

МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И МНОГОМЕРНАЯ ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ

Ф. А. Талалаян

Известия Академии Наук Армении. Математика,
том 27, № 2, 1992

В работе в n -мерном случае доказана вторая теорема о среднем значении в форме Бонне и в форме Дю Буа-Раймонда. Выделены некоторые свойства n -мерных разностей и n -мерных функций многих переменных.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена доказательству n -мерной второй теоремы о среднем значении в форме Бонне (Теорема 3.8) и в форме Дю Буа-Раймонда (Теорема 3.9). При условиях интегрируемости по Риману функции f Теорема 3.8 была доказана Г. Харди [1] и В. Юнгом [2] (см. также [3], §426). Методы, предложенные в [1] и [2], не могут быть использованы в нашем случае, когда функция f предполагается интегрируемой по Лебегу. Теорема 3.9 является естественным n -мерным обобщением второй теоремы о среднем значении Дю Буа-Раймонда. Классическая одномерная формула - особый случай нашей общей формулы (3.15).

В §2 мы докажем несколько лемм о n -мерных разностях. Некоторые из них могут быть интересны с точки зрения теории монотонных функций многих переменных и функций ограниченной вариации.

В §3 рассмотрим функции многих переменных, которые монотонны в смысле Юнга [2]. Сформулируем и докажем несколько новых свойств таких функций, напомним свойство существования двойных пределов (Лемма 3.5). Для $n = 2$ Лемма 3.5 была доказана Юнгом [4] (см., также [3], §307). Существование двойных пределов для широкого класса функций доказано Б.И. Голубовым. Основными результатами работы являются Теоремы 3.8 и 3.9.

Используем следующие термины и обозначения :

N — множество всех положительных целых, N^n - декартово произведение n копий N ,

R^n — n -мерное евклидово пространство, $\bar{x} \in R^n$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Как обычно, положим

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n), \lambda \bar{a} = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n), \bar{a} \bar{b} = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n),$$

$$\min(\bar{a}, \bar{b}) = (\min(a_1, b_1), \dots, \min(a_n, b_n)),$$

$$\max(\bar{a}, \bar{b}) = (\max(a_1, b_1), \dots, \max(a_n, b_n)),$$

$$|\bar{a}| = |a_1| + \dots + |a_n|, \bar{0} = (0, \dots, 0), \bar{1} = (1, \dots, 1), \bar{2} = (2, \dots, 2).$$

Обозначение $\bar{a} < \bar{b}$ ($\bar{a} \leq \bar{b}$) означает $a_i < b_i$ ($a_i \leq b_i$) при $i = 1, \dots, n$.

Под сегментом в R^n всюду понимаем сегмент с ребрами, параллельными координатным осям. Любой n -мерный сегмент J может быть описан двумя точками $\bar{a}$ и $\bar{b}$ такими, что $a_i \neq b_i$ для $i = 1, \dots, n$, и

$$J = \{\bar{x} \in R^n : \min(a_i, b_i) \leq x_i \leq \max(a_i, b_i); i = 1, \dots, n\}. \quad (1.1)$$

Мы будем писать кратко $J = [\bar{a}, \bar{b}]$.

Вершины сегмента J , определенные согласно (1.1), это те точки $\bar{v} \in R^n$, для которых либо $v_i = a_i$, либо $v_i = b_i$, при $i = 1, \dots, n$. Множество вершин сегмента J обозначим через $\text{vert}(J)$. Очевидно, $J = [\bar{u}, \bar{v}]$ для любых двух вершин $\bar{u}, \bar{v} \in \text{vert}(J)$ таких, что $u_i \neq v_i$, при $i = 1, \dots, n$. Такие вершины назовем взаимно противоположными. Точки $\min(\bar{a}, \bar{b})$ и $\max(\bar{a}, \bar{b})$ назовем левой и правой вершинами сегмента $[\bar{a}, \bar{b}]$, соответственно.

$Q^n = [\bar{0}, \bar{1}]$ - n -мерный единичный куб.

Для n -мерного сегмента $J = [\bar{a}, \bar{b}]$ и $\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)$ точка

$$v(J, \bar{\alpha}) = (\bar{1} - \bar{\alpha}) \min(\bar{a}, \bar{b}) + \bar{\alpha} \max(\bar{a}, \bar{b}) \quad (1.2)$$

также является вершиной J , ее назовем $\bar{\alpha}$ -вершиной J . Очевидно, для любого $\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)$ точки $v(J, \bar{\alpha})$ и $v(J, \bar{1} - \bar{\alpha})$ являются взаимно противоположными вершинами J . Более того, $v(J, \bar{0})$ - левая, а $v(J, \bar{1})$ - правая вершина сегмента J .

Пусть $1 \leq k \leq n$ и $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ - положительные целые, $\bar{a}, \bar{b} \in R^n$ такие, что $a_i \neq b_i$, если $i = i_1, \dots, i_k$, а $a_i = b_i$, если $i \neq i_1, \dots, i_k$. Тогда сегмент

J , определенный согласно (1.1), назовем k -мерным сегментом со свободными координатами. Координаты разности из $i_1, \dots, i_k$ назовем фиксированными.

Обозначим через $\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}$ — n -вектор с координатами

$$(\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k})_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = i_1, \dots, i_k \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

k -мерную грань n -мерного сегмента J , касательную к вершине $v(J, \bar{\alpha})$ обозначим через

$$\bar{\theta}^{i_1, \dots, i_k}(J, \bar{\alpha}) = [v(J, \bar{\alpha}), v(J, \bar{\alpha}) + \bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}(v(J, \bar{1} - \bar{\alpha}) - v(J, \bar{\alpha}))], \quad (1.3)$$

где $i_1, \dots, i_k$ означает свободные координаты грани.

Для любых $\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)$ и $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ множество

$$q(\bar{\alpha}, \bar{x}) = \{\bar{x} + \bar{t}(1 - 2\bar{\alpha}) : \bar{t} > 0\} \quad (1.4)$$

называется $\bar{\alpha}$ -квадрантом с вершиной в $\bar{x}$.

Если f — функция, определенная в некоторой окрестности точки $\bar{x}$, то величина

$$(l_{\bar{\alpha}} f)(\bar{x}) = \lim_{0 < \bar{t} \rightarrow 0} f(\bar{x} + \bar{t}(1 - 2\bar{\alpha})) \quad (1.5)$$

называется (если существует) $\bar{\alpha}$ -двойным пределом функции f в точке $\bar{x}$.

Пусть J — n -мерный сегмент, f — функция на J и $\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)$. Величина

$$\Delta_n(f; J, \bar{\alpha}) = \sum_{\bar{\gamma} \in \text{vert}(Q^n)} (-1)^{n-|\bar{\alpha}-\bar{\gamma}|} f(v(J, \bar{\gamma})) \quad (1.6)$$

называется n -мерной разностью функции f на J относительно $\bar{\alpha}$ (эквивалентно, относительно $v(J, \bar{\alpha})$).

Заметим, что если f — функция $m < n$ переменных, то

$$\Delta_n(f; J) = 0.$$

Пусть $I \subset J$ — k -мерный сегмент со свободными координатами $i_1, \dots, i_k$, f — функция от n переменных. Величина

$$\Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; I, \bar{\alpha}) = \sum_{\bar{\gamma} \in \text{vert}(\bar{\theta}^{i_1, \dots, i_k}(Q^n, \bar{\alpha}))} (-1)^{k-|\bar{\alpha}-\bar{\gamma}|} f(v(J, \bar{\alpha})) \quad (1.7)$$

называется k -мерной разностью функции f в $i_1, \dots, i_k$ на I относительно $\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)$ (эквивалентно, относительно $v(J, \bar{\alpha})$). Мы опускаем указание вершины, если разность берется в левой вершине сегмента (т.е. относительно $\bar{0}$).

Заметим, что

$$\Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; I, \bar{\alpha}) = \sum_{\substack{\bar{\gamma} \in \text{vert}(Q^n) \\ \gamma_i = 0, i \neq i_1, \dots, i_k}} (-1)^{k - |\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k} \bar{\alpha} - \bar{\gamma}|} f(v(I, \bar{\gamma})). \quad (1.8)$$

Произвольная система точек

$$\left\{ a_i = t_0^{(i)} < t_1^{(i)} < \dots < t_{m_i}^{(i)} = b_i; \quad i = 1, \dots, n \right\} \quad (1.9)$$

называется разбиением сегмента J с левой и правой вершинами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Для разбиения (1.9) положим

$$\bar{t}_{\bar{z}} = (t_{z_1}^{(1)}, \dots, t_{z_n}^{(n)}), \quad \bar{0} \leq \bar{z} \leq \bar{m} \quad (1.10)$$

и

$$\bar{\tau}_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\bar{t}_{\bar{z}-\bar{1}} + \bar{t}_{\bar{z}}), \quad \bar{1} \leq \bar{z} \leq \bar{m}, \quad (1.11)$$

где $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n)$, $\bar{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{N}^n$.

Далее, для любой вершины $\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)$ положим

$$\bar{t}_{\bar{\alpha}, \bar{z}} = t_{(\bar{1}-\bar{\alpha})\bar{z} + \bar{\alpha}(\bar{m}-\bar{z})}, \quad \bar{0} \leq \bar{z} \leq \bar{m} \quad (1.12)$$

и

$$\bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{z}} = \frac{1}{2}(\bar{t}_{\bar{\alpha}, \bar{z}-\bar{1}} + \bar{t}_{\bar{\alpha}, \bar{z}}), \quad \bar{1} \leq \bar{z} \leq \bar{m}. \quad (1.13)$$

Заметим, что

$$\bar{t}_{\bar{\alpha}, \bar{z}-\bar{1}} = v([\bar{t}_{\bar{\alpha}, \bar{z}-1}, \bar{t}_{\bar{\alpha}, \bar{z}}], \bar{\alpha}), \quad \bar{t}_{\bar{\alpha}, 0} = \bar{t}_{\bar{\alpha} \bar{m}}, \quad \bar{t}_{\bar{\alpha}, \bar{m}} = \bar{t}_{(\bar{1}-\bar{\alpha}) \bar{m}} \quad (1.14)$$

и

$$\bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{z}} = \frac{1}{2} \left((\bar{1} - \bar{\alpha})(\bar{t}_{\bar{z}-\bar{1}} + \bar{t}_{\bar{z}}) + \bar{\alpha}(\bar{t}_{\bar{m}-(\bar{z}-\bar{1})} + \bar{t}_{\bar{m}-\bar{z}}) \right). \quad (1.15)$$

В обозначениях (1.9) и (1.10) имеем

$$\Delta_n(f; J) = \sum_{\bar{z}=1}^{\bar{m}} \Delta_n(f; [\bar{t}_{\bar{z}-1}, \bar{t}_{\bar{z}}]). \quad (1.16)$$

Для любого $\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)$ определим отображение $\bar{x} \rightarrow \bar{\alpha} * \bar{x}$, переводящее n -мерный сегмент J на себя :

$$\bar{\alpha} * \bar{x} = (\bar{1} - \bar{\alpha})\bar{x} + \bar{\alpha}(v(J, \bar{0}) + v(J, \bar{1}) - \bar{x}). \quad (1.17)$$

Для произвольной функции f на J определим новую функцию $f_{\bar{\alpha}}$ следующим образом :

$$f_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) = f(\bar{\alpha} * \bar{x}), \quad \bar{x} \in J. \quad (1.18)$$

В заключение, заметим, что все гиперплоскости, используемые ниже в построениях, будут перпендикулярны координатным осям.

§2. ЛЕММЫ О РАЗНОСТЯХ

Лемма 2.1. Пусть J — k -мерный сегмент в $\mathbb{R}^n$ со свободными координатами $i_1, \dots, i_k$, и пусть f — функция от n переменных, определенная на J . Тогда для любых $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \text{vert}(Q^n)$

$$\Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; J, \bar{\alpha}) = (-1)^{|\delta^{i_1, \dots, i_k}(\bar{\alpha} - \bar{\beta})|} \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; J, \bar{\beta}). \quad (2.1)$$

В частности, при $k = n$

$$\Delta_n(f; J, \bar{\alpha}) = (-1)^{|\bar{\alpha} - \bar{\beta}|} \Delta_n(f; J, \bar{\beta}). \quad (2.2)$$

Доказательство. Равенство (2.1) легко проверяется : для любого $\bar{w} \in \text{vert}(J)$ сравним коэффициенты $f(\bar{w})$ в разложениях $\Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; J, \bar{\alpha})$ и $\Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; J, \bar{\beta})$ (см. (1.7)).

Лемма 2.2 Пусть J — n -мерный сегмент, f — функция от n переменных на J , $\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)$ и $\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k}\}$ — перестановки чисел $1, \dots, n$. Тогда

$$\Delta_n(f; J, \bar{\alpha}) = \Delta_{n-k}^{j_1, \dots, j_{n-k}} \left(\Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; J, \bar{\alpha}); J, \bar{\alpha} \right). \quad (2.3)$$

Доказательство. Имеем

$$\Delta_n(f; J, \bar{\alpha}) = \sum_{\bar{\nu} \in \text{vert}(Q^n)} (-1)^{n - |\bar{\alpha} - \bar{\nu}|} f(v(J, \bar{\nu})) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\substack{\gamma \in \text{vert}(Q^n) \\ \gamma_i = 0, i=1, \dots, i_k}} (-1)^{n-k-|\bar{\delta}^{j_1, \dots, j_{n-k}} \bar{\alpha} - \gamma|} \chi \\
 &\times \sum_{\substack{\beta \in \text{vert}(Q^n) \\ \beta_i = 0, i=j_1, \dots, j_{n-k}}} (-1)^{k-|\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k} \bar{\alpha} - \beta|} f(\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k} v(J, \beta) + \bar{\delta}^{j_1, \dots, j_{n-k}} v(J, \gamma)) = \\
 &= \sum_{\substack{\gamma \in \text{vert}(Q^n) \\ \gamma_i = 0, i=1, \dots, i_k}} (-1)^{n-k-|\bar{\delta}^{j_1, \dots, j_{n-k}} \bar{\alpha} - \gamma|} \chi \\
 &\times \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f(\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k} \bar{x} + \bar{\delta}^{j_1, \dots, j_{n-k}} v(J, \gamma)); J, \bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k} \bar{\alpha}) = \\
 &= \Delta_{n-k}^{j_1, \dots, j_{n-k}}(\Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; J, \bar{\delta}^{j_1, \dots, j_{n-k}} \bar{\alpha}); J, \bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k} \bar{\alpha}) = \\
 &= \Delta_{n-k}^{j_1, \dots, j_{n-k}}(\Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; J, \bar{\alpha}); J, \bar{\alpha}).
 \end{aligned}$$

Лемма 2.3. Пусть J — n — мерный сегмент, а f — функция на J . Тогда для любого $\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)$

$$\sum_{k=0}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; \bar{\theta}^{i_1, \dots, i_k}(J, \bar{\alpha}), \bar{\alpha}) = f(v(J, \bar{1} - \bar{\alpha})), \quad (2.4)$$

где при $k = 0$ положено $\bar{\theta}^{i_1, \dots, i_k}(J, \bar{\alpha}) = v(J, \bar{\alpha})$ и $\Delta_0(f; v(J, \bar{\alpha}), \bar{\alpha}) = f(v(J, \bar{\alpha}))$.

Доказательство. Левая часть (2.4) — сумма

$$\sum_{\gamma \in \text{vert}(Q^n)} c_\gamma f(v(J, \gamma)).$$

Ясно, что для $\bar{\gamma} = \bar{1} - \bar{\alpha}$ имеем $c_{\bar{\gamma}} = 1$. Покажем теперь, что $c_\gamma = 0$, если $\bar{\gamma} \neq \bar{1} - \bar{\alpha}$.

Пусть $|\bar{\alpha} - \bar{\gamma}| = m < n$ и

$$\gamma_i = \begin{cases} 1 - \alpha_i, & \text{если } i = j_1, \dots, j_m \\ \alpha_i, & \text{если } i \neq j_1, \dots, j_m. \end{cases}$$

Если $\{j_1, \dots, j_m\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\} \neq \emptyset$, то в разложении функции $\Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; \bar{\theta}^{i_1, \dots, i_k}(J, \bar{\alpha}), \bar{\alpha})$ член $f(v(J, \bar{\gamma}))$ отсутствует. В противном случае, $f(v(J, \bar{\gamma}))$ входит в то же разложение с коэффициентом $(-1)^{k-m}$. Теперь коэффициент при f в левой части равенства (2.4) оказывается

$$\sum_{k=m}^n \binom{n-m}{k-m} (-1)^{k-m} = \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-m}{k} (-1)^k = 0,$$

чем и завершается доказательство.

Лемма 2.4. Пусть f - функция на n -мерном сегменте J , $\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)$, и пусть $f_{\bar{\alpha}}$ - функция на J , определенная согласно (1.18). Тогда для любого k -мерного сегмента I k -мерной грани сегмента J со свободными координатами $i_1, \dots, i_k$ имеем

$$\Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; \bar{\alpha} * I, \bar{\alpha}) = \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f_{\bar{\alpha}}, I). \quad (2.5)$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $J = Q^n$. Имеем

$$f_{\bar{\alpha}}(v(I, \bar{\gamma})) = f(v(\bar{\alpha} * I, \bar{\alpha} * \bar{\gamma})), \quad \bar{\gamma} \in \text{vert}(Q^n). \quad (2.6)$$

Легко видеть, что отображение $\bar{\beta} \rightarrow \bar{\alpha} * \bar{\beta}$ является биекцией между $\text{vert}(\theta^{i_1, \dots, i_k}(Q^n, \bar{0}))$ и $\text{vert}(\theta^{i_1, \dots, i_k}(Q^n, \bar{\alpha}))$. Если $\bar{\gamma} \in \text{vert}(\theta^{i_1, \dots, i_k}(Q^n, \bar{\alpha}))$, то точка $\bar{\beta}$ с координатами $\beta_i = |\alpha_i - \gamma_i|$, $i = 1, \dots, n$ принадлежит $\text{vert}(\theta^{i_1, \dots, i_k}(Q^n, \bar{0}))$ и $\bar{\gamma} = \bar{\alpha} * \bar{\beta}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; \bar{\alpha} * I, \bar{\alpha}) &= \sum_{\bar{\gamma} \in \text{vert}(\theta^{i_1, \dots, i_k}(Q^n, \bar{\alpha}))} (-1)^{k-|\bar{\alpha}-\bar{\gamma}|} f(v(\bar{\alpha} * I, \bar{\gamma})) = \\ &= \sum_{\bar{\beta} \in \text{vert}(\theta^{i_1, \dots, i_k}(Q^n, \bar{0}))} (-1)^{k-|\bar{\alpha}-\bar{\alpha}*\bar{\beta}|} f(v(\bar{\alpha} * I, \bar{\alpha} * \bar{\beta})) = \\ &= \sum_{\bar{\beta} \in \text{vert}(\theta^{i_1, \dots, i_k}(Q^n, \bar{0}))} (-1)^{k-|\bar{\beta}|} f_{\bar{\alpha}}(v(I, \bar{\beta})) = \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f_{\bar{\alpha}}, I). \end{aligned}$$

Лемма 2.5. (Многомерное преобразование Абеля). Предположим, что $n, m_1, \dots, m_n > 1$ - целые, $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n)$, f и g - вещественные функции на $[\bar{1}, \bar{m}] \cap \mathbb{N}^n$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\bar{m}} f(\bar{z})g(\bar{z}) &= f(\bar{1}) \sum_{\bar{y}=\bar{1}}^{\bar{m}} g(\bar{y}) + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \times \\ &\times \sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\bar{1}+\delta^{i_1, \dots, i_k}(\bar{m}-2)} \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; [\bar{z}, \bar{z} + \delta^{i_1, \dots, i_k}]) \sum_{\bar{y}=\bar{z}+\delta^{i_1, \dots, i_k}}^{\bar{m}} g(\bar{y}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Доказательство. При $n = 1$ равенство (2.7) - одномерное преобразование Абеля:

$$\sum_{i=1}^{\bar{m}} f(i)g(i) = f(1) \sum_{j=1}^{\bar{m}} g(j) + \sum_{i=1}^{\bar{m}-1} (f(i+1) - f(i)) \sum_{j=i+1}^{\bar{m}} g(j). \quad (2.8)$$

Точки N^{n+1} можно записать в виде $(\bar{z}, z_{n+1})$, где $\bar{z} \in N^n$, $z_{n+1} \in N$.

Доказательство проведем индукцией по n . Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{(\bar{z}, z_{n+1})=(\bar{1}, 1)}^{(\bar{m}, m_{n+1})} f(\bar{z}, z_{n+1}) g(\bar{z}, z_{n+1}) = \sum_{z_{n+1}=1}^{m_{n+1}} \sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\bar{m}} f(\bar{z}, z_{n+1}) g(\bar{z}, z_{n+1}) = \\ & = \sum_{z_{n+1}=1}^{m_{n+1}} f(\bar{1}, z_{n+1}) \sum_{\bar{y}=\bar{1}}^{\bar{m}} g(\bar{y}, z_{n+1}) + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\bar{1}+\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}(\bar{m}-\bar{2})} \times \\ & \times \sum_{z_{n+1}=1}^{m_{n+1}} \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; [(\bar{z}, z_{n+1}), (\bar{z} + \bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}, z_{n+1})]) \sum_{\bar{y}=\bar{z}+\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}}^{\bar{m}} g(\bar{y}, z_{n+1}) = \end{aligned}$$

(согласно версии (2.8))

$$\begin{aligned} & = f(\bar{1}, \bar{1}) \sum_{y_{n+1}=1}^{m_{n+1}} \sum_{\bar{y}=\bar{1}}^{\bar{m}} g(\bar{y}, y_{n+1}) + \\ & + \sum_{z_{n+1}=1}^{m_{n+1}-1} (f(\bar{1}, z_{n+1}+1) - f(\bar{1}, z_{n+1})) \sum_{y_{n+1}=z_{n+1}+1}^{m_{n+1}} \sum_{\bar{y}=\bar{1}}^{\bar{m}} g(\bar{y}, y_{n+1}) + \\ & + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\bar{1}+\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}(\bar{m}-\bar{2})} \{ \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; [(\bar{z}, 1), (\bar{z} + \bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}, 1)]) \times \\ & \times \sum_{y_{n+1}=1}^{m_{n+1}} \sum_{\bar{y}=\bar{z}+\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}}^{\bar{m}} g(\bar{y}, y_{n+1}) + \sum_{z_{n+1}=1}^{m_{n+1}-1} \Delta_{k+1}^{i_1, \dots, i_k, n+1}(f; [(\bar{z}, z_{n+1}), (\bar{z}, z_{n+1}) + \\ & + (\bar{\delta}, \delta_{n+1})^{i_1, \dots, i_k, n+1}]) \sum_{y_{n+1}=z_{n+1}+1}^{m_{n+1}} \sum_{\bar{y}=\bar{z}+\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}}^{\bar{m}} g(\bar{y}, y_{n+1}) \} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = f(1, 1) \sum_{(\bar{y}, y_{n+1})=(\bar{1}, 1)}^{(\bar{m}, m_{n+1})} g(\bar{y}, y_{n+1}) + \\ & + \sum_{(\bar{z}, z_{n+1})=(\bar{1}, 1)}^{(1, 1)+(\bar{\delta}, \delta_{n+1})^{n+1}((\bar{m}, m_{n+1})-(\bar{2}, 2))} \Delta_1^{n+1}(f; [(\bar{z}, z_{n+1}), (\bar{z}, z_{n+1}) + \\ & + (\bar{\delta}, \delta_{n+1})^{n+1}]) \sum_{(\bar{y}, y_{n+1})=(\bar{z}, z_{n+1})+(\bar{\delta}, \delta_{n+1})^{n+1}}^{(\bar{m}, m_{n+1})} g(\bar{y}, y_{n+1}) + \\ & + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{(\bar{z}, z_{n+1})=(\bar{1}, 1)}^{(1, 1)+(\bar{\delta}, \delta_{n+1})^{i_1, \dots, i_k}((\bar{m}, m_{n+1})-(\bar{2}, 2))} \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; [(\bar{z}, z_{n+1}), (\bar{z}, z_{n+1}) + \\ & + (\bar{\delta}, \delta_{n+1})^{i_1, \dots, i_k}]) \sum_{(\bar{y}, y_{n+1})=(\bar{z}, z_{n+1})+(\bar{\delta}, \delta_{n+1})^{i_1, \dots, i_k}}^{(\bar{m}, m_{n+1})} g(\bar{y}, y_{n+1}) + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \times \\ & \times \sum_{(\bar{z}, z_{n+1})=(\bar{1}, 1)}^{(1, 1)+(\bar{\delta}, \delta_{n+1})^{i_1, \dots, i_k, n+1}((\bar{m}, m_{n+1})-(\bar{2}, 2))} \Delta_{k+1}^{i_1, \dots, i_k, n+1}(f; [(\bar{z}, z_{n+1}), (\bar{z}, z_{n+1}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\bar{\delta}, \delta_{n+1})^{i_1, \dots, i_k, n+1}]) \sum_{(\bar{y}, y_{n+1})=(\bar{z}, z_{n+1})+(\bar{\delta}, \delta_{n+1})^{i_1, \dots, i_k, n+1}}^{(\bar{m}, m_{n+1})} g(y, y_{n+1}) = \\
& = f(\bar{1}, 1) \sum_{(\bar{y}, y_{n+1})=(\bar{1}, 1)}^{(\bar{m}, m_{n+1})} g(\bar{y}, y_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n+1} \times \\
& \times \sum_{(\bar{z}, z_{n+1})=(\bar{1}, 1)}^{(\bar{1}, 1)+(\bar{\delta}, \delta_{n+1})^{i_1, \dots, i_k}((\bar{m}, m_{n+1})-(\bar{2}, 2))} \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; [(\bar{z}, z_{n+1}), (\bar{z}, z_{n+1})+ \\
& + (\bar{\delta}, \delta_{n+1})^{i_1, \dots, i_k}]) \sum_{(\bar{y}, y_{n+1})=(\bar{z}, z_{n+1})+(\bar{\delta}, \delta_{n+1})^{i_1, \dots, i_k}}^{(\bar{m}, m_{n+1})} g(\bar{y}, y_{n+1}).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Применяя (2.7) к $f(\bar{m} + 1 - \bar{z})$ и $g(\bar{m} + 1 - \bar{z})$, получим версию n -мерного преобразования Абеля

$$\begin{aligned}
\sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\bar{m}} f(\bar{z})g(\bar{z}) &= f(\bar{m}) \sum_{\bar{y}=\bar{1}}^{\bar{m}} g(\bar{y}) + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \times \\
& \times \sum_{\bar{z}=\bar{m}-\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}(\bar{m}-1)}^{\bar{m}-\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}} \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; [\bar{z} + \bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}, \bar{z}], \bar{z} + \bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}) \sum_{\bar{y}=\bar{1}}^{\bar{z}} g(\bar{y}). \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Теперь докажем другой вариант n -мерного преобразования Абеля.

Лемма 2.6. *Предположим, что $n, m_1, \dots, m_n > 1$ - целые, $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n)$, f и g - функции, определенные в точках сегментов $[\bar{1}, \bar{m}]$ и $[\bar{0}, \bar{m}]$, соответственно, с целыми координатами. Тогда*

$$\begin{aligned}
\sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\bar{m}} f(\bar{z})\Delta_n(\bar{g}; [\bar{z} - \bar{1}, \bar{z}]) &= (-1)^n \sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\bar{m}-\bar{1}} g(\bar{z})\Delta_n(f; [\bar{z}, \bar{z} + \bar{1}]) + \\
& + \sum_{\alpha \in \text{verl}(Q^n)} (-1)^{|\alpha|} \sum_{i=1}^n \sum_{\bar{z}=\bar{1}+\bar{\delta}^\alpha(\bar{\alpha}+(1-\bar{\alpha})\bar{m})}^{\bar{m}+\bar{\delta}^\alpha(\bar{\alpha}+(1-\bar{\alpha})\bar{m})} f(\bar{z})g(\bar{z} - \bar{\alpha}). \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Если, кроме того, функция g обращается в нуль на $(n-1)$ -мерной грани $[\bar{0}, \bar{m}]$, касающейся $\bar{0}$, то

$$\begin{aligned}
\sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\bar{m}} f(\bar{z})\Delta_n(\bar{g}; [\bar{z} - \bar{1}, \bar{z}]) &= f(\bar{m})g(\bar{m}) + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (-1)^k \times \\
& \times \sum_{\bar{z}=\bar{m}-\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}(\bar{m}-1)}^{\bar{m}-\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}} g(\bar{z})\Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; [\bar{z}, \bar{z} + \bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}]). \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\bar{m}} f(\bar{z}) \Delta_n(\bar{g}; [\bar{z} - \bar{1}, \bar{z}]) = \\
 & = \sum_{\bar{z}=\bar{2}}^{\bar{m}-\bar{1}} f(\bar{z}) \Delta_n(\bar{g}; [\bar{z} - \bar{1}, \bar{z}]) + \sum_{\bar{z} \in [\bar{1}, \bar{m}] \setminus [\bar{2}, \bar{m}-\bar{1}]} f(\bar{z}) \Delta_n(\bar{g}; [\bar{z} - \bar{1}, \bar{z}]) = \\
 & = \sum_{\bar{z}=\bar{2}}^{\bar{m}-\bar{1}} f(\bar{z}) \sum_{\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)} (-1)^{n-|\bar{\alpha}|} g(\bar{z} - \bar{1} + \bar{\alpha}) + \\
 & + \sum_{\bar{z} \in [\bar{1}, \bar{m}] \setminus [\bar{2}, \bar{m}-\bar{1}]} \sum_{\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)} (-1)^{n-|\bar{\alpha}|} g(\bar{z} - \bar{1} + \bar{\alpha}) = \\
 & = \sum_{\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)} (-1)^{|\bar{\alpha}|} \sum_{\bar{z}=\bar{2}}^{\bar{m}-\bar{1}} f(\bar{z}) g(\bar{z} - \bar{\alpha}) + \\
 & + \sum_{\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)} (-1)^{|\bar{\alpha}|} \sum_{\bar{z} \in [\bar{1}, \bar{m}] \setminus [\bar{2}, \bar{m}-\bar{1}]} f(\bar{z}) g(\bar{z} - \bar{\alpha}) = \\
 & = \sum_{\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)} (-1)^{|\bar{\alpha}|} \sum_{\bar{z}=\bar{2}}^{\bar{m}-\bar{1}} f(\bar{z}) g(\bar{z} - \bar{\alpha}) + \\
 & + \sum_{\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)} (-1)^{|\bar{\alpha}|} \sum_{\bar{z} \in [\bar{1}+\bar{\alpha}, \bar{m}-(\bar{1}-\bar{\alpha})] \setminus [\bar{2}, \bar{m}-\bar{1}]} f(\bar{z}) g(\bar{z} - \bar{\alpha}) + \\
 & + \sum_{\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)} (-1)^{|\bar{\alpha}|} \sum_{\substack{\bar{z} \in [\bar{1}, \bar{m}] \\ \bar{z} \notin [\bar{1}+\bar{\alpha}, \bar{m}-(\bar{1}-\bar{\alpha})]}} f(\bar{z}) g(\bar{z} - \bar{\alpha}) = \\
 & = \sum_{\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)} (-1)^{|\bar{\alpha}|} \sum_{\bar{z}=\bar{1}+\bar{\alpha}}^{\bar{m}-(\bar{1}-\bar{\alpha})} f(\bar{z}) g(\bar{z} - \bar{\alpha}) + \\
 & + \sum_{\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)} (-1)^{|\bar{\alpha}|} \sum_{\substack{\bar{z} \in [\bar{1}, \bar{m}] \\ \bar{z} \notin [\bar{1}+\bar{\alpha}, \bar{m}-(\bar{1}-\bar{\alpha})]}} f(\bar{z}) g(\bar{z} - \bar{\alpha}). \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно первую сумму после последнего знака равенства в (2.12).

Имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)} (-1)^{|\bar{\alpha}|} \sum_{\bar{z}=\bar{1}+\bar{\alpha}}^{\bar{m}-(\bar{1}-\bar{\alpha})} f(\bar{z}) g(\bar{z} - \bar{\alpha}) = (-1)^n \sum_{\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)} (-1)^{n-|\bar{\alpha}|} \sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\bar{m}-\bar{1}} f(\bar{z} + \bar{\alpha}) g(\bar{z}) = \\
 & = (-1)^n \sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\bar{m}-\bar{1}} g(\bar{z}) \sum_{\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)} (-1)^{n-|\bar{\alpha}|} f(\bar{z} + \bar{\alpha}) = (-1)^n \sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\bar{m}-\bar{1}} g(\bar{z}) \Delta_n(f; [\bar{z}; \bar{z} + 1]) \tag{2.13}
 \end{aligned}$$

Из (2.12) и (2.13) получим (2.10).

Применяя (2.9) к функциям $f(\bar{z})$ и $\Delta_n(g; [\bar{z} - \bar{1}, \bar{z}])$, получим (2.11).

Заметим, что для любого $\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)$

$$[\bar{1}, \bar{m}] \setminus [\bar{1} + \bar{\alpha}, \bar{m} - (\bar{1} - \bar{\alpha})] = \{z \in [1, \bar{m}] : \exists 1 \leq i \leq n (z_i = \alpha_i + (1 - \alpha_i) m_i)\}.$$

Поэтому в правой части (2.10) внутреннее суммирование ведется по всем точкам z с целыми координатами, которые принадлежат $(n-1)$ -мерной грани $z_i = \alpha_i + (1 - \alpha_i)m_i, i = 1, \dots, n$ сегмента $[\bar{l}, \bar{m}]$, имеющей общую вершину $(\alpha_1 + (1 - \alpha_1)m_1, \dots, \alpha_n + (1 - \alpha_n)m_n)$.

§3. МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ И ВТОРАЯ

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ

Определение 3.1. Функция f , определенная на n -мерном сегменте J , называется возрастающей на J , если для любых $k = 1, \dots, n$ и $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$

$$\Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; I) \geq 0, \quad (3.1)$$

где I - произвольный k -мерный сегмент k -мерной грани сегмента J со свободными координатами $i_1, \dots, i_k$.

Определение 3.2. Функция f , определенная на n -мерном сегменте J , называется монотонной, если для некоторого $\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)$

$$\Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; I, \bar{\alpha}) \geq 0, \quad (3.2)$$

где $k, i_1, \dots, i_k, I$ как в Определении 3.1. В этом случае мы говорим, что f возрастает относительно $v(J, \bar{\alpha})$.

Лемма 3.3. Для того, чтобы функция f , определенная на n -мерном сегменте J , была бы монотонной, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)$ функция $f_{\bar{\alpha}}$ возрастала на J .

Доказательство. Каждый сегмент I можно представить в виде $I = \bar{\alpha} * I'$, и утверждение следует из Леммы 2.4.

Лемма 3.4. Если f - возрастающая функция на n -мерном сегменте J , то f будет возрастающей на каждом сегменте размерности меньше чем n , являющемся сечением J некоторой плоскостью.

Доказательство. Пусть $J = [\bar{a}, \bar{b}]$ - n -мерный сегмент на R^n с левой вершиной $\bar{a}$ и правой вершиной $\bar{b}$. Сначала покажем, что для любого $(n-1)$ -мерного сечения S на J неравенство

$$\Delta_{n-1}(f; S_0) \geq 0 \quad (3.3)$$

справедливо для всех $(n - 1)$ -мерных сегментов $S_0 \subset S$. Здесь $(n - 1)$ -мерная разность берется относительно $n - 1$ свободных координат, определяющих S .

Тогда

$$S = \{\bar{x} \in J : x_{i_0} = t\},$$

где $1 \leq i_0 \leq n, a_{i_0} \leq t \leq b_{i_0}$ фиксированы, а $S_0 = [\bar{u}, \bar{v}]$, где $a_i \leq u_i < v_i \leq b_i$, при $i \neq i_0$ и $u_{i_0} = v_{i_0} = t$.

Пусть точки $\bar{c}$ и $\bar{d}$ имеют координаты

$$c_i = \begin{cases} u_i, & \text{если } i \neq i_0 \\ a_{i_0}, & \text{если } i = i_0 \end{cases}, \quad d_i = \begin{cases} v_i, & \text{если } i \neq i_0 \\ a_{i_0}, & \text{если } i = i_0 \end{cases}.$$

Тогда $c_i < d_i$, при $i \neq i_0$ и $(n - 1)$ -мерный сегмент $[\bar{c}, \bar{d}]$ принадлежит $(n - 1)$ -мерной грани сегмента J . Также имеем $c_i < v_i$ для всех $i = 1, \dots, n$, а n -мерный сегмент $[\bar{c}, \bar{d}] \subset J$.

Следовательно

$$\Delta_n(f; [\bar{c}, \bar{v}]) \geq 0, \quad \Delta_{n-1}(f; [\bar{c}, \bar{d}]) \geq 0. \quad (3.4)$$

С другой стороны, согласно Лемме 2.2

$$\Delta_n(f; [\bar{c}, \bar{v}]) = \Delta_{n-1}(f; [\bar{u}, \bar{v}]) - \Delta_{n-1}(f; [\bar{c}, \bar{d}]). \quad (3.5)$$

Из (3.4) и (3.5) следует (3.3).

Каждая $(k - 1)$ -мерная грань S' сегмента S есть пересечение некоторой k -мерной грани J' сегмента J и $(k - 1)$ -мерной плоскости. Ясно, что функция f - возрастающая на J' . Поэтому можно применить вышеприведенные аргументы к f, J', S' . Следовательно, функция f - возрастающая на каждом $(n - 1)$ -мерном сечении J .

Применяя аналогичные шаги, получаем требуемый результат для сечений произвольной размерности.

Лемма 3.5. Пусть f - монотонная функция на n -мерном сегменте J . Тогда в любой точке $\bar{x} \in J$ двойные пределы $(I_\alpha f)(\bar{x})$ существуют для всех $\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)$, удовлетворяющих условию $q(\bar{\alpha}, \bar{x}) \cap \text{int}(J) \neq \emptyset$.

Доказательство. В силу монотонности f на сегменте J разности

$$A = \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(f; \theta^{i_1, \dots, i_k}([\bar{x}, \bar{x} + \bar{t}(1 - 2\bar{\alpha})], \bar{x}), \bar{\alpha})$$

сохраняют постоянный знак для $\bar{t} > 0$. Следовательно, для всех $k = 1, \dots, n$ и $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$

$$\lim_{0 < \bar{t} \rightarrow 0} A = \begin{cases} \inf_{\bar{t} > 0} A, & \text{если } A \geq 0 \\ \sup_{\bar{t} > 0} A, & \text{если } A \leq 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Согласно 2.3, для всех $\bar{t} > 0$ имеем

$$f(\bar{x} + \bar{t}(1 - 2\bar{\alpha})) = \sum_{k=0}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} A. \quad (3.7)$$

В силу (3.6), все члены в правой части (3.7) стремятся к бесконечности при $0 < \bar{t} \rightarrow 0$. Лемма доказана.

Лемма 3.7. Пусть f - монотонная функция на n -мерном сегменте J , $a = v(J, 0)$, $b = v(J, 1)$, $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Тогда существует разбиение (1.9) сегмента J такое, что для любого $\bar{x} \in [\bar{l}, \bar{m}] \cap \mathbb{N}^n$

$$\omega(f; \text{int}([\bar{t}_{\bar{x}-1}, \bar{t}_{\bar{x}}])) < \varepsilon$$

где ω - осцилляция.

Доказательство. Согласно Лемме 3.5, любую точку $\bar{x} \in J$ можно покрыть внутренностью $\text{int}(J_{\bar{x}})$ некоторого сегмента $J_{\bar{x}}$ такого, что для любого $\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)$

$$\omega(f; \text{int}(J_{\bar{x}}) \cap \{x + t(1 - 2\bar{\alpha}) : \bar{t} > 0\}) < \varepsilon.$$

Объединение множеств $\text{int}(J_{\bar{x}_1}), \dots, \text{int}(J_{\bar{x}_k})$ содержит J . Построим разбиение сегмента J гиперплоскостями, которые являются продолжениями $(n-1)$ -мерных граней сегментов $J_{\bar{x}_1}, \dots, J_{\bar{x}_k}$, а также гиперплоскостями, проходящими через точки $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$. Это и будет требуемое разбиение.

Теперь приступим к многомерной второй теореме о среднем значении, сначала в форме Бонне.

Теорема 3.8. Пусть J - n -мерный сегмент, $f \in L^1(J)$, $\bar{\alpha} \in \text{vert}(Q^n)$, а φ - возрастающая относительно $v(J, \bar{\alpha})$ положительная функция на J . Тогда существует точка $\xi \in J$ такая, что

$$\int_J f \varphi d\mu = (l_{\bar{1}-\bar{\alpha}} \varphi)(v(J, \bar{1} - \bar{\alpha})) \int_{[\bar{\xi}, v(J, \bar{1} - \bar{\alpha})]} f d\mu, \quad (3.8)$$

где μ - n -мерная лебегова мера.

Доказательство. Не нарушая общности, можем предположить, что $J = Q^n$ и $\bar{\alpha} = \bar{0}$. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Согласно Лемме 3.7 существует такое разбиение

$$\{0 = t_0^{(i)} < t_1^{(i)} < \dots < t_{m_i}^{(i)} = 1; i = 1, \dots, n\}, \quad (3.9)$$

что функция

$$\varphi_\varepsilon = \sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\bar{m}} \varphi(\bar{\tau}_{\bar{z}}) \chi_{[\bar{l}_{\bar{z}-1}, \bar{l}_{\bar{z}}]} \quad (3.10)$$

где $\bar{l}_{\bar{z}}$ и $\bar{\tau}_{\bar{z}}$ определены (1.10), (1.11), а χ - характеристическая функция, удовлетворяющая неравенству

$$|\varphi_\varepsilon(\bar{x}) - \varphi(\bar{x})| < \varepsilon \quad (3.11)$$

почти всюду на Q^n .

Полагая $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n)$ и применяя Лемму 2.5, получаем

$$\begin{aligned} \int_{Q^n} f \varphi_\varepsilon d\mu &= \sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\bar{m}} \varphi(\bar{\tau}_{\bar{z}}) \int_{[\bar{l}_{\bar{z}-1}, \bar{l}_{\bar{z}}]} f d\mu = \varphi(\bar{\tau}_{\bar{1}}) \int_{Q^n} f d\mu + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \times \\ &\times \sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\bar{1}+\delta^{i_1, \dots, i_k}(\bar{m}-\bar{2})} \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(\varphi; [\bar{\tau}_{\bar{z}}, \bar{\tau}_{\bar{z}+\delta^{i_1, \dots, i_k}}]) \int_{[\bar{l}_{\bar{z}+\delta^{i_1, \dots, i_k}-1}, \bar{1}]} f d\mu. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Согласно Лемме 2.3 имеем

$$\varphi(\bar{\tau}_{\bar{1}}) + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\bar{1}+\delta^{i_1, \dots, i_k}(\bar{m}-\bar{2})} \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(\varphi; [\bar{\tau}_{\bar{z}}, \bar{\tau}_{\bar{z}+\delta^{i_1, \dots, i_k}}]) = \varphi(\bar{\tau}_{\bar{m}}), \quad (3.13)$$

где все члены в левой части положительны.

Из (3.12) и (3.13) следует, что существует точка $\bar{\eta} \in Q^n$ такая, что

$$\int_{Q^n} f \varphi_\varepsilon d\mu = \varphi(\bar{\tau}_{\bar{m}}) \int_{[\bar{\eta}, \bar{1}]} f d\mu. \quad (3.14)$$

Согласно (3.11), в левой части (3.14) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\max |\bar{t}_\varepsilon - \bar{t}_{\varepsilon-1}| \rightarrow 0$. Предположим, что $\bar{\eta} \rightarrow \xi \in Q^n$. С другой стороны, очевидно $\bar{t}_m \rightarrow \bar{1}$. Следовательно

$$\int_{Q^n} f \varphi d\mu = (l_1 \varphi)(\bar{1}) \int_{[\bar{\xi}, \bar{1}]} f d\mu.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.9. Пусть J — n -мерный сегмент, φ — монотонная функция на J , $f \in L^1(J)$, а $\bar{\alpha}$ — некоторая вершина Q^n . Пусть $\Theta(J, \bar{\alpha})$ — множество всех граней сегмента J , имеющих общую вершину $v(J, \bar{\alpha})$. Тогда на каждой грани $\theta \in \Theta(J, \bar{\alpha})$ можно выбрать такую точку $\bar{\xi}^\theta$, что

$$\int_J f \varphi d\mu = \sum_{\theta \in \Theta(J, \bar{\alpha})} \Delta_{\dim \theta}(\varphi; \theta, \bar{\alpha}) \int_{[\bar{\xi}^\theta, v(J, \bar{1} - \bar{\alpha})]} f d\mu \quad (3.15)$$

при $\bar{\xi}^\theta = v(J, \bar{\alpha})$ и $\Delta_{\dim \theta}(\varphi; \theta, \bar{\alpha}) = \varphi(v(J, \bar{\alpha}))$, если $\dim \theta = 0$.

Доказательство. Можем предположить, что $J = Q^n$ и φ возрастает на Q^n . Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Рассмотрим разбиение (3.9) куба Q^n . $t_{\bar{\alpha}, \varepsilon}$, $\bar{t}_{\bar{\alpha}, \varepsilon-1}$ соответствуют этому разбиению согласно (1.12) и (1.13), а функция φ_ε определена посредством (3.10). Тогда справедливо (3.11). Кроме того

$$\varphi_\varepsilon = \sum_{\varepsilon=1}^m \varphi(\bar{t}_{\bar{\alpha}, \varepsilon}) \chi_{[\bar{t}_{\bar{\alpha}, \varepsilon-1}, \bar{t}_{\bar{\alpha}, \varepsilon}]} \quad (3.16)$$

почти всюду в Q^n .

Положим

$$F_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) = \int_{[\bar{\alpha}, \bar{x}]} f d\mu, \quad \bar{x} \in Q^n. \quad (3.17)$$

Согласно (1.14) функции $F_{\bar{\alpha}}(\bar{t}_{\bar{\alpha}, \varepsilon})$ и $\varphi(\bar{t}_{\bar{\alpha}, \varepsilon})$, определены на сегментах $[0, m]$ и

$[\bar{1}, \bar{m}]$, удовлетворяющих (2.11). Поэтому из (3.16) и (3.17) получаем

$$\begin{aligned}
 \int_{Q^n} f \varphi_\varepsilon d\mu &= \sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\bar{m}} \varphi(\bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{z}}) \Delta_n(F_{\bar{\alpha}}; [\bar{t}_{\bar{\alpha}, \bar{z}-\bar{1}}, \bar{t}_{\bar{\alpha}, \bar{z}}], \bar{\alpha}) = \\
 &= \sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\bar{m}} \varphi(\bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{z}}) \Delta_n(F_{\bar{\alpha}}(\bar{t}_{\bar{\alpha}, \bar{z}}); [\bar{z}-\bar{1}, \bar{z}]) = F_{\bar{\alpha}}(\bar{t}_{\bar{\alpha}, \bar{m}}) \varphi(\bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{m}}) + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (-1)^k \times \\
 &\times \sum_{\bar{z}=\bar{m}-\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}(\bar{m}-\bar{1})}^{\bar{m}-\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}} F_{\bar{\alpha}}(\bar{t}_{\bar{\alpha}, \bar{z}}) \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(\varphi(\bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{z}}); [\bar{z}, \bar{z} + \bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}]) = \\
 &= F_{\bar{\alpha}}(\bar{t}_{\bar{\alpha}, \bar{m}}) \varphi(\bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{m}}) + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (-1)^k \times \\
 &\times \sum_{\bar{z}=\bar{m}-\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}(\bar{m}-\bar{1})}^{\bar{m}-\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}} F_{\bar{\alpha}}(\bar{t}_{\bar{\alpha}, \bar{z}}) \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(\varphi; [\bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{z}}, \bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{z}+\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}}], \bar{\alpha}). \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Заметим, что в (3.18) точки $\bar{t}_{\bar{\alpha}, \bar{z}}$ принадлежат k -мерной грани Q^n , соответствующей заданной сумме и определенной условиями $x_i = 1 - \alpha_i$, $i \neq i_1, \dots, i_k$.

Согласно Лемме 2.1, имеем

$$\begin{aligned}
 \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(\varphi; [\bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{z}}, \bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{z}+\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}}], \bar{\alpha}) &= \\
 &= (-1)^{|\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k} \bar{\alpha}|} \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(\varphi; [\bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{z}}, \bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{z}+\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}}]). \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Из (3.18) и (3.19), используя (1.14) и (3.17), получаем

$$\begin{aligned}
 \int_{Q^n} f \varphi_\varepsilon d\mu &= \varphi(\bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{m}}) \int_{Q^n} f d\mu + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\bar{z}=\bar{m}-\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}(\bar{m}-\bar{1})}^{\bar{m}-\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}} (-1)^{k-|\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k} \bar{\alpha}|} \times \\
 &\times F_{\bar{\alpha}}(\bar{t}_{\bar{\alpha}, \bar{z}}) \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(\varphi; [\bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{z}}, \bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{z}+\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}}]). \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Для каждого набора индексов $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ положим

$$\lambda_{i_1, \dots, i_k} = \min\{(-1)^{k-|\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k} \bar{\alpha}|} F_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) : x_i = 1 - \alpha_i, \quad i \neq i_1, \dots, i_k\}$$

и

$$\Lambda_{i_1, \dots, i_k} = \max\{(-1)^{k-|\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k} \bar{\alpha}|} F_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) : x_i = 1 - \alpha_i, \quad i \neq i_1, \dots, i_k\}.$$

Согласно нашему предположению все разности

$$\Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(\varphi; [\bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{z}}, \bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{z}+\bar{\delta}^{i_1, \dots, i_k}}])$$

положительны. Поэтому из (3.20) имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_k} \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(\varphi; [\bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{m}} - \delta^{i_1, \dots, i_k}(\bar{m} - \bar{1}), \bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{m}}]) \leq \\ & \leq \int_{Q^n} f \varphi_\varepsilon d\mu - \varphi(\bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{m}}) \int_{Q^n} f d\mu \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \Lambda_{i_1, \dots, i_k} \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(\varphi; [\bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{m}} - \delta^{i_1, \dots, i_k}(\bar{m} - \bar{1}), \bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{m}}]). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Очевидно, что при $\max |\bar{t}_z - \bar{t}_{z-1}| \rightarrow 0$, имеем $\bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{m}} \rightarrow \bar{1} - \bar{\alpha}$ и $\bar{\tau}_{\bar{\alpha}, \bar{m}} - \delta^{i_1, \dots, i_k}(\bar{m} - \bar{1}) \rightarrow (1 - \delta^{i_1, \dots, i_k})\bar{\alpha} + \delta^{i_1, \dots, i_k}(\bar{1} - \bar{\alpha})$.

Поэтому, переходя к пределу в (3.21), при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\max |\bar{t}_z - \bar{t}_{z-1}| \rightarrow 0$, получим, в силу (3.11)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_k} \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(\varphi; \bar{\theta}^{i_1, \dots, i_k}(Q^n, \bar{1} - \bar{\alpha})) \leq \\ & \leq \int_{Q^n} f \varphi d\mu - (l_{\bar{1} - \bar{\alpha}} \varphi)(\bar{1} - \bar{\alpha}) \int_{Q^n} f d\mu \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \Lambda_{i_1, \dots, i_k} \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(\varphi; \bar{\theta}^{i_1, \dots, i_k}(Q^n, \bar{1} - \bar{\alpha})), \end{aligned} \quad (3.22)$$

где в разложении $\Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(\varphi; \bar{\theta}^{i_1, \dots, i_k}(Q^n, \bar{1} - \bar{\alpha}))$ значения φ равны соответствующим двойным пределам.

Остается заметить, что из-за непрерывности $F_{\bar{\alpha}}(\bar{x})$ можно выбрать точку $\xi^{i_1, \dots, i_k}$ на любой грани $\bar{\theta}^{i_1, \dots, i_k}(Q^n, \bar{1} - \bar{\alpha})$, следовательно

$$\begin{aligned} & \int_{Q^n} f \varphi d\mu = (l_{\bar{1} - \bar{\alpha}} \varphi)(\bar{1} - \bar{\alpha}) \int_{Q^n} f d\mu + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (-1)^{k - |\delta^{i_1, \dots, i_k} \bar{\alpha}|} \times \\ & \times \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(\varphi; \bar{\theta}^{i_1, \dots, i_k}(Q^n, \bar{1} - \bar{\alpha})) \int_{[\bar{\alpha}, \xi^{i_1, \dots, i_k}]} f d\mu. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Применяя снова Лемму 3.1 с $\beta = \bar{1} - \bar{\alpha}$, из (3.23) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{Q^n} f \varphi d\mu = (l_{\bar{1} - \bar{\alpha}} \varphi)(\bar{1} - \bar{\alpha}) \int_{Q^n} f d\mu + \\ & + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \Delta_k^{i_1, \dots, i_k}(\varphi; \bar{\theta}^{i_1, \dots, i_k}(Q^n, \bar{1} - \bar{\alpha}), \bar{1} - \bar{\alpha}) \int_{[\bar{\alpha}, \xi^{i_1, \dots, i_k}]} f d\mu. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Наконец, заменив в (3.24) $\bar{\alpha}$ через $\bar{I} - \bar{\alpha}$, получим (3.15) при Q^n . Теорема доказана.

ABSTRACT. In this paper the multidimensional second mean-value theorem in both Bonnet and Du Bois-Reymond forms is proved. Several necessary properties of multidimensional differences and of monotone functions of several variables are outlined.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. G. H. Hardy, Proc. London Math. Soc., v. 15, No. 2, pp. 72-88, 1916.
2. W. H. Young, Proc. London Math. Soc., v. 16, No. 2, 1916.
3. E. W. Hobson, The Theory of Functions of a Real Variable and The Theory of Fourier's Series, vol. 1.
4. R. C. Young, L'enseignement Math., 1924-5. .
5. Б. И. Голубов, О сходимости и суммируемости кратных рядов и интегралов Фурье, Докт. диссертация, Тбилиси, 1975.

20 Октября 1991.

Институт прикладных проблем
физики АН Армении