ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

К. А. Ягджян

Известия Академии Наук Армении. Математика,
том 27, №1, 1992

В работе рассматривается задача Коши для слабо гиперболических уравнений, вырождающихся по пространственным переменным. Предполагается, что коэффициенты удовлетворяют некоторым условиям, сформулированным посредством нулей полного символа и характеристических корней. Для таких операторов строится параметрикс и фундаментальное решение задачи Коши с помощью разбиения на зоны кокасательного расслоения и специальных классов псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача Коши

$$Pu = f(t, x), \tag{0.1}$$

$$D_t^j u|_{t=s} = \psi_j(x), \quad j = 0, 1, ..., m-1, \tag{0.2}$$

где $s, t \in [0, T], T > 0$, $x \in R^n$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$, $D_t = -i\partial/\partial t$, α - мультииндекс, P - дифференциальный оператор с частными производными

$$P = D_t^m + \sum_{j+|\alpha|\leq m, j<m} a_{j,\alpha}(t, x) D_t^j D_x^\alpha \tag{0.3}$$

и с гладкими коэффициентами $a_{j,\alpha}(t, x) \in C^\infty([0, T] \times R^n)$. Описание класса операторов дается с помощью вещественнозначной функции $\lambda \in C^\infty(R^n)$, $\lambda^2(x) \leq \leq 1/2$, любая производная которой ограничена в R^n. Обозначим

$$Z = \{x \in R^n | \lambda(x) = 0\}, \qquad NZ = R^n \setminus Z,$$

и предположим, что для любого α существует постоянная C_α такая, что

$$|D_x^\alpha \lambda(x)| \leq C_\alpha K^{|\alpha|-1}(x)(|\lambda(x)| + |\nabla\lambda(x)|) \tag{0.4}$$

для всех $x \in NZ$. Здесь $K(x) = (|\lambda(x)| + |\nabla\lambda(x)|)/|\lambda(x)|$. Предполагается также, что с некоторой положительной постоянной $\epsilon < 1/2$

$$K(x) \leq C|\lambda(x)|^{-\epsilon} \quad \text{для всех} \quad x \in NZ. \tag{0.5}$$

Пусть M и N - положительные постоянные. Введем обозначения

$$Z_h(M,N) = \{(x,\xi) \in R^{2n} \,|\, \lambda^2(x)\langle\xi\rangle^2 \geq N^2 \ln^2\langle\xi\rangle, \langle\xi\rangle \geq M\}, \tag{0.6}$$

$$\partial Z_h(M,N) = \{(x,\xi) \in R^{2n} \,|\, \lambda^2(x)\langle\xi\rangle^2 = N^2 \ln^2\langle\xi\rangle, \langle\xi\rangle \geq M\}. \tag{0.7}$$

Здесь $\langle\xi\rangle^2 = e^2 + |\xi|^2$. Пусть $\tau_j(t,x,\xi), j = 1,...,m,$ - нули символа $P(t,x,\tau,\xi) = P_m(t,x,\tau,\xi) + P_{m-1}(t,x,\tau,\xi) + \cdots + P_o(t,x)$ оператора P, т. е. $\tau_j(t,x,\xi), j = 1,...,m,$ - непрерывные корни уравнения

$$\tau^m + \sum_{j+|\alpha|\leq m, j<m} a_{j,\alpha}(t,x)\tau^j\xi^\alpha = 0. \tag{0.8}$$

Основным условием на оператор P является следующее :

(A) При $x \in Z$ нули $\tau_j(t,x,\xi), j = 1,...,m,$ не зависят от ξ. Существуют положительные постоянные M, N, δ такие, что для любых k, α, β найдется постоянная $C_{k,\alpha,\beta}$ такая, что

$$|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \tau_j(t,x,\xi)| \leq C_{k,\alpha,\beta}|\lambda(x)|\langle\xi\rangle^{1-|\alpha|}K^{|\beta|}(x), \tag{0.9}$$

$$|\tau_j(t,x,\xi) - \tau_l(t,x,\xi)| \geq \delta|\lambda(x)|\langle\xi\rangle, \quad j \neq l, \tag{0.10}$$

$$|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \ \mathrm{Im}\ \tau_j(t,x,\xi)| \leq C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}K^{|\beta|}(x)\ln\langle\xi\rangle \tag{0.11}$$

для всех $t \in [0,T], (x,\xi) \in Z_h(M,N)$ и всех $j, l = 1,...,m$.

Целью настоящей работы является построение фундаментального решения задачи (0.1),(0.2).

Статья написана по следующему плану. В §1 приведено эквивалентное описание условия (A) посредством нулей $\lambda_j(t,x,\xi)$ главного символа $P_m(t,x,\tau,\xi)$ и следующего условия на коэффициенты $a_{j,\alpha}(t,x)$ $\quad (j+|\alpha|\le m, j<m)$:

$$\begin{cases} |D_t^k D_x^\beta a_{j,\alpha}(t,x)| \le C_{k,\beta}|\lambda(x)|^{|\alpha|}K^{|\beta|}(x)|\ln\lambda^2(x)|^{m-j-|\alpha|}, & t\in[0,T], x\in NZ, \\ a_{j,\alpha}(t,x)=0, & t\in[0,T], x\in Z, \\ & |\alpha|\neq 0. \end{cases} \tag{0.12}$$

В §2 мы вводим специальные классы псевдодифференциальных операторов (ПДО) и символов, связанных с условием (0.9), и строим алгебру таких операторов. В §3 мы приводим задачу (0.1) - (0.2) к задаче для системы первого порядка и затем строим для последней совершенный, в смысле работ [1],[10], диагонализатор. В §4 мы конструируем фундаментальное решение для скалярного оператора. В заключительных §§5,6 формулируется и доказывается основная теорема настоящей работы.

Задача Коши для слабо гиперболического уравнения второго порядка была рассмотрена О. А. Олейник [2]. Некоторые условия корректности задачи Коши для слабо гиперболических операторов, вырождающихся по пространственным переменным, были получены Т. Мандаи [3]. В [4] Т. Нишитани привел необходимые и достаточные условия C^∞-корректности для уравнения второго порядка с одной пространственной переменной $n=1$ и с аналитическими коэффициентами. С. Тарама [5] доказал, что задача корректно поставлена, если (0.5) выполнено для всех $\epsilon>0$. Основное условие на младшие коэффициенты, предложенное в [5], имеет форму, аналогичную (0.12). Как следствие нашей конструкции параметрикса и фундаментального решения получаются корректность задачи Коши и возможность более точного определения потери гладкости. Более того, построенное фундаментальное решение позволяет исследовать вопрос распространения и ветвления сингулярностей и доказать необходимость для C^∞-корректности задачи Коши условий (0.12) на младшие коэффициенты оператора.

§1. ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ

Следующее предложение показывает, почему условие (A) может быть названо условием гиперболичности.

Предложение 1.1. *Условие (A) эквивалентно следующему :*

(T) Характеристические корни $\lambda_j(t,x,\xi), j = 1,...,m$ оператора P вещественны и с некоторыми положительными постоянными C, δ_1 удовлетворяют следующим неравенствам :

$$|\lambda_j(t,x,\xi)| \le C|\lambda(x)||\xi|, \qquad t \in [0,T], \quad x \in R^n, \tag{1.1}$$

$$|\lambda_j(t,x,\xi) - \lambda_l(t,x,\xi)| \ge \delta_1 |\lambda(x)||\xi|, \qquad t \in [0,T], \quad x \in R^n,\ j \ne l \tag{1.2}$$

и для любых k, β, j, α выполнено (0.12).

Доказательство. Во-первых докажем, что (A) влечет (T). Действительно, если $j + |\alpha| = m$, $(x,\xi) \in Z_h(M,N)$, то

$$\alpha!|D_t^k D_x^\beta a_{j,\alpha}(t,x)| = |D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \sum_{i_1<\ldots<i_{m-j}} \tau_{i_1}(t,x,\xi)\cdots\tau_{i_{m-j}}(t,x,\xi)| \le$$
$$\le C_{k,\beta} K^{|\beta|}(x)|\lambda(x)|^{m-j},$$

где постоянная $C_{k,\beta}$ не зависит от (t,x,ξ). Так как левая часть нижеследующего неравенства не зависит от ξ, мы выбираем ξ таким, что $(x,\xi) \in \partial Z_h(M,N)$ и для $j + |\alpha| = m - 1$ получаем

$$|D_t^k D_x^\beta a_{j,\alpha}(t,x)| \le C\{|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \sum_{i_1<\ldots<i_{m-j}} \tau_{i_1}(t,x,\xi)\cdots\tau_{i_{m-j}}(t,x,\xi)| +$$
$$+|\xi| \sum_{|\gamma|=m-j} |D_t^k D_x^\beta a_{j,\gamma}(t,x)|\} \le C'_{k,\beta}|\xi||\lambda(x)|^{m-j} K^{|\beta|}(x) \le$$
$$\le C_{k,\beta}|\lambda(x)|^{m-j-1}|\ln \lambda^2(x)| K^{|\beta|}(x).$$

Для оставшихся коэффициентов $a_{j,\alpha}(t,x)$ неравенства (0.12) доказываются аналогично.

Для доказательства (1.1), (1.2), мы осуществляем замену $\lambda = |\lambda(x)||\xi|\mu$, $\tau = |\lambda(x)||\xi|\gamma$, после которой уравнение для нулей главного символа и (0.8) переходят в

$$\mu^m + \sum_{0\le j<m} (\sum_{|\alpha|=m-j} (|\lambda(x)||\xi|)^{j-m} a_{j,\alpha}(t,x)\xi^\alpha)\mu^j = 0, \tag{1.3}$$

$$\gamma^m + \sum_{0\le j<m} (\sum_{|\alpha|=m-j} (|\lambda(x)||\xi|)^{j-m} a_{j,\alpha}(t,x)\xi^\alpha + B_{j+1}(t,x,\xi) + \Delta B_{j+1})\gamma^j = 0, \tag{1.4}$$

соответственно, где $x \in NZ$, $\Delta B_j = 0$, $j = 1, ..., m$, и

$$B_{j+1}(t,x,\xi) = \sum_{|\alpha| \le m-j-1} (|\lambda(x)||\xi|)^{j-m} a_{j,\alpha}(t,x)\xi^{\alpha}, \qquad j = 0, ..., m-1.$$

В соответствии с (0.12) для $(x,\xi) \in Z_h(M,N)$, $t \in [0,T]$ имеем

$$|D_t^k D_x^{\beta} D_{\xi}^{\alpha} B_{j+1}(t,x,\xi)| \le C_{k,\alpha,\beta} K^{|\beta|}(x) \langle \xi \rangle^{-|\beta|} \frac{|\ln \lambda^2(x)|}{|\lambda(x)|\langle \xi \rangle} \tag{1.5}$$

и поэтому мы рассматриваем (1.3) как возмущенное уравнение (1.4) с возмущениями $\Delta B_j = -B_j(t,x,\xi)$, $j = 1, ..., m$, в коэффициентах. Согласно (0.10) корни уравнения (1.4) аналитически зависят от возмущений $\Delta B \in C^m$ в некоторой окрестности начала координат. Далее, очевидно, что

$$|D_t^k D_x^{\beta} D_{\xi}^{\alpha} \gamma_l(t,x,\xi)| \le C_{k,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} K^{|\beta|}(x), \tag{1.6}$$

$$|\gamma_l(t,x,\xi) - \gamma_j(t,x,\xi)| \ge \delta' > 0, \qquad l \ne j, \tag{1.7}$$

$$|D_t^k D_x^{\beta} D_{\xi}^{\alpha} \ \mathrm{Im}\ \gamma_l(t,x,\xi)| \le C_{k,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|-1} K^{|\beta|}(x) (\ln\langle \xi \rangle)/|\lambda(x)|, \tag{1.8}$$

для всех $t \in [0,T]$, $(x,\xi) \in Z_h(M,N)$ и всех $j, l = 1, ..., m$.

Более того, достаточно показать, что при возмущении некоторым $\Delta B_{j+1} = -B_{j+1}(t,x,\xi)$ при отсутствии других $\Delta B_1 = \cdots = \Delta B_j = \Delta B_{j+2} = \cdots = \Delta B_m = 0$, корни уравнения

$$P(t,x,\xi;\mu) - \mu^j B_{j+1}(t,x,\xi) = 0, \tag{1.9}$$

где $P(t,x,\xi;\mu) = (\mu - \gamma_1(t,x,\xi)) \cdots (\mu - \gamma_m(t,x,\xi))$, наследуют свойства (1.6)-(1.8) (быть может с новыми постоянными M, N, δ', $C_{k,\alpha,\beta}$). Действительно, в силу (1.7) имеем

$$\mu_l(t,x,\xi) = \gamma_l(t,x,\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(l)}(t,x,\xi)(-\Delta B_{j+1})^n, \qquad l = 1, ..., m, \tag{1.10}$$

где

$$C_n^{(l)}(t,x,\xi) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-\gamma_l|=\rho} \frac{(w - \gamma_l(t,x,\xi))(wP'_w(t,x,\xi;w) - jP(t,x,\xi;w))w^{jn-1}}{(P(t,x,\xi;w))^{n+1}} dw =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}}\left\{\left(\frac{w-\gamma_l(t,x,\xi)}{P(t,x,\xi;w)}\right)^{n+1} w^{jn-1}(wP'_w(t,x,\xi;w)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-jP(t,x,\xi;w))\right\}\right]_{w=\gamma_l(t,x,\xi)}. \tag{1.11}$$

Поэтому, для $0 < 2\rho < \delta'$ мы имеем неравенства

$$|C_n^{(l)}(t,x,\xi)| \le C\,2^{-n} \text{ для всех } t\in[0,T],\ (x,\xi)\in Z_h(M,N), \tag{1.12}$$

в которых постоянная C не зависит от t,x,ξ,l,j. Следовательно, радиус сходимости r_{j+1} рядов в (1.10) ($|\Delta B_{j+1}| < r_{j+1}$) не зависит от $t\in[0,T],(x,\xi)\in Z_h(M,N),l,j$, при условии, что N достаточно велико. Более того, легко видеть, что при $\Delta B_{j+1} = -B_{j+1}(t,x,\xi)$

$$|\mu_l(t,x,\xi)-\mu_j(t,x,\xi)| \ge \delta_2 > 0, \qquad l\neq j, \tag{1.13}$$

$$|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \mu_l(t,x,\xi)| \le C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}K^{|\beta|}(x) \tag{1.14}$$

для всех $t\in[0,T],(x,\xi)\in Z_h(M,N)$, быть может с новой постоянной N. Действительно, мы можем оценить производные $|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \mu_l(t,x,\xi)$, либо оценивая производные коэффициентов $C_n^{(l)}(t,x,\xi)$, либо с помощью формулы производной неявной функции индукцией по $r = k+|\alpha|+|\beta|$. Более того

$$|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha\ \mathrm{Im}\ \mu_l(t,x,\xi)| \le |D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha\ \mathrm{Im}\ \gamma_l(t,x,\xi)| +$$

$$+|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha B_{j+1}(t,x,\xi)\sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(l)}(t,x,\xi)B_{j+1}^{n-1}(t,x,\xi)| \le$$

$$\le C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}K^{|\beta|}(x)(\ln\langle\xi\rangle)/(\langle\xi\rangle|\lambda(x)|). \tag{1.15}$$

Таким образом, для корней уравнения (1.3) и , следовательно, для нулей $\{\lambda_l(t,x,\xi)\}_1^m$ главного символа, справедливы неравенства, соответствующие (0.9), (0.10), и более того

$$|\ \mathrm{Im}\ \lambda_l(t,x,\xi)| \le C\ln\langle\xi\rangle, \qquad l=1,...,m$$

для всех $t\in[0,T],(x,\xi)\in Z_h(M,N)$. Если теперь мы предположим, что для некоторых $t_o,x_o\in NZ,\xi_o\neq 0,i_o,$ $\mathrm{Im}\ \lambda_{i_o}(t_o,x_o,\xi_o)\neq 0$, то для достаточно больших $|\xi|$ точка $(x_o,|\xi|\xi_o)$ войдет в зону $Z_h(M,N)$ и, в виду однородности по переменной ξ функции $\lambda_{i_o}(t,x,\xi)$, последнее неравенство нарушается при $|\xi| \to \infty$. Поэтому, все $\lambda_i(t,x,\xi)$ вещественны. Импликация (A) $\Rightarrow$ (T) доказана.

Доказательство импликации (T) $\Rightarrow$ (A) почти идентично вышеизложенному: мы рассматриваем (1.4) как возмущенное уравнение (1.3). Этим завершается доказательство предложения.

§2. КЛАССЫ СИМВОЛОВ

Пусть J компакт в $R^d, t \in J$, обозначим через $S^m_{\rho,\delta}$ пространство Хермандера символов псевдодифференциальных операторов. В дальнейшем мы всегда предполагаем, что $\delta + \epsilon < 1/2 < \rho \leq 1$.

Определение 2.1. Для вещественных чисел m_1, m_2, m_3, ρ, δ, N через $S_{\rho,\delta}\{m_1, m_2, m_3\}_N$ обозначим пространство всех C^∞-функций $a(t,x,\xi)$, определенных на $J \times R^n_x \times R^n_\xi$ таких, что для некоторых ρ_1, δ_1, m

$$a \in C^\infty_t(J; S^m_{\rho_1,\delta_1}(R^n_x \times R^n_\xi)) \tag{2.1}$$

и для любых k, α, β существует положительная постоянная $C_{k,\alpha,\beta}$ такая, что

$$|D^k_t D^\beta_x D^\alpha_\xi a(t,x,\xi)| \leq C_{k,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{m_1-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} |\lambda(x)|^{m_2} K^{m_3+|\beta|}(x) \tag{2.2}$$

для всех $t \in J, (x,\xi) \in Z_h(M,N)$.

Положим $S\{m_1, m_2, m_3\}_N = S_{1,0}\{m_1, m_2, m_3\}_N$ и

$$\mathcal{H}_{\rho,\delta}\{m_1, m_2, m_3\}_N = \bigcap_\nu S_{\rho,\delta}\{m_1 - \nu, m_2 - \nu, m_3\}_N,$$

$$Z_{pd}(M,N) = \{(x,\xi) | \lambda^2(x)\langle\xi\rangle^2 \leq N^2 \ln^2\langle\xi\rangle,\ \langle\xi\rangle \geq M\}.$$

Предложение 2.1. *(i) Пусть $a_\nu(t,x,\xi) \in S_{\rho,\delta}\{m_{1(\nu)}, m_2, m_3\}_N$, $m_{1(\nu)} \downarrow -\infty$, где $\nu \to \infty$, и пусть*

$$a_\nu(t,x,\xi) = 0 \quad \textit{для всех} \quad t \in J, (x,\xi) \in Z_{pd}(M,N), \qquad \nu = 0, 1, \ldots \tag{2.3}$$

Тогда существует символ $a(t,x,\xi) \in S_{\rho,\delta}\{m_{1(0)}, m_2, m_3\}_N$ такой, что

$$a \sim a_o + a_1 + a_2 + \cdots \quad mod\, C^\infty_t(J; S^{-\infty})(= C^\infty(S^{-\infty})) \tag{2.4}$$

в том смысле, что

$$a - \sum_{\nu=0}^{V} a_\nu \in S_{\rho,\delta}\{m_{1(V)}, m_2, m_3\}_N \quad \text{для всех} \quad V, \tag{2.5}$$

и любые символы со свойством (2.5) отличаются на элемент $C^\infty(S^{-\infty})$, при условии, что они совпадают на $J \times Z_{pd}(M,N)$.

(ii) Пусть $b_\nu(t,x,\xi) \in S_{\rho,\delta}\{m_1 - \nu, m_2 - \nu, m_3\}_N$, $\nu = 0, 1, \ldots$, и предположим, что

$$b_\nu(t,x,\xi) = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in J, (x,\xi) \in Z_{pd}(M,N), \quad \nu = 0, 1, \ldots. \tag{2.6}$$

Тогда существует символ $b(t,x,\xi) \in S_{\rho,\delta}\{m_1, m_2, m_3\}_N$, для которого имеет место разложение

$$b \sim b_o + b_1 + b_2 + \cdots \quad mod\, \mathcal{H}_{\rho,\delta}\{m_1, m_2, m_3\}_N \tag{2.7}$$

в том смысле, что

$$b - \sum_{\nu=0}^{V-1} b_\nu \in S_{\rho,\delta}\{m_1 - V, m_2 - V, m_3\}_N \quad \text{для всех} \quad V \tag{2.8}$$

и любые символы со свойством (2.8) отличаются на элемент из класса $\mathcal{H}_{\rho,\delta}\{m_1, m_2, m_3\}_N$.

Доказательство. Пусть $\chi(z)$ есть C^∞-функция на R^1 такая, что $0 \le \chi(z) \le 1$ и $\chi(z) = 1$ для $|z| \le 1$, в то время как для $|z| \ge 2$ $\chi(z) = 0$. Определим функции

$$\psi_{\epsilon_\nu}(\xi) = 1 - \chi(\epsilon_\nu \langle\xi\rangle), \quad \gamma_{\epsilon_\nu}(x,\xi) = 1 - \chi(\epsilon_\nu \lambda^2(x) \langle\xi\rangle^2) \tag{2.9}$$

и положим

$$a(t,x,\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_{\epsilon_\nu}(\xi) a_\nu(t,x,\xi), \tag{2.10}$$

$$b(t,x,\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\epsilon_\nu}(x,\xi) b_\nu(t,x,\xi). \tag{2.11}$$

Очевидно, что при подходящем выборе последовательности $\{\epsilon_\nu\}_0^\infty$, $1 \ge \epsilon_o > > \epsilon_1 > \cdots > \epsilon_\nu > \cdots \to 0$, ряд (2.10) будет абсолютно сходящимся и (2.5) будет выполненным. Предположим теперь, что a и $\tilde{a}$ - два символа со свойством (2.5), что $a(t,x,\xi) = \tilde{a}(t,x,\xi)$ для всех $(x,\xi) \in Z_{pd}(M,N)$. Тогда $(a - \tilde{a}) \in$

$\in S_{\rho,\delta}\{m_{1(V)}, m_2, m_3\}_N$ для всех V, и поэтому

$$|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha (a(t,x,\xi) - \bar{a}(t,x,\xi))| \leq C_{k,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{m_{1(V)}-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} |\lambda(x)|^{m_2} (K(x))^{m_3+|\beta|} \leq$$

$$\leq C_{k,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{m_{1(V)}-\rho|\alpha|+(\delta+\epsilon)|\beta|+\epsilon m_3+|m_2|} \quad \text{для всех} \quad (x,\xi) \in Z_h(M,N).$$

Последнее неравенство, ввиду $m_{1(V)} \downarrow -\infty$, доказывает пункт (i) предложения.

Для доказательства части (ii) мы выбираем последовательность $\{\epsilon_\nu\}_0^\infty$, $1 \geq \epsilon_o > \epsilon_1 > \cdots > \epsilon_\nu > \cdots \to 0$ в (2.11) так, что для любых j, k, α, β, $k + |\alpha| + |\beta| \leq j$, $j = 0, 1, \dots$, имеем

$$|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha (\gamma_{\epsilon_j}(x,\xi) b_j(t,x,\xi))| \leq 2^{-j} \langle\xi\rangle^{m_1-j+1-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} |\lambda(x)|^{m_2-j+1} K^{m_3+|\beta|}(x)$$

для всех $(x,\xi) \in Z_h(M,N)$, $t \in J$. Поэтому для остатка ряда (2.11), имеем

$$|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \sum_{j=r+1}^{\infty} \gamma_{\epsilon_j}(x,\xi) b_j(t,x,\xi)| \leq$$

$$\leq \langle\xi\rangle^{m_1-r-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} |\lambda^{m_2-r}(x)| K^{m_3+|\beta|}(x) 2^{-r} \sum_{j=0}^{\infty} (2\langle\xi\rangle|\lambda(x)|)^{-j} \leq$$

$$\leq C_{k,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{m_1-r-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} |\lambda^{l_2-r}(x)| K^{m_3+|\beta|}(x).$$

Таким образом, $\sum_{j=r+1}^\infty \gamma_{\epsilon_j} b_j \in S_{\rho,\delta}\{m_1 - r, m_2 - r, m_3\}_N$ для всех $r \geq 0$. Этим завершается доказательство предложения.

Для $c(y,\eta) \in S_{\rho,\delta}$ и для мультииндексов α и β мы используем обозначение $c_{(\beta)}^{(\alpha)}(y,\eta) = i^{|\alpha|} D_\eta^\alpha D_y^\beta c(y,\eta)$ и определяем (см. [7]) осциллирующий интеграл $Os - \iint e^{-iy\cdot\eta} c(y,\eta)(2\pi)^{-n} dy d\eta$ следующим образом :

$$Os - \iint e^{-iy\cdot\eta} c(y,\eta)(2\pi)^{-n} dy d\eta = \lim_{\Theta\to 0} (2\pi)^{-n} \iint e^{-iy\cdot\eta} \psi(\Theta y, \Theta\eta) c(y,\eta) dy d\eta,$$

где функция $\psi(y,\eta)$ выбрана из пространства Шварца $\mathcal{S}$ быстро убывающих функций в R^{2n} и $\psi(0,0) = 1$.

Предложение 2.2. *Для* $a(t,x,\xi) \in S_{\rho,\delta}\{m_1, m_2, m_3\}_N$, $b(t,x,\xi) \in S_{\rho,\delta}'\{m_1', m_2', m_3'\}_N$ *определим символ* $a \circ b(t,x,\xi)$ *следующим образом :*

$$a \circ b(t,x,\xi) = Os - \iint e^{-iy\cdot\eta} a(t,x,\xi+\eta) b(t,x+y,\eta)(2\pi)^{-n} dy d\eta.$$

Предположим, что либо

$$a(t,x,\xi)=0 \quad \text{для всех} \quad t\in J,\ (x,\xi)\in Z_{pd}(M,N) \tag{2.12}$$

либо

$$b(t,x,\xi)=0 \quad \text{для всех} \quad t\in J,\ (x,\xi)\in Z_{pd}(M,N). \tag{2.13}$$

Тогда

$$a\circ b(t,x,\xi)\in S_{\rho,\delta}\{m_1+m_1',m_2+m_2',m_3+m_3'\}_N \tag{2.14}$$

и для псевдодифференциальных операторов $a(t,x,D_x), b(t,x,D_x)$ *имеем*

$$a(t,x,D_x)b(t,x,D_x)=a\circ b(t,x,D_x) \tag{2.15}$$

и

$$a\circ b(t,x,\xi)\sim\sum_\alpha a^{(\alpha)}(t,x,\xi)b_{(\alpha)}(t,x,\xi)/\alpha! \quad mod\, C^\infty(S^{-\infty}). \tag{2.16}$$

Доказательство. Утверждения (2.15) и (2.16) следуют из Теоремы D [7]. Далее, для любого α, ввиду (0.5), имеем

$$K(x)\le C(N\ln\langle\xi\rangle)^{-\epsilon}\langle\xi\rangle^{\epsilon} \quad \text{для всех} \quad (x,\xi)\in Z_h(M,N). \tag{2.17}$$

$$a^{(\alpha)}b_{(\alpha)}\in S_{\rho,\delta}\{m_1+m_1'-\rho|\alpha|+\delta|\alpha|,m_2+m_2',m_3+m_3'+|\alpha|\}_N,$$

$$a^{(\alpha)}(t,x,\xi)b_{(\alpha)}(t,x,\xi)=0 \quad \text{для всех} \quad (x,\xi)\in Z_{pd}(M,N),\ t\in J.$$

Поэтому утверждение (2.14) следует из пункта (i) Предложения 2.1. Предложение доказано.

Если $A(t,x,D_x)$ - $m\times m$ матричный псевдодифференциальный оператор, то запись $A(t,x,\xi)\in S_{\rho,\delta}\{m_1,m_2,m_3\}_N$ означает, что элементы $A_{i,j}(t,x,\xi)$ символа оператора $A(t)(=A(t,x,D_x))$ принадлежат указанному классу символов для всех $i,j=1,\dots,m$.

Предложение 2.3. *Пусть задана последовательность матричных символов* $N^{(\nu)}(t,x,\xi)\in S_{\rho,\delta}\{-\nu,-\nu,0\}_N,\ \nu=1,2,\dots,$ *и пусть*

$$N^{(\nu)}(t,x,\xi)=0 \quad \text{для всех} \quad t\in J,(x,\xi)\in Z_{pd}(M,N). \tag{2.17}$$

Тогда существует оператор $N(t)$ *с символом* $N(t,x,\xi)$, *принадлежащим классу* $S_{\rho,\delta}\{0,0,0\}_N$ *и таким, что*

$$N(t) \sim I + N^{(1)}(t) + N^{(2)}(t) + \cdots \quad mod\,\mathcal{H}_{\rho,\delta}\{0,0,0\}_N.$$

Более того, для $N(t)$ *существует параметрикс* $N^{\#}(t)$ *такой, что* $N^{\#}(t,x,\xi) \in$ $\in S_{\rho,\delta}\{0,0,0\}_N$ *и* $N^{\#}(t)N(t) - I,\ N(t)N^{\#}(t) - I \in C^{\infty}(\Psi^{-\infty})$.

Доказательство. Существование символа $N(t,x,\xi) \in S_{\rho,\delta}\{0,0,0\}_N$ следует из пункта (ii) Предложения 2.1. Следовательно

$$||I - N(t,x,\xi)|| \le C/(N\ln\langle\xi\rangle) \quad \text{для всех} \quad (x,\xi) \in Z_h(M,N)$$

и поэтому $\det\, N(t,x,\xi) \neq 0$ для всех $t \in J, (x,\xi) \in R^{2n}$, для достаточно больших M. Конструкция параметрикса $N^{\#}(t)$ отличается от хорошо известной в теории псевдодифференциальных операторов в основном только использованием Предложения 2.1. Предложение доказано.

§3. ПРИВЕДЕНИЕ К СИСТЕМЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Для вектора $u = {}^t(u, D_t u, ..., D_t^{m-1}u)$ из уравнения (0.1) получаем систему $D_t\mathcal{U} =$ $= A\mathcal{U} + F_1$, где $F_1 = {}^t(0, ..., 0, f)$. Положим

$$H(x,D_x) = \begin{pmatrix} h^{m-1}(x,D_x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h^{m-2}(x,D_x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где $h(x,D_x)$ - есть псевдодифференциальный оператор с символом

$$h(x,\xi) = \chi(\frac{\lambda^2(x)\langle\xi\rangle^2}{N^2\ln^2\langle\xi\rangle})\ln\langle\xi\rangle + (1 - \chi(\frac{\lambda^2(x)\langle\xi\rangle^2}{N^2\ln^2\langle\xi\rangle}))|\lambda(x)|\langle\xi\rangle, \tag{3.2}$$

где функция χ была определена в доказательстве Предложения. Далее, пусть $H^{\#}(x,D_x)$ - параметрикс оператора $H(x,D_x)$, т. е.

$$H^{\#}(x,D_x)H(x,D_x) - I,\ H(x,D_x)H^{\#}(x,D_x) - I \in C^{\infty}(\Psi^{-\infty})$$

Тогда для вектор-функции $U = H(x,D_x)\mathcal{U}$ уравнение (0.1) приводит к системе

$$D_t U = A_o U + R_1 \mathcal{U} + F_2, \tag{3.3}$$

где $R_1 \in C^\infty(\Psi^{-\infty})$, $F_2 = HF_1$, $A_o = HAH^\#$.

Теперь мы упорядочим корни уравнения (0.8) следующим образом :

$$\mathrm{Re}\ \tau_1(t,x,\xi) < \ \mathrm{Re}\ \tau_2(t,x,\xi) < \cdots < \ \mathrm{Re}\ \tau_m(t,x,\xi), t \in [0,T], (x,\xi) \in Z_h(M,N).$$

Далее, выбираем постоянные $d_1 < d_2 < \cdots < d_m$ и рассматриваем функции

$$\varphi_k(t,x,\xi) = d_k \chi\Big(\frac{\lambda^2(x)\langle\xi\rangle^2}{N^2 \ln^2\langle\xi\rangle}\Big) \ln\langle\xi\rangle + \Big(1 - \chi\Big(\frac{\lambda^2(x)\langle\xi\rangle^2}{N^2 \ln^2\langle\xi\rangle}\Big)\Big)\tau_k(t,x,\xi), \quad k = 1, ..., m. \tag{3.4}$$

По системе $\{\varphi_k(t,x,\xi)/h(x,\xi)\}_1^m$ строим матрицу Вандермонда $M^\#(t,x,\xi) =$ $= V(\varphi_1/h, \varphi_2/h, ..., \varphi_m/h)$ и пусть $M(t,x,D_x)$ - параметрикс для $M^\#(t,x,D_x)$. Тогда вектор $V = M(t)U$будет решением системы

$$D_t V = MA_o M^\# V - iM_t M^\# V + R_2 \mathcal{U} + F_3,$$

где $R_2 \in C^\infty(\Psi^{-\infty})$. Поэтому мы рассматриваем следующую систему :

$$(D_t - \mathcal{D}(t) + \mathcal{B}(t))V = F, \tag{3.5}$$

в которой $\mathcal{D}(t) - \mathcal{B}(t) = MA_o M^\# + iM_t M^\#$ и $\mathcal{D}(t)$ - оператор с диагональным символом $\mathcal{D}(t,x,\xi)$, с элементами $\varphi_1, ..., \varphi_m$, а $\mathcal{B}(t)$ - оператор с символом $\mathcal{B}(t,x,\xi) \in S\{0,0,0\}_N$ таким, что для любых k, α, β выполняются неравенства

$$||D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \mathcal{B}(t,x,\xi)|| \le C_{k,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{\varepsilon|\beta|-|\alpha|} \ln\langle\xi\rangle \tag{3.6}$$

для всех $t \in [0,T], (x,\xi) \in Z_{pd}(M, 2N)$.

Теорема 3.1. *Существуют операторы* $N(t), F(t), R(t)$ *(с символами* $N(t,x,\xi)$, $F(t,x,\xi)$, $R(t,x,\xi)$, *соответственно) такие, что*

$$(D_t - \mathcal{D}(t) + \mathcal{B}(t))N(t) = N(t)(D_t - \mathcal{D}(t) + F(t) + R(t)) \quad mod\, C^\infty(\Psi^{-\infty}) \tag{3.7}$$

и

(i) $N(t,x,\xi) \in S\{0,0,0\}_N$, $|det\, N(t,x,\xi)| > const > 0$ *для всех* $t \in [0,T], (x,\xi) \in R^{2n}$,

$$N(t,x,\xi) = I \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T], (x,\xi) \in Z_{pd}(M,N);$$

(ii) $F(t,x,\xi)$ *есть диагональная матрица,* $F(t,x,\xi) \in S\{0,0,0\}_N$,

$$F(t,x,\xi) = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T], (x,\xi) \in Z_{pd}(M,N);$$

(iii) $R((t,x,\xi) \in \mathcal{H}\{0,0,0\}_N$, *и для любых* k,α,β *неравенства*

$$||D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha R((t,x,\xi)|| \leq C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\epsilon|\beta|-|\alpha|}\ln\langle\xi\rangle \tag{3.8}$$

выполняются для всех $t \in [0,T], (x,\xi) \in Z_{pd}(M,2N)$.

Доказательство. Мы ищем матрицы $N(t,x,\xi)$, $F(t,x,\xi)$, имеющие представления :

$$N(t,x,\xi) \sim I + N^{(1)}(t,x,\xi) + N^{(2)}(t,x,\xi) + \cdots \quad mod\,\mathcal{H}\{0,0,0\}_N,$$

$$\begin{cases} N^{(\nu)}(t,x,\xi) = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T], (x,\xi) \in Z_{pd}(M,N), \nu = 1,2,... \\ N^{(\nu)}(t,x,\xi) \in S\{-\nu,-\nu,0\}_N. \end{cases} \tag{3.9}$$

$$F(t,x,\xi) \sim F^{(o)}(t,x,\xi) + F^{(1)}(t,x,\xi) + \cdots \quad mod\,\mathcal{H}\{0,0,0\}_N.$$

$$\begin{cases} F^{(\nu)}(t,x,\xi) = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T], (x,\xi) \in Z_{pd}(M,N), \nu = 0,1,... \\ F^{(\nu)}(t,x,\xi) \in S\{-\nu,-\nu,0\}_N. \end{cases} \tag{3.10}$$

Пусть $F^{(o)}(t,x,\xi) = \gamma_1(x,\xi)\,\mathrm{diag}[\mathcal{B}(t,x,\xi)]$. Здесь diag $[\mathcal{B}]$ обозначает диагональную часть матрицы $\mathcal{B}$, а функция $\gamma_1(x,\xi)$ была определена в (2.9). Положим

$$N^{(1)}(t,x,\xi) = \gamma_1(x,\xi)(n_{j,k}^{(1)}(t,x,\xi)),$$

где

$$n_{j,k}^{(1)} = \begin{cases} b_{j,k}(t,x,\xi)/(\varphi_j(t,x,\xi) - \varphi_k(t,x,\xi)),\ j \neq k, \\ 0, \quad j = k, \end{cases}$$

а $b_{j,k}(t,x,\xi)$ - элементы матрицы $\mathcal{B}(t,x,\xi)$. Ясно, что (3.9) с $\nu = 1$ и (3.10) с $\nu = 0$ выполнены. Если теперь для $\nu = 1,2,...$ положим

$$\mathcal{B}^{(\nu+1)}(t) = \mathcal{B}(t)(\gamma_1(x,D_x) - 1) + (D_t - \mathcal{D}(t) + \mathcal{B}(t))(\sum_{\mu=1}^{\nu+1} N^{(\mu)}(t) + I) -$$

$$-(I + \sum_{\mu=1}^{\nu+1} N^{(\mu)}(t))(D_t + \mathcal{D}(t) + \sum_{\mu=0}^{\nu} F^{(\mu)}(t)), \quad \nu = 0,1,...,$$

$$F^{(\nu)} = \mathrm{diag}[\mathcal{B}^{(\nu)}], \qquad N^{(\nu+1)}(t,x,\xi) = (n_{j,k}^{(\nu+1)}(t,x,\xi)),$$

$$n_{j,k}^{(\nu+1)}(t,x,\xi) = \begin{cases} b_{j,k}^{(\nu)}(t,x,\xi)/(\varphi_j(t,x,\xi) - \varphi_k(t,x,\xi)), \quad j \neq k, \\ 0, \quad j = k. \end{cases}$$

тогда по индукции мы получим (3.9),(3.10) для всех $\nu = 0, 1, \ldots$. С помощью Предложений 2.1, 2.2 и 2.3 мы строим символы $N(t, x, \xi)$, $F(t, x, \xi)$ такие, что для оператора

$$\tilde{R}(t) = (D_t - \mathcal{D}(t) + \mathcal{B}(t))N(t) - N(t)(D_t - \mathcal{D}(t) + F(t))$$

имеет место включение $\tilde{R}(t, x, \xi) \in \mathcal{H}\{0, 0, 0\}_N$ и $\tilde{R}(t, x, \xi) = \mathcal{B}(t, x, \xi)$ для всех $t \in \in [0, T], (x, \xi) \in Z_{pd}(M, N)$. Пусть теперь $N^{\#}(t)$ - параметрикс оператора $N(t)$. Мы полагаем $R(t) = N^{\#}(t)\tilde{R}(t)$. Теорема доказана.

§4. ПОСТРОЕНИЕ ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ

Очевидно, что можно предполагать, что функции $\varphi_k(t, x, \xi)$ (3.4) определены для всех $t \in [0, T], x \in R^n, \xi \in R^n : \langle\xi\rangle \geq M/2$. Обозначим через $\lambda(t, x, \xi)$ вещественную часть одной из функций $\chi(M/\langle\xi\rangle)\varphi_k(t, x, \xi)$, а через d - соответствующую постоянную d_k из (3.4), k=1,...,m. Рассмотрим далее следующую задачу Коши для системы Гамильтона :

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = -\nabla_\xi \lambda(t, q, p), & \dfrac{dp}{dt} = \nabla_x \lambda(t, q, p) \text{ на } 0 \leq t \leq T_o \\ q|_{t=s} = y, & p|_{t=s} = \xi, \quad s \in [0, T_o]. \end{cases} \tag{4.1}$$

Согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений решение $(q(t, s, y, \xi), p(t, s, y, \xi))$ задачи (4.1) существует для всех $(t, s) \in J = [0, T_o] \times \times [0, T_o], y \in R^n, \xi \in R^n$, если T_o достаточно мало.

Лемма 4.1. *Существуют постоянные T_o, C, C_1, C_2 такие, что*

(i) если $(y, \xi) \in Z_{pd}(M, N/2)$, то $(q(t, s, y, \xi), p(t, s, y, \xi)) \in Z_{pd}(M/2, N)$, а если $(y, \xi) \in Z_h(2M, N/2)$, то

$$(q(t, s, y, \xi), p(t, s, y, \xi)) \in Z_h(M, N/4) \quad \text{для всех} \quad (t, s) \in J;$$

(ii) если $(y, \xi) \in Z_{pd}(2M, N/2)$, то для всех $(t, s) \in J$

$$p(t, s, y, \xi) = \xi, \quad q(t, s, y, \xi) = y - d(t - s)\nabla_\xi \ln\langle\xi\rangle;$$

(iii) если $(y, \xi) \in Z_h(2M, N/2)$, то для всех $(t, s) \in J$

$$|q(t, s, y, \xi) - y| \leq C|\lambda(y)|, \quad |p(t, s, y, \xi) - \xi| \leq C|\lambda(y)|K(y)\langle\xi\rangle,$$

$$C_1^{-1}|\lambda(y)| \leq |\lambda(q(t, s, y, \xi))| \leq C_1|\lambda(y)|, \quad C_2^{-1}K(y) \leq K(q(t, s, y, \xi)) \leq C_2K(y);$$

(iv) $p(t, s, y, \xi) - \xi \in S\{1, 1, 1\}_{N/2}, \qquad q(t, s, y, \xi) - y \in S\{0, 1, 0\}_{N/2}.$

Доказательство. Существует постоянная C_3 такая, что

$$\sum_{|\alpha|\leq 2} |\lambda^{(\alpha)}(y)| \leq C_3 \quad \text{для всех} \quad y \in R^n.$$

Поэтому $|q(t) - y| \leq C_4 T_o$, $|p(t) - \xi| \leq C_4 T_o \langle\xi\rangle$. Таким образом, для любого $\delta > 0$ существует T_o такое, что

$$(1-\delta)\langle\xi\rangle \leq \langle p(t,s,y,\xi)\rangle \leq (1+\delta)\langle\xi\rangle \quad \text{для всех} \quad (t,s) \in \dot{J},\ (y,\xi) \in R^{2n}.$$

Далее

$$|q(t) - y| \leq |\int_s^t |\nabla_\xi \lambda(\tau, q(\tau), p(\tau))| d\tau| \leq$$

$$\leq |\int_s^t \{C_5 \langle p(\tau)\rangle^{-1} + C_6 |\lambda(q(\tau))|\} d\tau| \leq |t-s|(C_7 \langle\xi\rangle^{-1} +$$

$$+ C_4 C_6 |\lambda(y)|) + C_8 |\int_s^t |q(\tau) - y| d\tau|.$$

Отсюда следует

$$|q(t) - y| \leq C_9 |t-s| (\langle\xi\rangle^{-1} + |\lambda(y)|) \quad \text{для всех} \quad (t,s) \in J,\ (y,\xi) \in R^{2n},$$

если T_o достаточно мало.

Если теперь $(y,\xi) \in Z_{pd}(M, N/2)$, то

$$|\lambda(q(t))| \leq C_3 |q(t) - y| + |\lambda(y)| \leq C_3 C_9 |t-s| (1+\delta) \langle p(t)\rangle^{-1} +$$

$$+ (C_3 C_9 |t-s| + 1) \langle\xi\rangle^{-1} (N/2) \ln\langle\xi\rangle,$$

что означает, что для любой положительной постоянной $\delta_1 > 0$

$$|\lambda(q(t))| \langle p(t)\rangle \leq (C_4 C_9 |t-s|(1+\delta) + (N/2)(C_4 C_9 |t-s| + 1) \times$$

$$\times (1+\delta)(1+\delta_1)) \ln\langle p(t)\rangle \leq N \ln\langle p(t)\rangle,$$

если T_o достаточно мало. Далее, для $(y,\xi) \in Z_h(2M, N/2)$ имеем

$$|\lambda(y)| \leq C_3 |q(t) - y| + |\lambda(q(t))| \leq C_3 C_9 |t-s| (\langle\xi\rangle^{-1} + |\lambda(y)|) +$$

$$+ |\lambda(q(t))| \leq |\lambda(q(t))| + 5 C_3 C_9 |t-s| |\lambda(y)|,$$

что приводит к неравенству $|\lambda(q(t))| \geq (2/3)|\lambda(y)|$. Следовательно

$$|\lambda(q(t))|\langle p(t)\rangle \geq (2/3)(1-\delta)\langle\xi\rangle|\lambda(y)| \geq (N/4)\ln\langle p(t)\rangle,$$

если T_o достаточно мало. Это доказывает (i).

Утверждение (ii) следует из (i). Для доказательства (iii) мы замечаем, что $(y,\xi) \in Z_h(2M, N/2)$

$$|\lambda(q(t))| \leq (1 + 2C_3C_9|t-s|)|\lambda(y)| \leq C_{10}|\lambda(y)|,$$

если T_o достаточно мало. Далее, для любого $\alpha, |\alpha| = 1$, имеем

$$|\lambda^{(\alpha)}(q(t))| \leq C_3|q(t) - y| + |\lambda^{(\alpha)}(y)| \leq 2C_3C_9|t-s||\lambda(y)| + |\lambda^{(\alpha)}(y)|.$$

Следовательно

$$|\lambda^{(\alpha)}(q(t))/\lambda(q(t))| \leq C_{11}|t-s| + C_{10}|\lambda^{(\alpha)}(y)/\lambda(y)|,$$

что приводит к неравенству $K(q(t)) \leq C_{12}K(y)$. Аналогично

$$|\lambda^{(\alpha)}(y)/\lambda(y)| \leq C_{13} + C_{13}|\lambda^{(\alpha)}(q(t))/\lambda(q(t))|.$$

Утверждение (iii) доказано. Утверждение (iv) есть следствие (i)-(iii). Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Существуют положительные постоянные T_o и ϵ_o такие, что*

$$||\partial q(t,s,y,\xi)/\partial y - I|| \leq 1 - \epsilon_o \quad \text{для всех} \quad (y,\xi) \in R^{2n}, (t,s) \in J.$$

Более того, у отображения $x = q(t,s,y,\xi)$: $R^n_y \ni y \mapsto x \in R^n_x$, в котором t,s,ξ рассматриваются как параметры, существует обратное отображение $y = y(t,s,x,\xi)$ такое, что $y(t,s,x,\xi) - x \in S\{0,1,0\}_{N/3}$,

$$y(t,s,x,\xi) = x + d(t-s)\nabla_\xi \ln\langle\xi\rangle \quad \text{для всех} \quad (x,\xi) \in Z_{pd}(M, N/3),\ (t,s) \in J,$$

$$||\partial y(t,s,x,\xi)/\partial x - I|| \leq (1-\epsilon_o)/\epsilon_o \quad \text{для всех} \quad (x,\xi) \in R^{2n},\ (t,s) \in J.$$

Доказательство. Настоящая лемма является непосредственным следствием Леммы 4.1 и теоремы о неявной функции.

Теперь мы переходим к построению фазовой функции. С этой целью рассматриваем следующую задачу Коши для уравнения эйканала :

$$\begin{cases} \partial_t \Phi - \lambda(t, x, \nabla_x \Phi) = 0 & \text{на } 0 \le t \le T_o, \\ \Phi(s, s, x, \xi) = x \cdot \xi, & s \in [0, T_o]. \end{cases} \tag{4.2}$$

Лемма 4.3. *Существует постоянная T_o такая, что задача (4.2) имеет единственное решение $\Phi(t, s, x, \xi)$ на J, и, более того*

$$\Phi(t, s, x, \xi) = x \cdot \xi + d(t - s) \ln\langle\xi\rangle \quad \text{для всех} \quad (x, \xi) \in Z_h(M, N)(M, N/2), \tag{4.3}$$

$$|\nabla_x \Phi(t, s, x, \xi) - \xi| \le C|t - s|\, K(x)\, |\lambda(x)| \langle\xi\rangle, \quad (x, \xi) \in Z_h(M, N/2), (t, s) \in J, \tag{4.4}$$

$$||\nabla_x \nabla_\xi \Phi(t, s, x, \xi) - I|| \le C|t - s|\, K(x)\, |\lambda(x)|, \quad (x, \xi) \in Z_h(M, N/2), \, (t, s) \in J, \tag{4.5}$$

$$\Phi(t, s, x, \xi) - x \cdot \xi \in S\{1, 1, 0\}_{N/2}. \tag{4.6}$$

Доказательство. Пусть $y = y(t, s, x, \xi)$ - отображение из Леммы 4.2. Определим функцию $u = u(t, s, y, \eta)$ следующим образом :

$$u(t, s, y, \eta) = y \cdot \eta + \int_s^t [\lambda - p\nabla_\xi \lambda](\tau, q(\tau, s, y, \eta), p(\tau, s, y, \eta)) d\tau.$$

Тогда фазовая функция может быть задана формулой $\Phi(t, s, x, \xi) = u(t, s, y(t, s, x, \xi), \xi)$. Утверждения (4.4) - (4.6) являются следствиями последней формулы и Лемм 4.1 - 4.2. Лемма доказана.

Следствие 4.1. Существуют $T_o, \epsilon_o, \epsilon_o'$ такие, что функции $\Phi(t, s, x, \xi)$ удовлетворяют следующим условиям :

$$\Phi(t, s, x, \xi) - x \cdot \xi \in C^\infty(S^{-\infty})(J : S^1_{1,\epsilon}),$$

$$|\nabla_x \Phi(t, s, x, \xi) - \xi| \le (1 - \epsilon_o)|\xi| + C \quad (0 < \epsilon_o \le 1, C > 0),$$

$$||\nabla_x \nabla_\xi \Phi(t, s, x, \xi) - I|| \le 1 - \epsilon_o' \qquad (0 < \epsilon_o' \le 1).$$

Таким образом, функция $\Phi(t, s, x, \xi)$ удовлетворяет всем условиям, предъявляемым к фазовым функциям в работе [7].

§5. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть L - элементарный гиперболический оператор следующего вида

$$L = D_t - \lambda(t, x, D_x) + f(t, x, D_x) \quad \text{на}\, [0, T_o] \times R^n_x, \tag{5.1}$$

где функция $\lambda(t, x, \xi)$ описана выше, $f(t, x, \xi) \in C^\infty(S^{-\infty})([0, T_o] \times R^{2n})$, и

$$f(t, x, \xi) = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0, T_o], (x, \xi) \in Z_{pd}(M, N), \tag{5.2}$$

$$f(t, x, \xi) \in S\{0, 0, 0\}_N. \tag{5.3}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} Lu = \varphi \quad \text{на} \quad [0, T_o] \times R^n_x, \\ u|_{t=s} = \psi(x) \qquad s \in [0, T_o]. \end{cases} \tag{5.4}$$

Предварительно мы строим параметрикс задачи (5.4), т.е. интегральный оператор Фурье (ИОФ) $E^o_\Phi(t, s)$ такой, что

$$\begin{cases} LE^o_\Phi(t, s) = 0 \qquad mod\, C^\infty(S^{-\infty})(J; C^\infty(\Psi^{-\infty})) \quad \text{на} \quad (t, s) \in J, \\ E^o_\Phi(s, s) = I \quad \text{(тождественный оператор)}. \end{cases} \tag{5.5}$$

Мы ищем параметрикс как оператор, действующий согласно следующей формуле :

$$E^o_\Phi(t, s)\psi(x) = Os - \iint e^{i(\Phi(t,s,x,\xi) - y\cdot\xi)} e^o(t, s, x, \xi)\psi(y)(2\pi)^{-n}\, dy d\xi$$

с символом $e^o(t, s, x, \xi)$, допускающим асимптотическое разложение

$$e^o(t, s, x, \xi) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu(t, s, x, \xi) \quad mod\, C^\infty(S^{-\infty})(J; S^{-\infty}). \tag{5.6}$$

Определим

$$g(t, s, x, \xi) = -i \sum_{|\alpha|=2} \lambda^{(\alpha)}(t, x, \nabla_x\Phi(t, s, x, \xi))\partial^\alpha_x\Phi(t, s, x, \xi)/\alpha! +$$

$$+ f(t, x, \nabla_x\Phi(t, s, x, \xi)), \tag{5.7}$$

$$G = D_t - \sum_{|\alpha|=1} \lambda^{(\alpha)}(t, x, \nabla_x\Phi(t, s, x, \xi))D^\alpha_x + g(t, s, x, \xi). \tag{5.8}$$

Если $e_{\nu,\Phi}(t,s)$ – ИОФ с символом $e_\nu(t,s,x,\xi)$ и фазовой функцией $\Phi(t,s,x,\xi)$, то (см. [7])

$$\sigma(Le_{\nu,\Phi}(t,s))(x,\xi) = G\dot{e}_\nu(t,s,x,\xi) + r_\nu(t,s,x,\xi),$$

где

$$r_\nu(t,s,x,\xi) \sim -\sum_{|\alpha|\geq 2}\{D_y^\alpha(\lambda^{(\alpha)}(t,x,\bar{\nabla}_x\Phi(t,s,x,y,\xi))e_\nu(t,s,y,\xi)/\alpha!)\}_{y=x} \tag{5.9}$$

$$mod\, C^\infty(S^{-\infty})(J;S^{-\infty})(\nu = 0,1,\ldots)$$

$$\bar{\nabla}_x\Phi(t,s,x,y,\xi) = \int_0^1 \nabla_x\Phi(t,s,y+\theta(x-y),\xi)d\theta. \tag{5.10}$$

Поэтому, полагаем

$$\begin{cases} Ge_o = 0, & Ge_\nu + r_{\nu-1} = 0, \quad 0\leq t\leq T_o, \\ e_o(s,s) = 1, & e_\nu(s,s) = 0, \quad \nu = 1,2,\ldots \end{cases} \tag{5.11}$$

Следовательно, получаем

$$e_o(t,s,x,\xi) = \exp[-i\int_s^t g(\sigma,s,q(\sigma,s,y(t,s,x,\xi),\xi),\xi)d\sigma], \tag{5.12}$$

$$e_\nu(t,s,x,\xi) = -i\int_s^t r_{\nu-1}(\sigma,s,q(\sigma,s,y(t,s,x,\xi),\xi),\xi)\times$$

$$\times \exp[-i\int_o^t g(\sigma',s,q(\sigma',s,y(t,s,x;\xi),\xi),\xi)d\sigma']d\sigma \quad \nu = 1,2,\ldots \tag{5.13}$$

Очевидно, что если $(x,\xi)\in Z_h(M,N)(M,N/2)$, то

$$e_o(t,s,x,\xi) = 1, \quad r_{\nu-1}(t,s,x,\xi) = e_\nu(t,s,x,\xi) = 0$$

$$\text{для всех} \quad (t,s)\in J,\ \nu = 1,2,\ldots \tag{5.14}$$

Теорема 5.1. *Существует единственный символ $e(t,s,x,\xi)$ такой, что $e(t,s,x,\xi)\in S\{0,0,0\}_{N/2}$ и*

$$e(t,s,x,\xi) = 1 \quad \text{для всех} \ (x,\xi)\in Z_h(M,N)(M,N/2),\ (t,s)\in J \tag{5.15}$$

и такой, что интегральный оператор Фурье $E_\Phi(t,s) = e_\Phi(t,s,x,D_x)$ с фазовой функцией $\Phi(t,s,x,\xi)$ из Леммы 4.3, есть фундаментальное решение задачи Коши (5.4), т. е.

$$\begin{cases} LE_\Phi(t,s) = 0 & \text{на} \quad (t,s)\in J, \\ E_\Phi(s,s) = I & (\text{тождественный оператор}). \end{cases} \tag{5.16}$$

Доказательство. Из (5.7)-(5.14) следует, что

$$e_\nu(t,s,x,\xi) \in S\{-\nu,0,0\}_{N/2}, \quad \nu = 0,1,\dots \tag{5.17}$$

и, поэтому, согласно Предложению 2.1 и (5.6) найдется символ $e^o(t,s,x,\xi) \in$ $\in S\{0,0,0\}_{N/2}$ такой, что $E^o_\Phi(t,s) = e^o_\Phi(t,s,x,D_x)$ будет параметриксом для (5.4). Таким образом, $LE^o_\Phi(t,s) = R_\infty(t,s)$, где $R_\infty(t,s) = r_\infty(t,s,x;D_x) \in$ $\in C^\infty(S^{-\infty})(J;C^\infty(\Psi^{-\infty}))$. Полагая

$$W_1(t,s) = -R_\infty(t,s), \quad W_{\nu+1}(t,s) = \int_s^t W_1(t,\theta)W_\nu(\theta,s)d\theta$$
$$(\nu = 1,2,\dots)$$

и с помощью теории ПДО с кратными символами (см., например, [7]) мы получаем фундаментальное решение в следующей форме :

$$E_\Phi(t,s) = E^o_\Phi(t,s) + \int_s^t E^o_\Phi(t,\theta)\sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu(\theta,s)d\theta$$

с символом $e(t,s,x,\xi) = e^o(t,s,x,\xi) + e_\infty(t,s,x,\xi)$, где $e_\infty(t,s,x,\xi) \in$ $\in C^\infty(S^{-\infty})(J;S^{-\infty})$. Следовательно, $e(t,s,x,\xi) \in C^\infty(S^{-\infty})(J;S^o_{1,\epsilon})$. Теорема доказана.

Следствие 5.1. *Решение $u(t,s) \in C^\infty(S^{-\infty})(J;\mathcal{S})$ задачи Коши (5.4) с $\varphi(t) \in$ $\in C^\infty(S^{-\infty})([0,T_o];\mathcal{S})$ и $\psi \in \mathcal{S}$ существует, единственно и представимо в следующем виде :*

$$u(t,s,x) = E_\Phi(t,s)\psi(x) + i\int_s^t E_\Phi(t,\theta)\varphi(\theta)d\theta. \tag{5.18}$$

В дальнейшем мы будем использовать обозначения Re $\mathcal{D}(t)$, Re $\varphi_j(t,x,D_x)$ для операторов с символами Re $\mathcal{D}(t,x,\xi)$, Re $\varphi_j(t,x,\xi)$, соответственно, и обозначать через $\delta_{i,j}$ символ Кронеккера.

Следствие 5.2. *Пусть L_2 - матричный $m \times m (m \geq 2)$ диагональный оператор вида $L_2 = D_t - Re\mathcal{D}(t) + F(t)$, с $\mathcal{D}(t)$ и $F(t)$, описанными в Теореме 3.1. Тогда фундаментальное решение $E_2(t,s)((t,s) \in J)$ задачи Коши*

$$\begin{cases} L_2U = \Phi(t) & \text{на} \quad [0,T_o], \\ U|_{t=s} = \Psi, & s \in [0,T_o] \end{cases} \tag{5.19}$$

существует, единственно и имеет вид

$$E_2(t,s) = (\delta_{i,j} E_{i,\Phi_i}(t,s))_{i,j=1}^m,$$

где $E_{i,\Phi_i}(t,s)\,(i = 1,\dots,m)$ *- фундаментальное решение задачи Коши для оператора* $D_t - \mathrm{Re}\,\varphi_i(t,x,D_x) + F_{ii}(t,x,D_x)$, *построенное с помощью Теоремы 5.1.*

§6. ЗАВЕРШЕНИЕ ПОСТРОЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Предварительно докажем следующие леммы.

Лемма 6.1. *Пусть* $A_\Phi = a_\Phi(t,s,x,D_x)$ *- интегральный оператор Фурье с фазовой функцией* $\Phi(t,s,x,\xi)$ *из Леммы 4.3, с символом* $a(t,s,x,\xi) \in S\{m_1,m_2,m_3\}_N$, *и пусть* $R = r(t,s,x,D_x)$ *- псевдодифференциальный оператор с символом* $r(t,s,x,\xi) \in \mathcal{H}\{m_1',m_2',m_3'\}_N$. *Если*

$$a(t,s,x,\xi) = r(t,s,x,\xi) = 0 \quad \text{для всех} \quad (x,\xi) \in Z_{pd}(M,N),\ (t,s) \in J. \tag{6.1}$$

то и $R_1 = A_\Phi R$, *и* $R_2 = RA_\Phi$ *являются псевдодифференциальными операторами с символами* $r_1(t,s,x,\xi)$, $r_2(t,s,x,\xi)$, *соответственно, причем*

$$r_j(t,s,x,\xi) \in \mathcal{H}\{m_1+m_1', m_2+m_2', m_3+m_3'\}_N, \quad j = 1,2 \tag{6.2}$$

$$r_j(t,s,x,\xi) = 0 \quad \text{для всех} \quad (x,\xi) \in Z_{pd}(M,N), \quad (t,s) \in J, \quad j = 1,2. \tag{6.3}$$

Доказательство. Для символа $\tilde r_1(t,s,x,\xi)$ интегрального оператора Фурье $\tilde R_{1\Phi} = A_\Phi R$, используя Теорему 2.3 [7], получаем, что

$$\tilde r_1(t,s,x,\xi) \sim \sum_\alpha \partial_\eta^\alpha \{a(t,s,x,\eta) r_{(\alpha)}(t,s,\tilde\nabla_\xi \Phi(t,s,x,\eta,\xi),\xi)/\alpha!\}_{\eta=\xi} \sim$$

$$\sim a(t,s,x,\xi) r(t,s,\nabla_\xi \Phi(t,s,x,\xi),\xi) + \sum_{j=1}^n a^{(j)}(t,s,x,\xi) r_{(j)}(t,s,\nabla_\xi \Phi(t,s,x,\xi),\xi) +$$

$$+ \frac{i}{2} a(t,s,x,\xi)[\sum_{j,k=1}^n r_{(j,k)}(t,s,\nabla_\xi \Phi(t,s,x,\xi),\xi) \frac{\partial^2}{\partial\xi_j \partial\xi_k} \Phi(t,s,x,\xi)] + \cdots,$$

где

$$\tilde{\nabla}_\xi \Phi(t,s,x,\eta,\xi) = \int_0^1 \nabla_\xi \Phi(t,s,x,\xi+\theta(\eta-\xi))d\theta.$$

Далее, в силу Леммы 4.1, имеем для любых $k,l,\alpha,\beta,\nu,\gamma$ неравенства

$$|D_t^k D_x^\beta D_t^k D_s^l r_{(\gamma)}(t,s,\nabla_\xi \Phi(t,s,x,\xi),\xi)| \leq$$

$$\leq C_{k,\alpha,\beta,l,\gamma,\nu} \langle\xi\rangle^{m_1'-|\alpha|-\nu} |\lambda^{m_2'-\nu}|(\nabla_\xi \Phi(t,s,x,\xi)) K^{m_3'+|\beta+\gamma|}(\tilde{\nabla}_\xi \Phi(t,s,x,\xi)) \leq$$

$$\leq C'_{k,\alpha,\beta,l,\gamma,\nu} \langle\xi\rangle^{m_1'-|\alpha|-\nu} |\lambda^{m_2'-\nu}(x)| K^{m_3'+|\beta+\gamma|}(x)$$

$$\text{для всех} \quad (x,\xi) \in Z_h(M,N),\ (t,s) \in J.$$

Поэтому, согласно Предложению 2.1(i), для каждого ν имеем

$$|D_t^k D_x^\beta D_t^k D_s^l \tilde{r}_1(t,s,x,\xi)| \leq C_{k,\alpha,\beta,l,\gamma,\nu} \langle\xi\rangle^{m_1+m_1'-|\alpha|-\nu} |\lambda^{m_2+m_2'-\nu}(x)| K^{m_3+m_3'+|\beta|}(x)$$

$$\text{для всех} \quad (x,\xi) \in Z_h(M,N), \quad (t,s) \in J,$$

в то время как для $(x,\xi) \in Z_{pd}(M,N)$ имеем $\tilde{r}_1(t,s,x,\xi) = 0$. Таким образом, $\tilde{r}_1 \in \mathcal{H}\{m_1+m_1', m_2+m_2', m_3+m_3'\}_N$ и, следовательно, согласно Лемме 4.3, символ $r_1(t,s,x,\xi) = \tilde{r}_1(t,s,x,\xi)\exp i(\Phi(t,s,x,\xi) - x\cdot\xi)$ принадлежит $\mathcal{H}\{m_1 + m_1', m_2+m_2', m_3+m_3'\}_N$. Оператор R_2 рассматривается аналогичным образом. Лемма доказана.

Лемма 6.2. *Пусть $E_\Phi(t,s)$ – фундаментальное решение, задаваемое Теоремой 5.1, и предположим, что $r(t,x,\xi)$ символ такой, что*

$$r(t,x,\xi) = 0 \quad \textit{для всех} \quad t \in [0,T_o], \quad (x,\xi) \in Z_{pd}(M,N) \tag{6.4}$$

и

$$(r(t,x,\xi)/\ln\langle\xi\rangle) \in S_{\rho,\delta}\{m_1,m_2,m_3\}_N. \tag{6.5}$$

Тогда оператор $\tilde{R}(t,s,x,D_x) = E_\Phi(s,t)r(t,x,D_x)E_\Phi(t,s)$ является псевдодифференциальным оператором с символом $\tilde{r}(t,s,x,\xi)$ таким, что $(\mathrm{mod}\, C^\infty(S^{-\infty})(J;S^{-\infty}))$

$$\tilde{r}(t,s,x,\xi) = 0 \quad \textit{для всех} \quad (x,\xi) \in Z_h(M,N)(M,N/2), \quad (t,s) \in J \tag{6.6}$$

и

$$(\tilde{r}(t,s,x,\xi)/\ln\langle\xi\rangle) \in S_{\rho,\delta}\{m_1,m_2,m_3\}_{N/2}. \tag{6.7}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $m_1 = m_2 = m_3 = 0$. Для оператора $P(t) = E_\Phi(t,s)r(s,x,D_x)\ E_\Phi(s,t)$ имеем

$$D_t P(t) = (\lambda(t,x,D_x) - f(t,x,D_x))P(t) -$$

$$-P(t)(\lambda(t,x,D_x) - f(t,x,D_x)),\ P(s) = r(s,x,D_x).$$

Поэтому рассмотрим следующую задачу Коши :

$$\begin{cases} D_t Q(t) - [\lambda(t,x,D_x) - f(t,x,D_x), \quad Q(t)] \in C^\infty(S^{-\infty})(J;C^\infty(\Psi^{-\infty})), \\ Q(s) = r(s,x,D_x). \end{cases}$$

Решение $Q(t)$ последней задачи есть псевдодифференциальный оператор $q(t,s,x,D_x)$ с символом $q(t,s,x,\xi)$ таким, что

$$q(t,s,x,\xi) \sim q_o(t,s,x,\xi) + q_1(t,s,x,\xi) + \cdots,$$

где

$$D_t q_o - i\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\xi_j}\frac{\partial q_o}{\partial x_j} - \frac{\partial\lambda}{\partial x_j}\frac{\partial q_o}{\partial\xi_j}\right) = 0,$$

$$D_t q_k - i\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\xi_j}\frac{\partial q_k}{\partial x_j} - \frac{\partial\lambda}{\partial x_j}\frac{\partial q_k}{\partial\xi_j}\right) = a_k(t,s,x,\xi),$$

$$a_k(t,s,x,\xi) = \sum_{l=0}^{k-1}\Big[\sum_{|\alpha|=k-l+1}\frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}(\lambda^{(\alpha)}q_{l(\alpha)} - \lambda_{(\alpha)}q_l^{(\alpha)}) -$$

$$-\sum_{|\alpha|=k-l}\frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}(f^{(\alpha)}q_{l(\alpha)} - f_{(\alpha)}q_l^{(\alpha)})\Big],$$

$$q_o(s,s,x,\xi) = r(s,x,\xi), \quad q_k(s,s,x,\xi) = 0, \quad k = 1,2,\ldots$$

Очевидно, что если $(x,\xi) \in Z_h(M,N)(M,N/2)$, то

$$q_k(t,s,x,\xi) = 0 \quad \text{для всех} \quad (t,s) \in J, \quad k = 1,2,\ldots$$

Далее, рассмотрим для системы из (4.1) задачу Коши с условиями $q|_{t=s} = y, p|_{t=s} = \eta$. Согласно Леммам 4.1, 4.2, для отображения $R^n_y \times R^n_\eta \ni (y,\eta) \mapsto$

$\mapsto (x,\xi) \in R^n_x \times R^n_\xi$ с параметрами (t,s) существует обратное отображение $y = y(t,s,x,\xi)$, $\eta = \eta(t,s,x,\xi)$ такое, что $y(t,s,x,\xi) - x \in S\{0,1,0\}_{N/2}$, $\eta(t,s,x,\xi) - \xi \in S\{1,1,1\}_{N/2}$. Следовательно, для решений

$$q_0(t,s,x,\xi) = r(s, y(t,s,x,\xi), \eta(t,s,x,\xi)),$$

$$q_k(t,s,x,\xi) = i\int_s^t a_k(\sigma, s, q(\sigma, s, y(t,s,x,\xi), \eta(t,s,x,\xi)),$$

$$p(\sigma, s, y(t,s,x,\xi), \eta(t,s,x,\xi)))d\sigma, \quad k = 1,2,\ldots$$

имеем $(q_k(t,s,x,\xi)/\ln\langle\xi\rangle) \in S_{\rho,\delta}\{-k,0,0\}_{N/2}$, и, следовательно, $(q(t,s,x,\xi)/\ln\langle\xi\rangle)$ принадлежит классу $S_{\rho,\delta}\{0,0,0\}_{N/2}$. Для доказательства того, что $P(t) - Q(t)$ является сглаживающим оператором, рассмотрим для любого распределения с компактным носителем $u \in \mathcal{E}'(R^n_x)$ функцию $v(t) = Q(t)E_\Phi(t,s)u$. Тогда $v(s) = r(s,x,D_x)u(x)$ и

$$D_t v - \lambda(t,x,D_x)v + f(t,x,D_x)v \in C^\infty(S^{-\infty})(J \times R^n_x).$$

Следовательно, функция $w(t) = v(t) - E_\Phi(t,s)r(s,x,D_x)u$ есть решение задачи Коши

$$D_t w - \lambda(t,x,D_x)w + f(t,x,D_x)w \in C^\infty(S^{-\infty})(J \times R^n_x), \qquad w(s) = 0$$

и поэтому $w \in C^\infty(S^{-\infty})(J \times R^n_x)$. Лемма доказана.

Лемма 6.3. *Пусть $A_\Phi = a_\Phi(t,s,x,D_x)$ - интегральный оператор Фурье с фазовой функцией $\Phi(t,s,x,\xi)$ из Леммы 4.3, с символом $a(t,s,x,\xi) \in S\{m_1,m_2,m_3\}_N$, и пусть $R = r(t,s,x,D_x)$ - псевдодифференциальный оператор с символом $r(t,s,x,\xi) \in S\{m'_1,m'_2,m'_3\}_N$. Если либо*

$$a(t,s,x,\xi) = 0 \quad \text{для всех} \quad (x,\xi) \in Z_h(M,3N), \quad (t,s) \in J, \tag{6.8}$$

либо

$$r(t,s,x,\xi) = 0 \quad \text{для всех} \quad (x,\xi) \in Z_h(M,3N), \quad (t,s) \in J, \tag{6.9}$$

то и $R_1 = A_\Phi R$ и $R_2 = RA_\Phi$ являются псевдодифференциальными операторами с символами $r_1(t,s,x,\xi)$, $r_2(t,s,x,\xi)$, соответственно, причем для $j = 1,2$ имеет место включение

$$r_j(t,s,x,\xi) \in \bigcap_{\delta>0} S_{1,\delta}\{m_1+m'_1, m_2+m'_2, m_3+m'_3\}_N \tag{6.10}$$

и

$$r_j(t,s,x,\xi) = 0 \quad \textit{для всех} \quad (x,\xi) \in Z_h(M,4N),\ (t,s) \in J. \tag{6.11}$$

Доказательство. Заметим, что если $q(t,s,x,\xi) \in S\{m_1,m_2,m_3\}_N$ и $q(t,s,x,\xi) = 0$ для всех $(x,\xi) \in Z_h(M,3N)$, то

$$q(t,s,x,\xi)\exp i(\Phi(t,s,x,\xi) - x\cdot\xi) \in \bigcap_{\delta>0} S_{1,\delta}\{m_1+m_1', m_2+m_2', m_3+m_3'\}_N.$$

Поэтому лемма непосредственно следует из Леммы 4.3 и Теоремы 2.3 [7].

Рассмотрим следующую задачу Коши :

$$\begin{cases} D_t Q(t,s) + R(t,s)Q(t,s) + R_o(t,s) \in C(J; C^\infty(\Psi^{-\infty})), \\ Q(s,s) = 0, \qquad s \in [0,T_o] \end{cases} \tag{6.12}$$

где $R(t,s), R_o(t,s), Q(t,s)$ есть $d \times d$-матричные псевдодифференциальные операторы.

Предложение 6.1. *Пусть $R(t,s)$ и $R_o(t,s)$ есть матричные псевдодифференциальные операторы с символами $r(t,s,x,\xi)$, $r_o(t,s,x,\xi)$, соответственно, такие, что*

$$r(t,s,x,\xi), r_o(t,s,x,\xi) \in C(J; \bigcup_l S^l_{\rho,\delta}).$$

Предположим далее, что с некоторыми p, K, m для любых α, β с положительными постоянными $C_{\alpha,\beta}, C_o$ для всех $(t,s) \in J, x \in R^n, \xi \in R^n$ выполняются неравенства

$$\|D_t^k D_x^\beta r(t,s,x,\xi)\| \le C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|} g(t,\xi), \tag{6.13}$$

$$\|D_t^k D_x^\beta r_o(t,s,x,\xi)\| \le C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{p+\delta|\beta|-\rho|\alpha|} g(t,\xi) \tag{6.14}$$

с непрерывной функцией $g(t,\xi) \in C([0,T_o] \times R^n)$ такой, что

$$\int_0^{T_o} g(\tau,\xi)d\tau \le K\ln\langle\xi\rangle, \qquad g(t,\xi) \le C_o\langle\xi\rangle^m. \tag{6.15}$$

Тогда существует решение $Q(t,s) = q(t,s,x,D_x)$ задачи (6.12) с матричным символом $q(t,s,x,\xi)$, удовлетворяющим неравенствам

$$\|D_t^k D_x^\beta q(t,s,x,\xi)\| \le C'_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{K+p+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}(\ln\langle\xi\rangle)^{|\alpha+\beta|+1}$$

$$\textit{для всех } (t, s) \in J, x \in R^n, \xi \in R^n \tag{6.16}$$

и, следовательно, принадлежащим классу

$$q \in C(J; \bigcap_{0<\epsilon\leq 1} S^{K+p+\epsilon}_{\rho,\delta}) \cap C^1(J; \bigcap_{0<\epsilon\leq 1} S^{K+p+m+\epsilon}_{\rho,\delta}).$$

Это решение единственно по модулю $C^1(J; C^\infty(\Psi^{-\infty}))$.

Доказательство. Выберем собственные представители класса эквивалентности $R(t,s)$, $R_o(t,s)$ и построим собственный оператор $Q(t,s)$. Очевидно, что достаточно рассмотреть случай $p = 0$. Решение ищем в следующем виде :

$$q \sim q_o + q_1 + q_2 + \cdots \quad mod\, C^1(J; S^{-\infty}), \tag{6.17}$$

где

$$q_k(t,s,x,\xi) = -i \int_s^t r_k(s_1,s,x,\xi)ds_1 +$$
$$+\sum_{l=2}^{\infty}(-i)^l \int_s^t ds_1 \int_s^{s_1} ds_2 \cdots \int_s^{s_{l-1}} ds_l\, r(s_1,s,x,\xi)\cdots r(s_{l-1},s,x,\xi)\cdots \tag{6.18}$$
$$\cdots r_k(s_l,s,x,\xi) \quad (k = 0,1,\ldots),$$

$$r_k(t,s,x,\xi) = \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{|\alpha|=k-l} \frac{1}{\alpha!}(\partial_\xi^\alpha r(t,s,x,\xi))(D_x^\alpha q_l(t,s,x,\xi)) \quad (k = 1,2,\ldots). \tag{6.19}$$

Определим оператор $(I(p))(t) = \int_s^t p(s_1,s,x,\xi)ds_1$ и перепишем (6.18) в следующем виде :

$$q_k = -I(r_k) + \sum_{l=2}^{\infty}(-i)^l I(rI(r\cdots(I(rI(r_k)))\cdots)).$$

Из (6.18)следует, что

$$||D_t^k D_x^\beta q_o(t,s,x,\xi)|| \leq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^{|\alpha+\beta|}}{l!} |\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau|^l.$$

Лемма 6.4. *Для любых* α, β, k *имеют место следующие неравенства :*

$$||D_t^k D_x^\beta r_k(t,s,x,\xi)|| \leq C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|-(\rho-\delta)k} g(t,\xi)\times$$
$$\times \sum_{l=1}^{\infty} l^{|\alpha+\beta|+2k-1} |\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau|^l/l!, \tag{6.20}$$

$$||D_t^k D_x^\beta q_k(t,s,x,\xi)|| \leq C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|-(\rho-\delta)k}\times$$

$$\times \sum_{l=1}^{\infty} l^{|\alpha+\beta|+2k} | \int_s^t g(\tau,\xi)d\tau|^{l+1}/(l+1)!, \quad k=1,2,\dots \tag{6.21}$$

Доказательство. Мы доказываем лемму индукцией по k. Имеем

$$||D_t^k D_x^\beta r_1(t,s,x,\xi)|| \le C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|-\rho+\delta} g(t,\xi)\times$$
$$\times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^{|\alpha+\beta|+1}}{l!}(\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau)^l \quad \text{для всех} \quad 0\le s\le t\le T_o.$$

Следовательно

$$||D_t^k D_x^\beta q_1(t,s,x,\xi)|| \le C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|-\rho+\delta}[\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l^{|\alpha+\beta|+1}}{(l+1)!}(\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau)^{l+1}+$$
$$+\sum_{i=0}^{|\alpha+\beta|}\sum_{l=2}^{\infty}(l-1)^i I(gI(g\cdots I(g\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^{|\alpha+\beta|+1-i}}{m!}(I(g))^m)\cdots))]\le$$
$$\le C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|-\rho+\delta}[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^{|\alpha+\beta|+1}}{(m+1)!}(\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau)^{m+1}+$$
$$+\sum_{i=0}^{|\alpha+\beta|}\sum_{l=2}^{\infty}(l-1)^i\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^{|\alpha+\beta|+1-i}}{(m+l)!}(\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau)^{m+l}\le$$
$$\le C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|-\rho+\delta}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l^{|\alpha+\beta|+2}}{(l+1)!}(\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau)^{l+1}, \quad s\le t.$$

Таким образом, (6.20),(6.21) доказаны для $k=1$. Теперь предположим, что (6.20),(6.21) уже доказаны для k и докажем их для $k+1$. Для любых α,β,α_1, $\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma,l;\alpha_1+\ +\alpha_2=\alpha,\beta_1+\beta_2=\beta; 0<l\le k$ имеют место неравенства

$$||(\partial_\xi^{\gamma+\alpha_1}D_x^{\beta_1}r(t,s,x,\xi)(\partial_\xi^{\alpha_2}D_x^{\gamma+\beta_2}q_l(t,s,x,\xi)|| \le$$
$$\le C_{k,\alpha,\beta}g(t,\xi)\langle\xi\rangle^{\delta(|\gamma+\beta|+l)-\rho(|\gamma+\alpha|+l)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^{|\alpha_2+\beta_2+\gamma|+2l}}{(m+1)!}(\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau)^{m+1}\le$$
$$\le C_{k,\alpha,\beta}g(t,\xi)\langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|-(k+1)(\rho-\delta)}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{m^{|\alpha+\beta|+2(k+1)-1}}{m!}(\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau)^m.$$

Поэтому (6.19) следует из (6.20). Рассмотрим теперь q_{k+1} для $0\le s\le t\le T_o$:

$$||D_t^k D_x^\beta q_{k+1}(t,s,x,\xi)|| \le C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|-(k+1)(\rho-\delta)}\times$$
$$\times[\sum_{m=1}^{\infty}m^{|\alpha+\beta|+2(k+1)-1}(\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau)^{m+1}/(m+1)!+$$
$$+\sum_{i=0}^{|\alpha+\beta|}\sum_{l=2}^{\infty}(l-1)^i\sum_{m=1}^{\infty}m^{|\alpha+\beta|+2(k+1)-1-i}(\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau)^{m+l}/(m+l)!]\le$$
$$\le C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|-(k+1)(\rho-\delta)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^{|\alpha+\beta|+2(k+1)}}{(m+1)!}(\int_s^t g(\tau,\xi)d\tau)^{m+1}.$$

Таким образом, неравенства (6.20) и (6.21) доказаны для $0\le s\le t\le T_o$. Случай $t\le s$ ничем не отличается от рассмотренного выше. Лемма доказана.

Завершение доказательства Предложения 6.1. Из (6.21) следует, что ($k =$ 1,2,...)

$$||D_t^k D_x^\beta q_k(t,s,x,\xi)|| \le C_{k,\alpha,\beta}(\xi)^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|-k(\rho-\delta)}(\ln(\xi))^{|\alpha+\beta|+2(k+1)}$$

равномерно относительно $(t,s) \in J$. Аналогичные оценки имеют место и для q_0. Таким образом, существование решения $Q(t,s)$ доказано. Для доказательства единственности замечаем, что задача Коши, сопряженная к (6.12), удовлетворяет тем же условиям (6.13),(6.14), и, следовательно, достаточно использовать стандартные рассуждения. Предложение доказано.

Следствие 6.1. *Пусть $R(t,s)$ и $R_o(t,s)$ удовлетворяют условиям Предложения 6.1. Тогда для задачи Коши*

$$\begin{cases} D_tQ(t,s) + Q(t,s)R(t,s) + R_o(t,s) \in C(J; C^\infty(\Psi^{-\infty})), \\ Q(s,s) = 0, \qquad s \in [0, T_o] \end{cases} \tag{6.22}$$

верны все утверждения Предложения 6.1.

Следствие 6.2. *Если $R(t,s) = R_o(t,s)$, то для оператора $I+Q(t,s)$ существует параметрикс $(I+$ $+Q(t,s))^\#$, который может быть представлен в виде $I + Q^\#(t,s)$, где $Q^\#(t,s)$ есть решение следующей задачи :*

$$\begin{cases} D_tQ^\#(t,s) - Q^\#(t,s)R_o(t,s) - R_o(t,s) \in C(J; C^\infty(\Psi^{-\infty})), \\ Q^\#(s,s) = 0, \qquad s \in [0, T_o]. \end{cases} \tag{6.23}$$

Теперь мы рассматриваем задачу Коши

$$\begin{cases} (D_t - \mathcal{D}(t) + F(t) + R(t))U = \Phi(t) \qquad \text{на} \quad [0,T_o] \times R^n, \\ U|_{t=s} = \Psi, \qquad\qquad s \in [0,T_o], \end{cases} \tag{6.24}$$

где операторы $\mathcal{D}(t)$, $F(t)$, $R(t)$ были описаны в Теореме 3.1. Будем искать фундаментальное решение $E_1(t,s)$ задачи (6.24) в следующем виде :

$$E_1(t,s) = E_2(t,s)(I + Q(t,s)) + Q_\infty(t,s), \tag{6.25}$$

где $Q_\infty(t,s) \in C^\infty(S^{-\infty})(J; C^\infty(\Psi^{-\infty}))$, а $E_2(t,s)$ был построен в Следствии 5.2. Используя Предложение 1.1 и Леммы 6.1 - 6.3, легко проверить, что все предположения Предложения 6.1 выполнены

$$R(t,s) = R_o(t,s) = -E_2(s,t)(-\mathrm{Im}\mathcal{D}(t) + R(t))E_2(t,s).$$

Здесь $\mathrm{Im}\mathcal{D}(t) = \mathcal{D}(t) - \mathrm{Re}\mathcal{D}(t)$ (см. также Следствие 5.2). Следовательно, псевдодифференциальный оператор $Q(t,s)$ существует и определяется однозначным образом. Далее, перепишем задачу Коши (0.1), (0,2) в эквивалентной форме (см. §3) :

$$D_t\mathcal{U} - A(t)\mathcal{U} = \Phi(t) \quad \text{на} \quad [0, T_o] \times R^n, \tag{0.1'}$$

$$\mathcal{U}|_{t=s} = \Psi, \quad s \in [0, T_o] \tag{0.2'}$$

для вектора $\mathcal{U} = {}^t(u, D_t u, ..., D_t^{m-1} u)$.

Напомним, что операторы $H(x, D_x)$, $M(t, x, D_x)$, $N(t, x, D_x)$, $H^\#(x, D_x)$, $M^\#(t, x, D_x)$, $N^\#(t, x, D_x)$ были описаны в §3, а фазовые функции $\Phi_j(t, s, x, \xi)$ были построены в §4. Таким образом, мы доказали следующий основной результат настоящей работы.

Теорема 6.1 *Предположим, что оператор P из (0.3) удовлетворяет условию (A). Тогда фундаментальное решение $E(t,s)$ задачи Коши (0.1'),(0,2') (а, следовательно, и фундаментальное решение задачи Коши (0.1),(0.2)) может быть построено в следующем виде :*

$$E(t,s) =$$

$$= H^\#(x, D_x)M^\#(t, x, D_x)N(t, x, D_x)E_1(t,s)N^\#(t, x, D_x)M(t, x, D_x)H(x, D_x) +$$

$$+ R_\infty(t, s, x, D_x), \tag{6.26}$$

где $R_\infty(t,s) \in C^\infty(S^{-\infty})(J; C^\infty(\Psi^{-\infty}))$, а $E_1(t,s)$ – матричный интегральный оператор Фурье из (6.25) с фазовыми функциями $\Phi_j(t, s, x, \xi)$, $j = 1, ..., m$.

Далее $||v||_\sigma$ обозначает норму элемента v соболевского пространства $H_{(\sigma)}(R^n_x)$ с действительными σ.

Теорема 6.2. *Предположим, что оператор P из (0.3) удовлетворяет условию (A). Тогда решение $u(t,x)$ задачи Коши (0.1),(0.2) на $[0, T_o] \times R^n_x$ с $f(t,x) \in \in C^\infty(S^{-\infty})([0, T_o]; \mathcal{S})$ и с $\psi_j \in \mathcal{S}$, $j = 0, 1, ..., m-1$ существует, единственно и может быть представлено в следующем виде :*

$$u(t,x) = \sum_{j=0}^{m-1} E^{1,j+1}(t,s)\psi_j(x) + i\int_s^t E^{1,m}(t,\tau)f(\tau,x)d\tau, \tag{6.27}$$

где $E^{l,j}(t,s)$ есть (l,j)-элемент фундаментального решения $E(t,s)$ из (6.26) задачи Коши (0.1'),(0.2'). Следовательно, существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что для любого вещественного σ с некоторой постоянной C_σ имеет место энергетическое неравенство

$$\sum_{l=0}^{m-1} ||D_t^l u(t)||^2_{\sigma+m-1-l} \le C_\sigma[\sum_{l=0}^{m-1} ||\psi_l||^2_{\sigma+\gamma-1-l+m} + |\int_s^t ||f(\tau)||^2_{\gamma+\sigma} d\tau|]. \qquad (6.28)$$

Таким образом, для задачи (0.1),(0.2) существует конус зависимости.

Доказательство. Представление (6.27) и энергетическое неравенство (6.29) являются прямыми следствиями Теоремы 6.1. Более того, имеет место и теорема существования в $[0,T] \times R^n$. Далее, для доказательства последнего утверждения теоремы $s = 0$ для всех $A = (x_A, t_A)$, $t_A \in [0, T_o]$ мы обозначаем через S_θ пространственноподобную гиперповерхность, определяемую следующим уравнением :

$$\lambda^2_{\max}(t - t_A)^2 - |x - x_A|^2 = \theta, \quad 0 < t < t_A,$$

где

$$\lambda_{\max} = \sup\{|\lambda_j(t,x,\xi)/(2\lambda(x))|;\, x \in NZ, \xi \in R^n, |\xi| = 1, t \in [0,T_o], j = 1,...,m\}$$

есть положительное число в нетривиальном случае $Z \ne R^n$, и где $0 < \theta < \lambda^2_{\max} t_A^2$. Пусть C_A есть объединение $\bigcup_\theta S_\theta$. Предположим, что $Pu = 0$ в C_A и что $D_t^l u|_{t=0} = 0$ в $\bar{C}_A \cap \{t = 0\}, l = 0,...,m-1$. Мы должны показать, что $u = 0$ в C_A. С этой целью заметим прежде всего, что можно считать условия (T) выполненными для всех $t \in [-T,T]$. Заметим также, что после преобразования координат $x' = x, t' = t + |x|^2$, новый оператор P' также удовлетворяет условию (T) в окрестности начала координат в R^{n+1}. Следовательно, имеет место локальная теорема единственности. Действительно, оператор P'^* также удовлетворяет условию (A) и, согласно Теореме 6.1, для любого $\varphi \in C_o^\infty$ задача Коши $P'^* v = \varphi$, $D^l_{t'} v|_{t'=\epsilon'} = 0\, (l = 0,...,m-1)$ разрешима. Отсюда следует, что

$$u(t,x) = 0 \quad \text{для всех} \quad t, x, t + |x|^2 \le \epsilon', 0 < \epsilon'.$$

Далее, для вектора $\alpha \in R^n, |\alpha| < 1/\lambda_{\max}$, уравнение

$$P_m(t, x, \lambda(x)\mu, \xi + \mu\lambda(x)\alpha) = 0$$

имеет m различных действительных корней $\mu_1, ..., \mu_m$ для всех $t \in [0,T], x \in$ $\in \overline{NZ} \cap \{|x| \leq \text{const}\}, \xi \in R^n, |\xi| = 1$ (см. также Предложения 6.5 [10]). Очевидно, что для любой точки $(x^o, t^o) \in C_A$, если $D^l_\nu u|_{S_{\theta^o}} = 0 (l = 0, ..., m-1)$ в некоторой окрестности точки (x^o, t^o), то и $u = 0$ в окрестности точки (x^o, t^o). Здесь $\theta^o = \lambda^2_{\max}(t^o - t_A)^2 - |x^o - x_A|^2$, а $\partial/\partial\nu$ есть векторное поле, нормальное к S_{θ^o}. Действительно, можно локально изменить координаты $t' = \lambda^2_{\max}(t - t_A)^2 - -|x - x_A|^2 - \theta^o$, $x' = x$ и в этих новых координатах оператор P переходит в новый, который также удовлетворяет условию (T). Поэтому можно применить локальную теорему единственности , и, следовательно, $u = 0$ в C_A. Этим завершается доказательство теоремы.

ABSTRACT. We consider the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations which degenerate with respect to the spatial variables. We assume that the coefficients satisfy some conditions formulated both by means of the zeros of the complete symbol and by means of characteristic roots. For these operators we construct the parametrix and the fundamental solution of the Cauchy problem by means of zonal subdivision of the cotangent bundle and of specific classes of pseudo-differential operators and Fourier integral operators.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Kumano-go, "Fundamental solution for a hyperbolic system with diagonal principal part", Comm. Partial Diff. Equations, vol. 4, p. 959 – 1015, 1979.
2. O. A. Oleinik, " On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations", Comm. Pure Appl. Math., vol. 23, p. 569 - 586, 1970.
3. T. Mandai, "Generalized Levi conditions for weakly hyperbolic equations – An attempt to treat the degeneracy with respect to the space variables", Publ. RIMS, Kyoto Univ., vol. 22, p. 1 – 23, 1986.
4. T. Nishitani, " A necessary and sufficient condition for the hyperbolisity of second order equations with two independent variables", J. Math. Kyoto Univ., vol. 24, no.1, p. 91 – 104, 1984.
5. S. Tarama, "Sur le probleme de Cauchy pour une class des operateurs differentieles du type faiblement hyperbolique", J. Math. Kyoto Univ., vol.22, p. 333 – 368, 1982.
6. К. А. Ягджян, "Псевдодифференциальные операторы с параметром и фундаментальное решение задачи Коши для операторов с кратными характеристиками", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 21, № 4, стр. 317 – 344, 1986.
7. H. Kumano-go, " A calculus of Fourier integral operators on and the fundamental solution for the operator of hyperbolic type", Comm. Partial Diff. Equat, vol. 1, p. 1 – 44, 1976.
8. L. Hormander, Analysis of Linear Partial Differential Operators, vol. IV : Fourier integral operators, Berlin, Springer, 1985.

9. К. А. Ягджян, "Экспонента псевдодифференциальных операторов и вырождающиеся уравнения", Успехи мат. наук, т. 42, вып.4, стр. 170, 1987.
10. S. Mizohata, The Theory of Partial Differential Equations, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.
11. K. Shinkai," On the fundamental solution for a degenerate hyperbolic systems", Osaka J. Math., vol. 18, p. 257 - 288, 1981.

24 Марта 1992

Институт математики
АН Армении