_{R/a}^{+\infty} r^{n-1} e^{\varepsilon r} \int_W \prod_{m=1}^{l} \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{2lA} \cdot r \cdot A\right\} dv\, dr = \\
&= \text{const} \cdot \int_W dv \cdot \int_{R/a}^{+\infty} r^{n-1} \cdot e^{\varepsilon/2\, r}\, dr = +\infty.
\end{aligned}$$

Поскольку $t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*$ произвольно, доказательство завершено.

Комбинируя Предложение 2.2 и Лемму 2.2 с [15, предложение 1.2] или [13, предложение 2.4], приходим к следующему утверждению:

Предложение 2.3. *Пусть выполнены условия Предложения 2.1 и кроме того, функции φ_m удовлетворяют условию (Б), а функции $\widetilde{\varphi}_m$ – условию (Д). Тогда $\gamma_V^*(t)$ непрерывна в конусе* Int V^* *и*

$$0 < \gamma_V^*(t) < +\infty, \quad t \in \text{Int } V^*.$$

Справедливо также следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Пусть $\{\varphi_m(\tau)\}_1^l$ – произвольные функции из C_+, удовлетворяющие условию (B). Допустим также, что $1 < p \leq 2$, $q = p/(p-1)$ и $0 < s < +\infty$. Если измеримая функция $F(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию*

$$\int_V \{\int_{\mathbb{R}^n} |F(t)|^q \cdot e^{-q[y,t]}\, d\nu(t)\}^{s(p-1)} \gamma(y)\, d\nu(y) < +\infty, \tag{2.27}$$

то $F(t) = 0$ для почти всех $\mathbb{R}^n \setminus V^*$.

Доказательство. Рассуждения будут приблизительно такими же, как и при доказательстве Леммы 2.2. Зафиксируем произвольное $t_0 \in \mathbb{R}^n \setminus V^*$. Существуют окрестность $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus V^*$ точки t_0 и компактная окрестность $W \subset \mathcal{P}^l$ точки v_0, такие что для $t \in \mathrm{U}$ и $v \in W$ выполнены (2.24) и (2.25). Поскольку функции φ_m обладают свойством (Б), то существует $R \in (0, +\infty)$, для которого

$$\varphi_m(\tau) \geq \exp\left\{-\frac{\varepsilon p s}{2lA} \cdot \tau\right\}, \quad \tau \geq R. \tag{2.28}$$

Тогда на основании Леммы 2.1, соотношений (2.24), (2.25) и (2.28) приходим к следующей цепочке неравенств:

$$+\infty > \int_V \{\int_{\mathbb{R}^n} |F(t)|^q \cdot e^{-q[y,t]}\, d\nu(t)\}^{s(p-1)} \gamma(y)\, d\nu(y) \geq$$

$$\geq \int_{V(W)} \{\int_{\mathrm{U}} |F(t)|^q \cdot e^{-q[y,t]}\, d\nu(t)\}^{s(p-1)} \gamma(y)\, d\nu(y) \geq$$

$$\geq \mathrm{const} \int_{R/a}^{+\infty} r^{n-1} \int_W \{\int_{\mathrm{U}} |F(t)|^q \cdot e^{qr\varepsilon}\, dt\}^{s(p-1)} \times \prod_{m=1}^{l} \varphi_m(r \cdot \chi_m((v,1)))\, dv\, dr \geq$$

$$\geq \mathrm{const} \cdot \{\int_{\mathrm{U}} |F(t)|^q\, dt\}^{s(p-1)} \cdot \int_W dv \cdot \int_{R/a}^{+\infty} r^{n-1} \cdot e^{p s \varepsilon/2 \cdot r}\, dr.$$

Следовательно,

$$\int_{\mathrm{U}} |F(t)|^q\, dt = 0, \tag{2.29}$$

т.е. $F(t) = 0$ почти всюду на U. Таким образом, мы получили, что для произвольной точки $t_0 \in \mathbb{R}^n \setminus V^*$ существует её окрестность $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus V^*$, в которой $F = 0$ п.в. Следовательно, $F = 0$ п.в. на $\mathbb{R}^n \setminus V^*$. Лемма доказана.

2.3. Наконец, докажем следующее важное утверждение.

Лемма 2.4. *Пусть $\{\varphi_m(\tau)\}_1^l$ – произвольные функции из C_+. Допустим, что функции φ_m удовлетво- ряют условию (Б), а функции $\tilde{\varphi}_m$ – условию (Д).*

Для $\lambda \in V$ и $\delta \in (0,+\infty)$, $\alpha \in [0,+\infty)$ функция

$$\eta(t) \stackrel{def}{=} \frac{e^{-[\lambda,t]}}{[\gamma_V^*(\delta \cdot t)]^\alpha}, \; t \in IntV^*, \tag{2.30}$$

принадлежит пространствам $L^p(\mathrm{Int}\ V^*)$ при всех $0 < p < +\infty$.

Доказательство. При фиксированном $p \in (0,+\infty)$ положим

$$J = \int_{\mathrm{Int}\ V^*} [\eta(t)]^p \, dt = \frac{1}{\delta^n} \cdot \int_{\mathrm{Int}\ V^*} \frac{e^{-[y,t]}}{[\gamma_V^*(t)]^{p\alpha}} \, dt, \tag{2.31}$$

где $y = p/\delta \cdot \lambda \in V$. Согласно предложению 2.2 имеем:

$$\frac{1}{[\gamma_V^*(t)]^{p\alpha}} = \mathrm{const} \cdot \frac{\prod_{m=1}^{l} [\chi_m^*(t)]^{p\alpha/2 \cdot M_{l-m+1}}}{\prod_{m=1}^{l} [\widetilde{\varphi}_m^*(\chi_{l-m+1}^*(t))]^{p\alpha}}. \tag{2.32}$$

Затем введем функции

$$\Psi_m(\tau) = \frac{\tau^{p\alpha/2 \cdot M_{l-m+1}}}{[\widetilde{\varphi}_{l-m+1}^*(\tau)]^{p\alpha}}, \; \tau \in (0,+\infty), \tag{2.33}$$

так что (см. следствие 2.1)

$$\widetilde{\Psi}_m(\tau) = \frac{\tau^{(p\alpha+1)/2 \cdot M_{l-m+1}}}{[\widetilde{\varphi}_{l-m+1}^*(\tau)]^{p\alpha}}, \; \tau \in (0,+\infty). \tag{2.34}$$

Очевидно, функции $\widetilde{\varphi}_m$ обладают свойствами (Б) и (Д). Поэтому, в силу (2.33) и предложения 1.2(б) работы [15], функции Ψ_m непрерывны и положительны. Кроме того, согласно предложению 1.2(в) работы [15], для любого $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{[\widetilde{\varphi}_{l-m+1}^*(\tau)]^{p\alpha}} \le \mathrm{const} \cdot e^{\varepsilon p \alpha \tau}, \quad \tau \in (0,+\infty) \tag{2.35}$$

Комбинируя (2.33) - (2.35), получаем что функции $\{\widetilde{\Psi}_m(\tau)\}_1^l$, $\tau \in (0,+\infty)$ обладают свойствами (Б) и (Д). Следовательно, $0 < \widetilde{\Psi}_m^*(x) < +\infty$, $x \in (0,+\infty)$, $(1 \le m \le l)$. Мы также имеем

$$\frac{1}{[\gamma_V^*(t)]^{p\alpha}} = \mathrm{const} \cdot \prod_{m=1}^{l} \Psi_m(\chi_m^*(t)), \; t \in \mathrm{Int}\ V^*. \tag{2.36}$$

Применяя следствие 2.2 и (2.36), получим

$$J = \mathrm{const} \cdot y^{-N/2} \cdot \prod_{m=1}^{l} \widetilde{\Psi}_m^*(\chi_{l-m+1}(y)). \tag{2.37}$$

А это влечет, что $J < +\infty$ и доказательство завершено.

§3. ОСНОВНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

3.1. Через $H^p_{s,\gamma}(T_V)$ обозначим пространство голоморфных в трубчатой области $T_V \subset \mathbb{C}^n$ функций f, для которых $M^p_{s,\gamma}(f) < +\infty$.

Преобразование Фурье некоторой функции $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ определим как

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \cdot e^{-i[t,x]}\, d\nu(x), \quad t \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Комбинируя леммы 2.2 и 2.3 с теоремой 2 работы [14] или с теоремами 2.3, 2.5 диссертации [13] (см. также [15], §0, теорема 11), получаем следующий результат типа Винера–Пэли.

Теорема 3.1. *Пусть $\{\varphi_m(\tau)\}_1^l$ – произвольные функции из C_+, удовлетворяющие условию (B). Если $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$, $1 \le p \le 2$, $0 < s < +\infty$, то*

$$f(z) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{V^*} F(t) \cdot e^{i[z,t]}\, d\nu(t), \quad z \in T_V, \tag{3.2}$$

где

1. При $p = 1$ функция $F(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ непрерывна и удовлетворяет условиям

$$F(t) \equiv 0, \qquad t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*, \tag{3.3}$$

$$\sup_{t \in V^*} \{|F(t)|^s \cdot \gamma_V^*(s \cdot t)\} \le \frac{M^1_{s,\gamma}(f)}{(2\pi)^{n/2 \cdot s}} < +\infty. \tag{3.4}$$

2. При $1 < p \le 2$ функция $F(t)$, $t \in V^*$ измерима и удовлетворяет условию

$$\int_V \left\{ \int_{V^*} |F(t)|^q \cdot e^{-q[y,t]}\, d\nu(t) \right\}^{s(p-1)} \cdot \gamma(y)\, d\nu(y) \le$$
$$\le \frac{M^p_{s,\gamma}(f)}{(2\pi)^{n/2 \cdot s(2-p)}} < +\infty, \quad (q = p/(p-1)). \tag{3.5}$$

Кроме того, для почти всех $y \in V$ справедливо следующее равенство:

$$f_y(t) = \begin{cases} F(t) \cdot e^{-[y,t]}, & t \in V^*, \\ 0, & t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*, \end{cases} \tag{3.6}$$

где $f_y(x) \equiv f(x + iy)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

При $p = 2$ интегральное представление (3.2) класса $H^p_{s,\gamma}(T_V)$ является параметрическим, т.е. $H^2_{s,\gamma}(T_V)$ совпадает с множеством функций $f(z)$, задаваемых формулой (3.2), где $F(t)$, $t \in V^*$ – произвольная измеримая функция, удовлетворяющая условию (3.5) (для $p = q = 2$). Кроме того, в этом

случае выполняется равенство Парсеваля

$$M^2_{s,\gamma}(f) = \int_V \left\{ \int_{V^*} |F(t)|^2 \cdot e^{-2[y,t]}\, d\nu(t) \right\} \gamma(y)\, d\nu(y). \tag{3.7}$$

3.2. Всюду далее предполагается, что функции φ_m обладают свойством (А), а функции $\tilde{\varphi}_m$ обладают свойством (Д).

Для произвольных $z \in T_V$ и $v \in V$ положим:

$$R_{z,v}(t) = \begin{cases} 0, & t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*, \\ (2\pi)^{n/2} \cdot \frac{e^{i[z+iv,t]}}{\gamma^*_V(2\cdot t)}, & t \in V^*. \end{cases} \tag{3.8}$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z,w) = \int_{\mathrm{Int}\, V^*} \frac{e^{i[z-\overline{w},t]}}{\gamma^*_V(2\cdot t)}\, d\nu(t),\ z, w \in T_V. \tag{3.9}$$

На основании Леммы 2.4 непосредственно получается

Лемма 3.1. (а) *Интеграл (3.9) абсолютно сходится при любых $z, w \in T_V$; функция $\Phi(z,w)$ голоморфна по z и антиголоморфна по w.*

(б) Для любых фиксированных $z \in T_V$ и $v \in V$ функция $R_{z,v}(t), t \in \mathbb{R}^n$ принадлежит $L^p(\mathbb{R}^n)$ при всех $0 < p < +\infty$. При этом $\Phi(z, u+iv)$, как функция от $u \in \mathbb{R}^n$ является преобразованием Фурье функции $R_{z,v}(t)$.

Замечание. Пусть константы c и c_* определяются из соотношений $d\nu(t) = c\, dt$ и $d\nu_*(t) = c_*\, dt$ соответственно. Кроме того, введем следующие функции:

$$\Psi_m(\tau) = \frac{\tau^{M_{l-m+1}/2}}{\tilde{\varphi}^*_{l-m+1}(\tau)}, \quad \tilde{\Psi}_m(\tau) = \Psi_m(\tau) \cdot \tau^{M_{l-m+1}/2},\ \tau \in (0, +\infty), (1 \le m \le l).$$

Комбинируя формулы (3.9), (2.15) и (2.17), получаем

$$\Phi(z,z) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{c}{c_*} \cdot \left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^{-N/2} \cdot \prod_{m=1}^{l} \tilde{\Psi}^*_m \left(\chi_{l-m+1}\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)\right), \quad z \in T_V. \tag{3.10}$$

Из (3.10) вытекает (по крайней мере, формально)

$$\Phi(z,w) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{c}{c_*} \cdot \left(\frac{z-\overline{w}}{2i}\right)^{-N/2} \cdot \prod_{m=1}^{l} \tilde{\Psi}^*_m \left(\chi_{l-m+1}\left(\frac{z-\overline{w}}{2i}\right)\right), \quad z, w \in T_V. \tag{3.11}$$

Заметим далее, что функции $\tilde{\Psi}_m$ $(1 \le m \le l)$ обладают свойствами (Б) и (Д), в чем можно убедиться, рассуждая так же, как и при доказательстве леммы

2.4. Следовательно, функции $\tilde{\Psi}^*_m$ допускают аналитическое продолжение с полуоси $(0,+\infty)$ в правую полуплоскость. Поэтому формула (3.11) в предположении, что $\operatorname{Re}\chi_m(z) > 0$ при $\operatorname{Re} z \in V$, действительно верна. Однако автору не ясно, насколько правомерно такое предположение. Из работы [6] нам известно лишь, что $\chi_m(z) \neq 0$ при $\operatorname{Re} z \in V$.

Наш основной результат следующий:

Теорема 3.2. *Пусть $\{\varphi_m(\tau)\}_1^l$ – функции из C_+. Допустим, что функции φ_m удовлетворяют условию (A), а функции $\tilde{\varphi}_m$ удовлетворяют условию (Д). Пусть ядро $\Phi(z,w)$ определено по формуле (3.9). Допустим, наконец, что $1 \le p \le 2$ и либо*

(а) $1/p \le s \le 2/p$,

либо

(б) $1/p \le s \le 1/(p-1)$, но при этом функции φ_m обладают дополнительно свойством (E).

Тогда каждая функция $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$ допускает представление

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_{T_V} f(w) \cdot \Phi(z,w) \cdot \gamma(v)\, d\nu(u)\, d\nu(v), \quad z \in T_V \ (w = u + iv), \tag{3.12}$$

причем интеграл абсолютно сходится при каждом $z \in T_V$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$ и $z = x + iy \in T_V$. Предполагая, что интеграл в правой части (3.12) абсолютно сходится, мы в силу теоремы 3.1 и леммы 3.1 имеем:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_{T_V} f(w) \cdot \Phi(z,w) \cdot \gamma(v)\, d\nu(u)\, d\nu(v) = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_V \gamma(v) \int_{\mathbb{R}^n} f_v(u) \cdot \Phi(z, u+iv)\, d\nu(u)\, d\nu(v) = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_V \gamma(v) \int_{\mathbb{R}^n} f_v(u) \cdot R_{z,v}(u)\, d\nu(u)\, d\nu(v) = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_V \gamma(v) \int_{\mathbb{R}^n} f_v(t) \cdot R_{z,v}(t)\, d\nu(t)\, d\nu(v) = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\operatorname{Int} V^*} F(t) \cdot e^{i[z,t]} \cdot \frac{1}{\gamma^*_V(2t)} \int_V e^{-2[v,t]} \gamma(v)\, d\nu(v)\, d\nu(t) = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\operatorname{Int} V^*} F(t) \cdot e^{i[z,t]}\, d\nu(t) = f(z).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Остаётся убедиться в конечности интеграла

$$I(z) = \int_{T_V} |f(w)| \cdot |\Phi(z,w)| \cdot \gamma(v)\, d\nu(u)\, d\nu(v) = \\ = \int_V \gamma(v) \int_{\mathbb{R}^n} |f_v(u)| \cdot |\Phi(z, u+iv)|\, d\nu(u)\, d\nu(v). \tag{3.14}$$

Используем для оценки внутреннего интеграла в (3.14) интегральное неравенство Гёльдера, лемму 3.1 (б) и теорему Хаусдорфа–Юнга. Тогда

$$I(z) \leq \text{ const } \cdot J, \quad J = \int_V \tilde{f}(v) \cdot \tilde{R}(v) \cdot \gamma(v)\, d\nu(v), \tag{3.15}$$

где

$$\tilde{f}(v) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_v(u)|^p\, d\nu(u) \right)^{1/p}, \quad v \in V, \tag{3.16}$$

$$\tilde{R}(v) = \left(\int_{\operatorname{Int} V^*} \frac{e^{-p[y+v,t]}}{[\gamma_V^*(2t)]^p}\, d\nu(t) \right)^{1/p}, \quad v \in V. \tag{3.17}$$

Итак, достаточно установить конечность интеграла J. Заметим, что условие $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$ влечет

$$\int_V [\tilde{f}(v)]^{ps} \cdot \gamma(v)\, d\nu(v) < +\infty. \tag{3.18}$$

Далее, введем меру

$$d\mu(t) = \frac{e^{-p[y,t]}}{[\gamma_V^*(2t)]^p}\, d\nu(t), \quad t \in \operatorname{Int} V^*. \tag{3.19}$$

В силу леммы 2.4,

$$\mu_0 = \int_{\operatorname{Int} V^*} d\mu(t) < +\infty. \tag{3.20}$$

Из (3.17) имеем:

$$[\tilde{R}(v)]^p = \int_{\operatorname{Int} V^*} e^{-p[v,t]}\, d\mu(t), \quad v \in V. \tag{3.21}$$

В частности,

$$\sup_{v \in V} [\tilde{R}(v)] < +\infty. \tag{3.22}$$

Далее, если $s = 1/p$, то из соотношений (3.18) и (3.22) следует $J < +\infty$. Допустим теперь, что $s > 1/p$ и что $1/ps + 1/r = 1$. Ввиду интегрального неравенства Гёльдера достаточно показать, что

$$J_1 = \int_V [\tilde{R}(v)]^r \cdot \gamma(v)\, d\nu(v) < \infty. \tag{3.23}$$

Поскольку $r/p \geq 1$, то, применяя к (3.21) интегральное неравенство Йенсена, получим

$$[\tilde{R}(v)]^r \leq (\mu_0)^{r/p-1} \cdot \int_{\mathrm{Int}\, V^*} e^{-r[v,t]}\, d\mu(t), \quad v \in V. \tag{3.24}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \text{ const } \cdot \int_{\mathrm{Int}\, V^*} \gamma_V^*(r \cdot t)\, d\mu(t) = \\ &= \text{ const } \cdot \int_{\mathrm{Int}\, V^*} e^{-p[y,t]} \cdot \frac{\gamma_V^*(r \cdot t)}{[\gamma_V^*(2t)]^p}\, d\nu(t). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Как следует из предложения 2.2, при всех $t \in \mathrm{Int}\, V^*$

$$\gamma_V^*(\delta \cdot t) = \text{ const } \cdot (\delta \cdot t)^{-M^*/2} \cdot \prod_{m=1}^{l} \tilde{\varphi}_m^*(\delta \cdot \chi_{l-m+1}^*(t)), \quad \forall \delta > 0. \tag{3.26}$$

Заметим, что в случае (а) мы имеем $r \geq 2$. Что же касается случая (б), то здесь уже неравенство $r \geq 2$, вообще говоря, неверно. Но в этом случае функции φ_m и $\tilde{\varphi}_m$ удовлетворяют дополнительному условию (E). В любом случае из (3.26) и предложения 1.2 (г,д) работы [15] или предложения 2.4 (д,е) диссертации [13] следует неравенство

$$\gamma_V^*(r \cdot t) \leq \text{ const } \cdot \gamma_V^*(2 \cdot t), \quad t \in \mathrm{Int}\, V^*. \tag{3.27}$$

Наконец, комбинируя (3.25) и (3.27) с леммой 2.4, получаем:

$$J_1 \leq \int_{\mathrm{Int}\, V^*} \frac{e^{-p[y,t]}}{[\gamma_V^*(2 \cdot t)]^{p-1}}\, d\nu(t) < +\infty,$$

что и завершает доказательство.

Замечание. Частный случай теоремы 3.2 (когда конус V самосопряженный, $p = 2$, $s = 1$, а функции $\{\varphi_m(\tau)\}_1^l$, $\tau \in (0, +\infty)$ суть специальные степенные функции) следует из одного результата Р. Р. Койфмана и Р. Рохберга [17].

ABSTRACT. The present paper considers classes of functions $f(z) \equiv f(x+iy)$ holomorphic in tube domains $T_V = \{z = x+iy \in \mathbf{C}^n : x \in \mathbb{R}^n, y \in V\}$ and satisfying the condition $\int_V \{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+iy)|^p\, dx\}^s \gamma(y)\, dy < +\infty$, $(0 < p, s < +\infty)$. Here V is an affine-homogeneous sharp open convex cone of rank

$l \geq 1$ in $\mathbb{R}^n$ i.e. $V = \{y \in \mathbb{R}^n : \chi_m(y) > 0, \quad (1 \leq m \leq l)\}$, where $\chi_m (1 \leq m \leq l)$ are rational functions canonically associated with cone V, while $\gamma(y) > 0$ is a weight function of the form $\gamma(y) \equiv \prod_{m=1}^{l} \varphi_m(\chi_m(y)), \quad y \in V$, where $\varphi_m(\tau)$ $(1 \leq m \leq l)$ are positive and continuous and $\tau \in (0, +\infty)$. For $1 \leq p \leq 2$, we find certain conditions on parameter s and functions $\varphi_m \quad (1 \leq m \leq l)$ which guarantee the existence of Paley–Wiener type integral representations and of reproducing kernels for our classes of holomorphic functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Paley, N. Wiener, Fourier Transforms in the Complex Domain. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 19, Amer. Math. Soc., New York, 1934.
2. Н. Винер, Р. Пэли. Преобразование Фурье в комплексной области, М., Наука, 1964.
3. S. Bochner, "Group invariance of Cauchy's formula in several variables," Ann. Math., том 45, № 4, стр. 686 – 707, 1944.
4. М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян, "Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла", ДАН СССР, том 120, № 3, стр. 457 – 460, 1958.
5. М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Наука, 1966.
6. С. Г. Гиндикин, "Анализ в однородных областях", Успехи Мат. Наук, том 19, № 4, стр. 3 – 92, 1964.
7. М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян, "Интегральные представления некоторых классов функций, голоморфных в полосе или в полуплоскости", ДАН СССР, том 283, № 5, стр. 1054 – 1057, 1985.
8. M. M. Dzhrbashyan, V. M. Martirosian, "Integral representations for some classes of functions holomorphic in a strip or in a half-plane", Analysis Math., том 12, № 3, стр. 191 – 212, 1986.
9. T. G. Genchev, "Paley–Wiener type theorems for functions holomorphic in half-plane," Докл. Болг. Акад. Наук, том 37, № 2, стр. 141 – 144, 1983.
10. T. G. Genchev, "Integral representations for functions holomorphic in tube domains," Докл. Болг. Акад. Наук, том 37, стр. 717 – 720, 1984.
11. T. G. Genchev, "Paley–Wiener type theorems for functions in Bergman spaces over tube domains," J. Math. Anal. Appl., том 118, № 2, стр. 496 – 501, 1986.
12. S. Saitoh, "Fourier–Laplace transform in Bergman spaces," Proc. Amer. Math. Soc., том 102, № 4, стр. 985 – 992, 1988.
13. А. О. Карапетян, "Некоторые вопросы интегральных представлений в многомерном комплексном анализе", Кандидат. диссертация, Ереван, 1987.
14. А. О. Карапетян, "Интегральные представления в трубчатых областях", Изв. АН Арм.ССР, Математика, том 23, № 1, стр. 91 – 96, 1988.
15. А. О. Карапетян, "Интегральные представления весовых пространств функций, голоморфных в трубчатых областях", Изв. АН Арм.ССР, Математика, том 25, № 4, стр. 315 – 332, 1990.
16. А. О. Карапетян, "Интегральные представления голоморфных функций в радиальных трубчатых областях", Инст. Мат. АН Армении, Ереван, 1990, 40 стр. (Рукоп. деп. в АрмНИИНТИ, 16.11.1990, № 49 – Ар 90).
17. R. R. Coifman, R. Rochberg, " Representations theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p," Astérisque, том 77, стр. 11 – 66, 1980.

4. Февраля 1992

Институт Математики АН Армении