О СЛУЧАЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ В $\mathbb{R}^3$

Б. К. Оганян

Известия Академии Наук Армении. Математика,
том 27, №2, 1992

На поверхность S ограниченного выпуклого тела в R^3 брошены случайные точки $P_1, .., P_n$. Они независимы и каждая имеет равномерное относительно площади распределение на S. Пусть O - фиксированная точка на S. Выпуклая оболочка множества $\{O, P_1, ..., P_n\}$ в R^3 - многогранник S_n. Обозначим через N_n случайное число ребер многогранника S_n, выходящих из точки O. В работе исследуется математическое ожидание EN_n и получены следующие результаты : В случае сферы найдена точная формула для вычисления EN_n. В случае общего S для EN_n получена асимптотическая формула $EN_n = 6 + \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n})$ для EN_n. В случае, когда O, лежащая на экваторе вершина эллипсоида вращения, показано, что коэффициент a зависит не только от отношения главных кривизн k_1, k_2 в точке O, а также от типа эллипсоида (вытянутый или сплющенный).

§1. ВВЕДЕНИЕ

Исследованию аппроксимации выпуклых тел случайными многогранниками посвящено большое число работ (см., например, работы [3],[6], а также [2],[4]). В настоящей работе рассмотрена задача локальной аппроксимации выпуклой поверхности случайной многогранной поверхностью.

Пусть $S \subset R^3$ - поверхность ограниченного выпуклого тела. Рассмотрим n точек $P_1, ..., P_n$, брошенных на S независимо, каждая с равномерным (относительно площади поверхности) распределением. Возьмем фиксированную точку O на S. Выпуклая оболочка множества $\{O, P_1, ..., P_n\}$ в R^3 – многогранник S_n с вершинами $O, P_1, ..., P_n$. Обозначим через N_n число ребер S_n, исходящих из вершины O.

Задача состоит в получении асимптотической формулы ($n \to \infty$) для EN_n (E обозначает математическое ожидание).

В этой работе получены следующие результаты :

1) Для случая, когда S – сфера, получено точное значение для EN_n :

$$EN_n = 6 - \frac{12}{n+1}, \quad n \geq 2 \quad (N_1 \equiv 1) \tag{1}$$

2) когда точка O является вершиной эллипсоида вращения и лежит на экваторе (вернее, оси вращения) в асимптотическом разложении

$$EN_n = 6 + \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n}) \tag{2}$$

найдена постоянная a в виде явной функции от $\frac{k_1}{k_2}$ (k_1, k_2 - главные кривизны эллипсоида в точке O). Эти функции различны для вытянутого или сплющенного случаев. (см. (25) и (26)).

§2. СЛУЧАЙ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА СФЕРЕ S^2

На сферу радиуса R с центром в начале координат (в сферических координатах $x = R\sin\nu\cos\phi$, $y = R\sin\nu\sin\phi$, $z = R\cos\nu$) бросаются n независимых точек с равномерным распределением на S^2, т.е. с плотностью

$$\frac{dP}{4\pi R^2} = \frac{\sin\nu\, d\nu d\phi}{4\pi},$$

где dP - элемент площади поверхности. Возьмем выпуклую оболочку точки O (северный полюс) и точек $P_1, ..., P_n$. Основной целью этого параграфа является демонстрация (1).

Легко видеть, что

$$N_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} I_{\text{грань}}(OP_iP_j), \qquad n \geq 2,$$

где $I_{\text{грань}}(OP_iP_j)$ равна 1, если плоскость, проходящая через точки OP_iP_j, оставляет все точки из $P_1, P_2, ..., P_n$ в том же полупространстве, ограниченном плоскостью OP_iP_j, нуль – в остальных случаях.

Следовательно

$$EN_n = \frac{n(n-1)}{2} P(OP_1P_2), \tag{3}$$

где $P(OP_1P_2) = EI_{\text{грань}}(OP_1P_2)$.

Из (3) следует, что

$$EN_n = \frac{n(n-1)}{2(4\pi R^2)^2} \iint\limits_{S^2\times S^2} [(\frac{|A|}{4\pi R^2})^{n-2} + (1 - \frac{|A|}{4\pi R^2})^{n-2}] dP_1 dP_2, \tag{4}$$

где через $|A| \le 2\pi R^2$ обозначена площадь маленькой сферической верхушки A, срезанной плоскостью, проходящей через точки OP_1P_2.

При вычислении интеграла (4) мы используем следующий результат Майлса (см. [1], [5]).

Пара точек (P_1, P_2) на сфере может быть описана параметрами

$$(|A|, \varphi, \alpha_1, \alpha_2),$$

где область изменения $|A|$ есть интервал $(0, 2\pi R^2)$, φ - ориентация A, $\varphi \in S^1$, а α_1, α_2 - два внутренних угла плоского треугольника с вершинами OP_1P_2. Назовем α_1, α_2 - параметрами формы плоского треугольника, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Sigma$, где Σ – пространство треугольных форм. Следующий якобиан был вычислен Майлсом [5] :

$$dP_1 dP_2 = 16 d\varphi \quad \frac{Rr^3}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr \quad \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 \tag{5}$$

(r - радиус кругового сечения сферы плоскостью, проходящей через точки OP_1P_2).

Так как $|A| = 2\pi R(R - \sqrt{R^2 - r^2})$, то из (5) следует, что

$$dP_1 dP_2 = \frac{2}{\pi^3 R^2} d\varphi \quad (4\pi R^2 - |A|)|A| d|A| \quad \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Применяя (5) (или (6)), получим, что тотальная мера форм есть

$$m(\Sigma) = \int_\Sigma \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2.$$

В самом деле, интегрируя (5) по $S^2 \times S^2$, получаем

$$(4\pi R^2)^2 = 16 \quad 2\pi R \quad \frac{2}{3} R^3 \quad m(\Sigma).$$

Следовательно

$$m(\Sigma) = \frac{3\pi}{4}. \tag{7}$$

Используя (6) и (7), легко вычислить интеграл в правой части (4).

$$EN_n = \frac{6n(n-1)}{(4\pi R^2)^{n+1}} \left[\int_0^{2\pi R^2} |A|^{n-1} (4\pi R^2 - |A|)\, d|A| + \int_0^{2\pi R^2} (4\pi R^2 - |A|)^{n-1} |A|\, d|A| \right].$$

С помощью замены переменных во втором интеграле, получаем

$$EN_n = \frac{6n(n-1)}{(4\pi R^2)^{n+1}} \int_0^{4\pi R^2} |A|^{n-1} (4\pi R^2 - |A|)\, d|A|.$$

Следовательно, из (1) вытекает, что результат не зависит от радиуса R сферы S^2.

§3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ EN_n В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

На сферу радиуса R бросим n точек $P_1, ..., P_n$, которые независимы и одинаково распределены с плотностью $f(P)\,dP$. Кроме того, предположим, что существует непрерывная вторая производная функции $f(P)$ и $f(O) \neq 0$ (O - северный полюс на S^2).

Целью настоящего параграфа является нахождение первых двух членов в асимптотическом разложении EN_n при $n \to \infty$.

Из (3) следует, что

$$EN_n = \frac{n(n-1)}{2} \iint\limits_{S^2 \times S^2} f(P_1) f(P_2)\, dP_1 dP_2 [(p(A))^{n-2} + (1 - p(A))^{n-2}], \tag{8}$$

где $p(A) = \int\limits_A f(P)\, dP$.

Так как $f(P)$ непрерывна и $f(O) \neq 0$, то только точки P_i, попадающие в любую малую окрестность точки O, вносят свой вклад в EN_n.

Следовательно, из (8) получаем

$$EN_n \approx \frac{n(n-1)}{2} \int_0^{\alpha(n)} \int_0^{2\pi} f(\nu_1, \phi_1) dP_1 \int_0^{\alpha(n)} \int_0^{2\pi} f(\nu_2, \phi_2)\, dP_2 (1 - p(A))^{n-2}, \tag{9}$$

где $\alpha(n) \to 0$, а $n\alpha(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ ($\nu_i \in (0, \alpha(n)), i = 1, 2$).

Знак $\approx$ означает совпадение первых двух членов в асимптотических разложениях.

Теперь рассмотрим разложение в ряд Тейлора функции $f(\nu, \phi)$ при $\nu \to 0$:

$$f(\nu, \phi) = f(0, 0) + \frac{\partial_\phi f(0, 0)}{\partial \nu} \nu + o(\nu), \tag{10}$$

где $\frac{\partial_\phi f(0,0)}{\partial \nu}$ - производная $f(\nu, \phi)$ в точке $(0, 0) = O$ по направлению ϕ.

Ниже всюду предполагаем, что

$$\frac{\partial_\phi f(0, 0)}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{для всех} \qquad \phi \in S^1. \tag{11}$$

Заметим, что в случае когда O - вершина эллипсоида вращения, условие (11) удовлетворяется на экваторе этого эллипсоида (этот случай мы рассмотрим ниже).

Таким образом, если точки $P_1, \ldots, P_n$ брошены на сферу независимо и с общей плотностью $f(P)$, удовлетворяющей дополнительному условию (11), то

$$EN_n \approx \frac{n(n-1)}{2}[f(0,0)]^2 \int_0^{\alpha(n)} \int_0^{2\pi} dP_1 \int_0^{\alpha(n)} \int_0^{2\pi} dP_2 (1 - f(0,0)|A|)^{n-2}.$$

Воспользовавшись разложением (6), получаем

$$EN_n \approx \frac{6n(n-1)}{4\pi R^2}[f(0,0)]^2 \int_0^{\beta(n)} (1 - f(0,0)|A|)^{n-2}(4\pi R^2 - |A|) \quad |A| \quad d|A|, \tag{12}$$

где $\beta(n) \to 0$ и $n\beta(n) \to \infty$, при $n \to \infty$ $(|A| \in (0, \beta(n)))$. Здесь мы также использовали (7).

Окончательно, из (12) следует, что

$$EN_n = 6 - \frac{3}{\pi r^2 f(0,0)} \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}). \tag{13}$$

Очевидно, что (13) согласовано с (1).

§4. СЛУЧАЙ ЭЛЛИПСОИДА

Пусть S - эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1.$$

В полярных координатах

$$x = \rho(\nu, \phi) \sin\nu \cos\phi, \quad y = \rho(\nu, \phi) \sin\nu \sin\phi, \quad z = \rho(\nu, \phi) \cos\nu, \tag{14}$$

где $\rho(\nu, \phi)$ определяется по формуле :

$$\rho(\nu, \phi) = (\frac{\sin^2\nu \cos^2\phi}{a^2} + \frac{\sin^2\nu \sin^2\phi}{b^2} + \frac{\cos^2\nu}{R^2})^{-\frac{1}{2}}, \tag{15}$$

Определим следующее аффинное преобразование :

$$x_1 = \frac{xR}{a}, \quad y_1 = \frac{yR}{b}, \quad z_1 = z, \tag{16}$$

отображающее эллипсоид на сферу радиуса R.

Выберем точку на эллипсоиде с координатами (ν, ϕ), заданными по формулам (14). Пусть (ν_1, ϕ_1) – сферические координаты образа этой точки на сфере. Найдем связь между (ν, ϕ) и (ν_1, ϕ_1). Имеем

$$\nu_1 = \arccos(\frac{\rho(\nu, \phi)\cos\nu}{R}),$$

$$\phi_1 = \arcsin(\frac{\rho(\nu, \phi)}{b} \sin\nu \sin\phi (1 - \frac{\rho^2(\nu, \phi)}{R^2}\cos^2\nu)^{-\frac{1}{2}}). \tag{17}$$

Элемент площади в точке (ν_1, ϕ_1) - $R^2 \sin\nu_1\, d\nu_1 d\phi_1$. Таким образом

$$R^2 \sin\nu_1\, d\nu_1 d\phi_1 = R^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}\cos^2\nu} \quad |(\frac{\partial\nu_1}{\partial\nu}\frac{\partial\phi_1}{\partial\phi} - \frac{\partial\nu_1}{\partial\phi}\frac{\partial\phi_1}{\partial\nu})| \quad d\nu\, d\phi. \tag{18}$$

Используя (17), находим производные $\frac{\partial\nu_1}{\partial\nu}, \frac{\partial\phi_1}{\partial\phi}, \frac{\partial\nu_1}{\partial\phi}, \frac{\partial\phi_1}{\partial\nu}$. Подставляя их значения в (18), после преобразований получаем

$$R^2 \sin\nu_1\, d\nu_1 d\phi_1 = \frac{\rho^3 R}{ab}\sin\nu d\nu d\phi. \tag{19}$$

Теперь мы можем дать ответ на следующий вопрос :

Какая плотность f на S^2 соответствует при преобразовании (16) равномерной (относительно площади) плотности на эллипсоиде ?

Из (19) следует, что

$$f(\nu,\phi)R^2 \sin\nu_1\, d\nu_1 d\phi_1 = f(\nu,\phi)\frac{\rho^3 R}{ab}\sin\nu d\nu d\phi,$$

и наша задача сводится к нахождению такой плотности $f(\nu,\phi)$, для которой

$$f(\nu,\phi)\frac{\rho^3 R}{ab}\sin\nu d\nu d\phi = dS_{\nu,\phi}, \tag{20}$$

где $dS_{\nu,\phi}$ - элемент площади на эллипсоиде в точке (ν,ϕ).

Воспользуемся стандартной формулой

$$dS_{\nu,\phi} = \rho\sqrt{(\rho^2 + (\frac{\partial\rho}{\partial\nu})^2)\sin^2\nu + (\frac{\partial\rho}{\partial\phi})^2} \quad d\nu d\phi, \tag{21}$$

где $\rho = \rho(\nu,\phi)$ - радиус-вектор поверхности. В нашем случае $\rho(\nu,\phi)$ имеет вид (15).

Из (20) и (21) следует, что

$$f(\nu,\phi) = \frac{ab}{R\rho^2 \sin\nu |S|} \quad \sqrt{(\rho^2 + (\frac{\partial\rho}{\partial\nu})^2)\sin^2\nu + (\frac{\partial\rho}{\partial\phi})^2}, \tag{22}$$

где $|S|$ - площадь эллипсоида.

Таким образом, $f(\nu,\phi)$ имеет вид

$$f(\nu,\phi) = \frac{ab\rho(\nu,\phi)}{R|S|} \quad \sqrt{\frac{\sin^2\nu\cos^2\phi}{a^4} + \frac{\sin^2\nu\sin^2\phi}{b^4} + \frac{\cos^2\nu}{R^4}}, \tag{23}$$

Следовательно

$$f(0,0) = \frac{ab}{R^2|S|} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial_\phi f(0,0)}{\partial\nu} = 0.$$

Для точки $(0,0,R)$ на эллипсоиде разложение (13) принимает вид

$$EN_n = 6 - \frac{3|S|}{ab\pi}\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}). \tag{24}$$

Теперь вычислим главные кривизны в точке $O = O(0,0,R)$.

Имеем

$$k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$
$$k_1 + k_2 = \frac{EN - LG - 2MF}{EG - F^2},$$

где E, G, F - коэффициенты первой квадратичной формы, а L, M, N - второй квадратичной формы.

Вычисляя, находим

$$k_1 = -\frac{R}{a^2}, \quad k_2 = -\frac{R}{b^2} \quad \text{and} \quad \frac{k_1}{k_2} = (\frac{b}{a})^2.$$

Мы хотим показать, что

$\frac{|S|}{ab}$ задается двумя различными функциями в случаях вытянутого и сплющенного эллипсоидов вращения .

Рассмотрим два случая.

I) Случай сплющенного эллипсоида вращения (вращение вокруг меньшей оси). Имеем $R = a > b$. В этом случае ([7])

$$|S| = 2\pi a^2 + \pi\frac{b^2}{\epsilon}\ln\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon},$$

где $\epsilon = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2}$.

Поэтому

$$\frac{|S|}{ab} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}} + \frac{\sqrt{1 - \frac{k_1}{k_2}}}{\pi\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}}\ln\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{k_1}{k_2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{k_1}{k_2}}}. \tag{25}$$

II) Случай вытянутого эллипсоида вращения (вращение вокруг большей оси). Имеем $a > b = R$. В этом случае ([7])

$$|S| = 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{\epsilon}\arcsin\epsilon.$$

Следовательно

$$\frac{|S|}{ab} = 2\pi\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} + \frac{2\pi}{\sqrt{1-\frac{k_1}{k_2}}}\arcsin\sqrt{1-\frac{k_1}{k_2}}. \tag{26}$$

Утверждение доказано.

ABSTRACT. On the surface S of a bounded convex body in R^3 random points $P_1, .., P_n$ are dropped. They are independent and each has uniform distribution with respect to the surface area on S. Let O be a fixed point on S. The convex hull of the set $\{O, P_1, ..., P_n\}$ in R^3 is a polyhedron S_n. Denote by N_n the random number of edges of S_n that meet at the point O. In the paper we study the expectation EN_n and obtain the following results : In the case where S is a sphere, the exact formula for EN_n is found. In general case an asymptotical formula $EN_n = 6 + \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n})$ for EN_n is derived. In the case where O is an apex of a rotation ellipsoid which lies on the equator we demonstrate that the coefficient a depends not only on the ratio of the main curvatures k_1, k_2 at O but also on the type of ellipsoid (prolate or oblate).

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штоян, Введение в Стохастическую Геометрию, М., Наука, 1989.
2. R. V. Ambartzumian, " Stochastic approximations of convex bodies by polyhedrons", Proceeding of the I-st world congress of the Bernoully Society, VNU, Science Press B.V., Netherlands, v.1, pp. 589 - 594, 1987.
3. C. Buchta, " Zufällige Polyeder eine Obersicht", Lecture notes in Mathematik, v. 114, pp. 1 - 13, 1985.
4. D. G. Kelly, J. W. Tolle,"Expected number of vertices of a random convex polyhedron", Siam. J. Alg. Disc. Math., v. 2,4, pp. 441 - 451, 1981.
5. R. E. Miles, "Random points, sets and tesselations on the surface of a sphere", Sankhya Indian Journal of Statistics, Ser. A, v. 33, pp. 145 - 174, 1971.
6. R. Schneider, "Random approximation of convex sets", Journal of Microscopy, v. 151, pt. 3, September 1988, pp. 211-227.
7. Г. Корн, Т. Корн, Справочник по Математике, М., Наука, 1973.

4 Апреля 1990 Ереванский государственный университет