

ЗАДАЧА ТИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Н. Е. Товмасян

Известия Академии Наук Армении. Математика,
том 27, №1, 1992

В работе рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения

$$\frac{\partial^{m+n} u}{\partial z^m \partial \bar{z}^n} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial z} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Задача сводится к задаче Дирихле для n - гармонического уравнения и доказывается теорема существования. В случае круга задача явно разрешима.

Пусть D - односвязная область с достаточно гладкой границей Γ . Рассмотрим однородное эллиптическое уравнение

$$\sum_{k=0}^n A_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = 0, \quad (1)$$

где A_k - комплексные постоянные, $A_n \neq 0$.

Уравнение (1) называется эллиптическим, если характеристическое уравнение

$$\sum_{k=0}^n A_k \lambda^k = 0 \quad (2)$$

не имеет вещественных корней. Уравнение (1) называется правильно эллиптическим, если оно эллиптическое и число корней (каждый корень учитывается вместе со своей кратностью) характеристического уравнения (2), для которых $\operatorname{Im} \lambda > 0$ и $\operatorname{Im} \lambda < 0$ совпадает. В остальных случаях эллиптическое уравнение называется неправильно эллиптическим.

Хорошо известно, что в любой односвязной области задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения является фредгольмовой. Для уравнения (1)

второго порядка задача Неймана и задача с косо́й производной (задача Пуанкаре) является либо фредгольмовой, либо неттеровой [1], [2]. Для неправильно эллиптических уравнений эти классические задачи не являются ни фредгольмовыми, ни неттеровыми [2].

Цель настоящей работы - предложить аналог задачи Дирихле для неправильно эллиптических уравнений, для которых однородная задача имеет конечное число линейно независимых решений, в то время как неоднородная задача разрешима всегда.

Для простоты мы рассмотрим задачу, для которой характеристическое уравнение имеет либо два различных корня $\lambda = -i$ и $\lambda = i$ с кратностью m и n , соответственно ($n > m$), либо один корень с кратностью n . Такое однородное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^{m+n} u}{\partial z^m \partial \bar{z}^n} = 0, \quad z \in D; \quad n > m \geq 0, \quad z = x + iy, \quad (3)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Задачу типа Дирихле для уравнения (3) мы ставим следующим образом:

Задача А. В односвязной области D найти регулярное решение уравнения (3), удовлетворяющее граничным условиям

$$\frac{\partial^k u(z)}{\partial N^k} = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (4)$$

$$\operatorname{Re} \frac{\partial^k u(z)}{\partial N^k} = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = m, \dots, n-1, \quad (5)$$

где $f_k(z)$, ($k = 1, \dots, n-1$) - достаточно гладкие функции, $f_0(z), \dots, f_{m-1}(z)$ - комплекснозначные, тогда как $f_m(z), \dots, f_{n-1}(z)$ - вещественнозначные функции, N - внешняя нормаль к Γ в точке $z \in \Gamma$. В случае $m = 0$ условие (4) не имеет места. Решение задачи А называется регулярным, если оно удовлетворяет уравнению и граничным условиям в классическом смысле.

Уравнение (3) - обобщение n -гармонического уравнения (для $m = n$ уравнение (3) - n -гармоническое).

В случае $m > n$ задача А ставится аналогично : в условиях (4) и (5) меняем местами m и n . В [4], [5] задача А рассматривается в полуплоскости.

Если $f_k(z) \equiv 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, то задача А называется однородной. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Неоднородная задача А разрешима всегда, в то время как соответствующая однородная задача А имеет ровно $(m-n)^2$ линейно независимых решений.*

Теорема 2. *Если $m = 0$, то полная система линейно независимых решений однородной задачи А состоит из функций*

$$i(z^k \bar{z}^l + \bar{z}^k z^l), \quad z^p \bar{z}^p - \bar{z}^p z^p, \quad (6)$$

где k, l, p, ρ - неотрицательные целые, удовлетворяющие условиям

$$0 \leq l \leq k, \quad 0 \leq \rho < p; \quad 0 \leq k, l, p, \rho \leq n-1.$$

Теорема 3. *Если область D - единичный круг ($|z| < 1$), то полная система линейно независимых решений задачи А определяется формулами*

$$i(z^k \bar{z}^l + \bar{z}^k z^l)(1 - z\bar{z})^m, \quad (z^p \bar{z}^p - \bar{z}^p z^p)(1 - z\bar{z})^m,$$

где l, k, p, ρ - неотрицательные целые, удовлетворяющие условиям

$$0 \leq l \leq k, \quad 0 \leq \rho < p; \quad 0 \leq k, l, p, \rho \leq n-m.$$

Линейная независимость решений однородной задачи А связана с полем вещественных чисел. Здесь и далее $\bar{z}$ обозначает комплексное сопряжение к z .

Доказательства Теорем 1 и 2. Сначала докажем существование решения задачи А. Хорошо известно, что задача Дирихле для n -гармонического уравнения однозначно разрешима. Пусть v - (вещественное) решение n -гармонического уравнения

$$\Delta^n v = 0, \quad z \in D, \quad (7)$$

удовлетворяющее граничному условию Дирихле

$$\frac{\partial^k v(z)}{\partial N^k} = \operatorname{Re} f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (8)$$

где $f_k(z)$ - функции из (4) и (5), а Δ - оператор Лапласа :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Так как v - вещественное решение, то оно может быть представлено в виде [1] :

$$v = \operatorname{Re} u_o(z),$$

где

$$u_o(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k \varphi_k(z),$$

$\varphi_k(z)$ - некоторые аналитические в D функции.

Очевидно, что $u_o(z)$ - решение уравнения (3). Обозначим через w (вещественное) решение следующей задачи Дирихле :

$$\begin{aligned} \Delta^m w &= 0, \quad z \in D, \\ \frac{\partial^k w(z)}{\partial N^k} &= \operatorname{Im} f_k(z) - \operatorname{Im} \frac{\partial^k u_o(z)}{\partial N^k}, \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что n -гармоническое уравнение (9) можно записать также в виде :

$$\frac{\partial^{2m} w}{\partial z^m \partial \bar{z}^m} = 0, \quad z \in D,$$

поэтому $iw(z)$ - также решение (3).

Очевидно, что функция $u(z) = u_o(z) + iw(z)$ - решение задачи А. Существование решения задачи А доказано.

Теперь докажем Теорему 2. Легко видеть, что для $m = 0$ функции (6) являются решениями однородной задачи А, линейно независимы над полем вещественных чисел и их число равно n^2 .

Пусть $u(z)$ - решение однородной задачи для $m = 0$, т. е.

$$\frac{\partial^n u}{\partial \bar{z}^n} = 0, \quad z \in D, \quad (10)$$

$$\operatorname{Re} \frac{\partial^k u}{\partial N^k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (11)$$

Хорошо известно [1], что в односвязной области D общее решение уравнения (10) представляется в виде

$$\omega(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z),$$

где $\varphi_k(z)$ - произвольные аналитические функции в области D . Следовательно, решение $u(z)$ однородной задачи также можно представить в виде

$$u(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z), \quad (12)$$

где $\varphi_k(z)$ - некоторые аналитические функции.

Обозначим $v(z) = \operatorname{Re} u(z)$, $z \in D$. Согласно представлению (12)

$$\Delta^n v = 0, \quad z \in D.$$

Условие (11) можно записать в виде

$$\frac{\partial^k v}{\partial N^k} = 0, \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Из единственности решения задачи Дирихле для n -гармонического уравнения следует, что

$$v(z) \equiv 0, \quad z \in D,$$

и, следовательно

$$\operatorname{Re} u(z) \equiv 0, \quad z \in D. \quad (13)$$

Подставляя представление (12) в (13), получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\bar{z}^k \varphi_k(z) + z^k \bar{\varphi}_k(z)) = 0, \quad z \in D. \quad (14)$$

Пусть

$$\varphi_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} C_{kj} z^j, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (15)$$

разложения в ряд Тейлора функций $\varphi_k(z)$ в окрестности $z = 0 \in D$. Подставляя (15) в (14), получаем

$$C_{kl} = 0 \quad \text{при} \quad l \geq n, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (16)$$

$$C_{kl} + \bar{C}_{lk} = 0; \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \quad l = 0, 1, \dots, n-1, \quad (17)$$

Подставляя (15) в (12) и пользуясь соотношениями (16) и (17), замечаем, что общее решение однородной задачи (10) и (11) является линейной комбинацией (с

действительными коэффициентами) функций (6). Этим завершается доказательство Теоремы 2.

Теперь перейдем к доказательству второй части Теоремы 1. Пусть $u_0(z)$ - решение однородной задачи Λ при условии $n > m > 0$. Известно, что общее решение уравнения (1) в односвязной области D допускает представление [1]

$$u(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z) + \sum_{k=0}^{m-1} z^k \bar{\psi}_k(z), \quad (18)$$

где $\varphi_k(z)$ и $\psi_k(z)$ - произвольные аналитические функции в D . Представим функцию $\psi_k(z)$ в виде

$$\psi_k(z) = P_k(z) + \omega_k(z), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (19)$$

где $P_k(z)$ - многочлены порядка не более $n-1$, а $\omega_k(z)$ аналитичны в D и удовлетворяют дополнительным условиям

$$\omega_k^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (20)$$

Подставляя ψ_k из (19) в (18), получаем

$$u(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \phi_k(z) + \sum_{k=0}^{m-1} z^k \bar{\omega}_k(z),$$

где $\phi_k(z)$ также аналитична в D . Заметим, что дополнительными условиями (20) аналитические функции $\phi_k(z)$ и $\omega_k(z)$ определяются через $u(z)$ однозначно.

Следовательно, решение $u_0(z)$ однородной задачи Λ можно представить в виде

$$u_0(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \phi_k(z) + \sum_{k=0}^{m-1} z^k \bar{\omega}_k(z), \quad (21)$$

где $\phi_k(z)$ и $\omega_k(z)$ - некоторые аналитические в D функции, а $\omega_k(z)$ удовлетворяют условиям (20).

Положим

$$v_0(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \phi_k(z) + \sum_{k=0}^{m-1} \bar{z}^k \omega_k(z). \quad (22)$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial^n v_0(z)}{\partial \bar{z}^n} = 0; \quad z \in D, \quad (23)$$

$$\operatorname{Re} v_o(z) = \operatorname{Re} u_o(z); \quad z \in D. \quad (24)$$

Граничные условия (4) и (5) для решения $u_o(z)$ однородной задачи Λ можно переписать в виде :

$$\operatorname{Re} \frac{\partial^k u_o(z)}{\partial N^k} = 0, \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (25)$$

$$\operatorname{Im} \frac{\partial^k u_o(z)}{\partial N^k} = 0, \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (26)$$

Из (24) следует, что условия (25) можно записать как

$$\operatorname{Re} \frac{\partial^k v_o(z)}{\partial N^k} = 0, \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (27)$$

Следовательно, функция $v_o(z)$ является решением задачи (23), (27). Согласно Теореме 2

$$v_o(z) = \sum_{k=1}^{n^2} C_k u_k(z), \quad (28)$$

где $u_k(z)$ - функции (6), а C_k - действительные постоянные. Из (22) и (28) имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \phi_k(z) = \sum_{k=1}^{n^2} C_k u_k(z) - \sum_{k=0}^{m-1} \bar{z}^k \omega_k(z). \quad (29)$$

В силу (29) равенство (21) можно переписать в виде

$$u_o(z) = \sum_{k=1}^{n^2} C_k u_k(z) + \sum_{k=0}^{m-1} [z^k \bar{\omega}_k(z) - \bar{z}^k \omega_k(z)] \quad (30)$$

Так как функция $u_k(z)$ является решением однородной задачи (23), (27), легко видеть, что функция $u_o(z)$, определенная формулой (30), при любых вещественных постоянных есть решение уравнения (3) и удовлетворяет граничному условию (25). Подставляя $u_o(z)$ из (30) в граничные условия (26) и учитывая то, что $u_k(z)$ - чисто мнимые функции, а C_k - действительные постоянные, получаем

$$\operatorname{Re} \frac{\partial^j \omega(z)}{\partial N^j} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n^2} i C_k \frac{\partial^j u_k(z)}{\partial N^j}; \quad z \in \Gamma, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (31)$$

где

$$\omega(z) = \sum_{k=0}^{m-1} i \bar{z}^k \omega_k(z). \quad (32)$$

Очевидно, что $\omega(z)$ - решение уравнения

$$\frac{\partial^m \omega}{\partial z^m} = 0, \quad z \in D. \quad (33)$$

Поэтому $\omega(z)$ является решением задачи (33), (31). Как и выше однородная задача (33), (31) (при $C_k = 0$) имеет m^2 линейно независимых решений, а неоднородная задача всегда разрешима.

Обозначим через $v_k(z)$ решение уравнения (33), удовлетворяющее граничному условию

$$\operatorname{Re} \frac{\partial^j v_k}{\partial N^j} = \frac{1}{2} i \frac{\partial^j u_k}{\partial N^j}, \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (34)$$

Тогда решение задачи (33), (31) задается формулой

$$\omega(z) = \sum_{k=1}^{n^2} C_k v_k(z),$$

где C_k - постоянные из (31). Поэтому, в силу Теоремы 2 общее решение задачи (31), (33) можно записать как

$$\omega(z) = \sum_{k=1}^{n^2} C_k v_k(z) + \sum_{k=1}^{m^2} d_k u_k(z), \quad (35)$$

где d_k - произвольные вещественные постоянные, $u_k(z)$ ($k = 1, \dots, m^2$) - функции (6), после замены n на m . В обозначениях (32) условие (20) эквивалентно следующему :

$$\frac{\partial^{k+j} \omega(0)}{\partial \bar{z}^k \partial z^j} = 0; \quad k = 0, 1, \dots, m-1; \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (36)$$

Условие (36) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \frac{\partial^{k+j} \omega(0)}{\partial \bar{z}^k \partial z^j} = 0, \quad \operatorname{Im} \frac{\partial^{k+j} \omega(0)}{\partial \bar{z}^k \partial z^j} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (37)$$

Подставляя (35) в (37), получим следующую систему уравнений :

$$AC = 0, \quad (38)$$

из которой можно определить действительные постоянные C_k и d_k . Здесь $C = (C_1, C_2, \dots, C_{n^2}, d_1, \dots, d_{m^2})$ искомый вещественный вектор-столбец, и A - вещественная матрица. A имеет $2mn$ строчек и $m^2 + n^2$ столбцов.

Теперь покажем, что $\text{rang } A = 2mn$. С этой целью рассмотрим задачу A со следующими функциями :

$$\begin{aligned} f_k(z) &= 2i \frac{\partial^k}{\partial N^k} \text{Re} \left[\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} C_{jl} \bar{z}^j z^l \right], \quad k = 0, 1, \dots, m-1; \\ f_k(z) &= 0, \quad k = m, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (39)$$

где C_{jl} - произвольные комплексные постоянные. В этом случае граничные условия (4) и (5) можно записать следующим образом :

$$\text{Re} \frac{\partial^k u(z)}{\partial N^k} = 0, \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (40)$$

$$\text{Im} \frac{\partial^k u(z)}{\partial N^k} = 2 \frac{\partial^k}{\partial N^k} \text{Re} \left[\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} C_{jl} \bar{z}^j z^l \right], \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (41)$$

При изучении задачи A с граничными условиями (40) и (41) применяется подход, аналогичный примененному при изучении однородной задачи A . Из уравнения (3) и граничного условия (40) следует, что решение $u(z)$ имеет вид (30). Поэтому, подставляя (30) в (41), получаем

$$\text{Re} \frac{\partial^k}{\partial N^k} \left[\omega(z) - \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} C_{jl} \bar{z}^j z^l \right] = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n^2} i C_j \frac{\partial^k u_j(z)}{\partial N^k}, \quad z \in \Gamma, \quad (42)$$

где $\omega(z)$ определено формулой (32). Заметим, что функция в квадратных скобках также является решением уравнения (33). Следовательно (ср. с (35))

$$\omega(z) - \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} C_{jl} \bar{z}^j z^l = \sum_{k=1}^{n^2} C_k v_k(z) + \sum_{k=1}^{m^2} d_k u_k(z), \quad z \in D, \quad (43)$$

где C_k и d_k - снова произвольные действительные постоянные. Если подставим $\omega(z)$ из (43) в (37) при произвольных постоянных C_k и d_k , то получим уравнение

$$AC = b, \quad (44)$$

где матрица A и искомый вектор C такие же как в (38), а b - вектор-столбец с компонентами $\text{Re } C_{jl}$ и $\text{Im } C_{jl}$ ($j = 0, 1, \dots, m-1$; $l = 0, 1, \dots, n-1$).

Потому b в правой части алгебраического уравнения (44) может быть произвольным вектор-столбцом. Для любой правой части b уравнение (44) всегда разрешимо, так как неоднородная задача A всегда разрешима. Следовательно,

rang $A = 2mn$. Поэтому при $b = 0$ алгебраическое уравнение (44) имеет ровно $m^2 + n^2 - 2mn$ линейно независимых решений.

Формулу (30) можно переписать в виде

$$u_0(z) = \sum_{k=1}^{n^2} C_k u_k(z) - \sum_{k=0}^{m-1} 2i \operatorname{Im} \omega(z), \quad (45)$$

где $\omega(z)$ определено посредством (32).

Таким образом, каждому решению C однородной системы (38) соответствует решение однородной задачи A , задаваемое формулой (45), где $\omega(z)$ определено формулой (35) и $C = (C_1, \dots, C_{n^2}, d_1, \dots, d_{m^2})$.

Можно показать, что (45) - сохраняющее линейную независимость отображение решений однородной системы на решения однородной задачи. Это можно доказать методом, используемым в [3], стр. 292 - 297.

Так как однородная система (38) имеет $(n - m)^2$ линейно независимых решений, то однородная задача A имеет столько же линейно независимых решений. Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 3. Легко проверить, что функции в утверждении Теоремы 3 линейно независимы. Они являются решениями однородной задачи A в единичном круге, а их число равно $(n - m)^2$. Отсюда и Теоремы 1 следует, что в единичном круге эти функции образуют полную систему линейно независимых решений однородной задачи A .

ABSTRACT. In the paper a Dirichlet type problem for the elliptic equation

$$\frac{\partial^{m+n} u}{\partial z^m \partial \bar{z}^n} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial z} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

is considered. The problem is reduced to a Dirichlet problem for n -harmonic equation and the existence theorem is proved. In the case of a circle the problem is explicitly solved.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н. Е. Товмасян, "Общая краевая задача для эллиптической системы второго порядка с постоянными коэффициентами", Дифф. уравнения, т. 2, №№ 1, 2, 1966.
2. А. В. Бицадзе, Красные Задачи для Эллиптических Уравнений Второго Порядка, М., Наука, 1966.
3. И. Н. Векуа, Обобщенные Аналитические Функции, М., Физ-мат. лит., 1959.
4. И. А. Бикчантаев, "Краевая задача для эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами", Изв. вузов, Математика, т. 6, стр. 3 - 13, 1975.
5. В. В. Асатрян, "Краевые задачи для неправильно эллиптических уравнений высокого порядка в полуплоскости", Препринт, Ереван, 1987.

19 Февраля 1990

Ереванский политехнический институт