

ГАУССОВСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ФИКСИРОВАННОЙ И ВОЗРАСТАЮЩЕЙ РАЗМЕРНОСТИ

В. Р. Фаталов, В. - Д. Рихтер

Известия Академии Наук Армении. Математика,
том 27, №1, 1992

В работе методом Лапласа для кратных интегралов получено асимптотическое поведение вероятности $P((\sum_{i=1}^k |X_i|^p)^{\frac{1}{p}} > u)$, $u \rightarrow \infty, p > 0$ для гауссовских независимых случайных величин X_i . Исследовано также большое отклонение плотности функционала Минковского для возрастающей размерности k .

§1. ВВЕДЕНИЕ

Большие отклонения вероятностей норм или более общих функционалов гауссовских векторов со значениями в различных функциональных пространствах вызывают широкий интерес специалистов (см., например, [2,3,4,7,14], а асимптотическое поведение супремума норм гауссовских элементов в $C(T)$ исследовалось в работах [3,5,7,11,17].

Пространствам l_p и

$$l_p^{(k)} = \{x \in R^k : (\sum_{i=1}^k |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}, p > 0$$

уделялось мало внимания. Пусть $X = (X_1, X_2, \dots, X_k, \dots)$ и $X^{(k)} = (X_1, \dots, X_k)$ обозначают гауссовские случайные векторы с независимыми координатами в l_p и $l_p^{(k)}$, соответственно. Положим

$$\|X\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |X_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Точное асимптотическое поведение вероятности $P(\|X\|_p > u)$, при $u \rightarrow \infty$ изучено в работах [3,8,9,12,18] при $p \geq 2$ (менее изучен случай $p < 2$). В [3,

Теорема 4.4] верхние и нижние оценки даны для $P(\|X^{(k)}\|_{p,k} > u)$, при $0 < p < 2$, а в [14] установлен порядок асимптотического поведения $P(\|X^{(k)}\|_{p,k} > u)$, при $u \rightarrow \infty$ для $1 \leq p < 2$.

Естественно, что задачи больших уклонений в l_p и $l_p^{(k)}$ тесно связаны. Предположим, что математические ожидания всех компонент X_i выше определенного гауссовского вектора X равны нулю. Пусть σ_i^2 обозначает дисперсию X_i , $i = 1, 2, \dots$ и предположим, что

$$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \sigma_3^2 \geq \dots$$

Далее, пусть выполнено условие для некоторой неограниченно возрастающей последовательности (d_k)

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k d_k B_k \log k < \infty,$$

где

$$B_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} \sigma_i^p.$$

В работах [12, 15] было показано, что если $p > 2$, то

$$P(\|X\|_p > u) \sim P(\|X^{(k)}\|_{p,k} > u) \quad \text{при } u \rightarrow \infty$$

с размерностью k , порождающей некоторую функцию $k = k(u)$, удовлетворяющую соотношению асимптотической эквивалентности

$$k(u) \sim \frac{u^2}{d_u^{\frac{1}{p}} \log u} \quad \text{при } u \rightarrow \infty.$$

При доказательстве этого результата показывается, что поведение большого уклонения гауссовской меры определяется поведением меры в некоторых малых окрестностях таких точек множества уклонения, которые расположены вблизи начала координат.

В §3, мы приводим результаты подобного вида и доказываем аналогичные теоремы в локальном случае, а именно, для плотностей некоторых типов функционала Минковского гауссовских случайных векторов. Размерности этих векторов стремятся к бесконечности. Мы используем геометрический метод доказательства, впервые примененный в работах [13, 14, 16].

В §2, исследуется асимптотическое поведение вероятности больших уклонений $P(\|X^{(k)}\|_{p,k} > u)$, $u \rightarrow \infty$ для фиксированной размерности k . Случаи $p > 2$, $p = 2$, $0 < p < 2$ изучаются с помощью метода Лапласа для кратных интегралов [1,4,6].

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧНОЙ АСИМПТОТИКИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ МЕТОДОМ ЛАПЛАСА

Всюду в этом параграфе $X^{(k)} = (X_1, \dots, X_k)$ обозначает гауссовский случайный вектор со значениями в k -мерном евклидовом пространстве R^k , k фиксировано. Предположим, что математическое ожидание $EX^{(k)}$ – нулевой элемент в R^k , а ковариантная матрица $EX^T X = R$ предполагается диагональной

$$R = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2)$$

с элементами σ_i^2 , удовлетворяющими

$$\sigma_1^2 = \dots = \sigma_m^2 > \sigma_{m+1}^2 \geq \sigma_{m+2}^2 \geq \dots \geq \sigma_k^2$$

для некоторого $m \in \{1, 2, \dots, k\}$. Положим

$$\psi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} x^{-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \neq 0.$$

Теорема 1. (i) Если $p > 2$ и $C_p = 2m$ для всех p , то

$$P(\|X^{(k)}\|_{p,k} > x) = C_p \psi\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)(1 + O(x^{-2})), \quad x \rightarrow \infty.$$

(ii) Если $p = 2$, то

$$P(\|X^{(k)}\|_{p,k} > x) = C_2 x^{m-1} \psi\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)(1 + O(x^{-2})), \quad x \rightarrow \infty,$$

где

$$C_2 = 2^{\frac{3-m}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} \sigma_1^{1-m} \prod_{i=m+1}^k \frac{(1 - \frac{\sigma_i^2}{\sigma_1^2})^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})},$$

и Γ – гамма функция.

(iii) Если $2 > p > 0$, то

$$P(\|X^{(k)}\|_{p,k} > x) = C_p \psi\left(\frac{x}{\sigma(p)}\right)(1 + O(x^{-2})), \quad x \rightarrow \infty,$$

где

$$C_p = 2^k (2 - p)^{\frac{1-k}{2}}$$

и

$$\sigma(p) = \left(\sum_{i=1}^k \sigma_i^{\frac{2p}{2-p}} \right)^{\frac{2-p}{2p}}.$$

Замечания

1. Напомним, что если Φ обозначает стандартное гауссовское распределение в R^k , а H - произвольное полупространство в R^k с евклидовым расстоянием от начала координат равным единице, то

$$\Phi(xH) = \Psi(x)(1 + O(1)) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

2. В [18] дана оценка точного асимптотического поведения вероятности

$$P(\|X\|_2 > x) \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

для гильбертова пространства l_2 -значных гауссовских случайных элементов $X = (X_1, X_2, \dots)$. Это соотношение в случае (ii) является непосредственным следствием результата в [18]. Более того, мы приведем здесь другое доказательство, тесно связанное с доказательством в других конечномерных случаях (i) и (iii). Это доказательство показывает откуда возникает существенное различие в асимптотическом поведении $P(\|X^{(k)}\|_{p,k} > x)$, $x \rightarrow \infty$. Напомним, что метод, использованный в [18], был основан на преобразовании Лапласа и интегрировании вдоль границы в комплексной плоскости.

3. С помощью формулы нового геометрического представления многомерного стандартного гауссовского распределения, в [14] были доказаны соотношения типа

$$0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\|X^{(k)}\|_{p,k} > x)}{\Psi(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\|X^{(k)}\|_{p,k} > x)}{\Psi(x)} < \infty,$$

при $1 \leq p < 2$, $2 < p$, $\sigma_1 = 1$ и $m = k$. В [10] было показано, что существуют постоянные C_p такие, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\|X^{(k)}\|_{p,k} > x)}{\Psi(x)} = C_p.$$

Однако, в [10] авторам не удалось оценить их. Случай $0 < p < 1$ не был изучен.

Как упоминалось выше, мы будем использовать метод Лапласа для определения постоянных C_p в трех случаях Теоремы 1. Для этого используем соответствующий результат из теории многомерных интегралов Лапласа, который можно найти в [6, Теорема 4.5]. Прежде, чем сформулировать этот результат мы рассмотрим уравнение

$$P(\|X^{(k)}\|_{p,k} > x) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} x^k \prod_{i=1}^k \sigma_i^{-1} J(x),$$

$$J(x) = \int \cdots \int_{\{y \in R^k: \|y\|_{p,k} > 1\}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} \sum_{i=1}^k \frac{y_i^2}{\sigma_i^2}\right) dy_1 \dots dy_k.$$

Пусть теперь

$$F(x) = \int_{y \in \Omega} f(y) \exp(xS(y)) dy, \quad x > 0$$

обозначает произвольный интеграл Лапласа по области $\Omega \subset R^k$ от вещественнозначных функций f и S , определенных на замыкании $\bar{\Omega}$ области Ω и удовлетворяющих следующим условиям:

(C1) f и S непрерывны на $\bar{\Omega}$.

(C2) функция S имеет только один максимум в y^0 , $y^0 \in \partial\Omega$, где $\partial\Omega$ обозначает границу Ω .

(C3) Нормальная производная S по внутренней нормали n от $\partial\Omega$ существует в точке y^0 и не совпадает с нулевым элементом R^k : $\frac{\partial S}{\partial n}(y^0) \neq 0$.

(C4) Функции f , S также как и граница $\partial\Omega$, дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности y^0 .

(C5) Пусть $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$ обозначает координаты точки в ортонормированном базисе в касательной гиперплоскости к границе $\partial\Omega$ в точке y^0 , а $\tilde{S}$ - сужение S на $\partial\Omega$ в окрестности точки y^0 . Предположим, что

$$B = \left(\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(y^0) \right) \quad i, j = 1, \dots, k-1,$$

— отрицательно определенная матрица.

Замечание 4. Точка y^0 , удовлетворяющая условиям (C3) и (C5), называется невырожденной.

Теорема 2. ([6]) Если выполнены предположения (C1) - (C5), то

$$F(x) = Cx^{-\frac{k+1}{2}} f(y^0) \exp(xS(y^0))(1 + O(x^{-1})), \quad x \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где

$$C = (2\pi)^{\frac{k-1}{2}} |\det B|^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{\partial S}{\partial n}(y^0) \right)^{-1}.$$

Замечание 5. Если S имеет конечное число точек максимума на $\partial\Omega$, то из аддитивности интеграла, $F(x)$ равно сумме членов в правой части (1), соответствующих всем точкам максимума.

Для доказательства Теоремы 1 применим Теорему 2 к $J(x)$. Для этого положим

$$\Omega = \{y \in R^k : \|y\|_{p,k} > 1\}$$

и

$$-S(y) = \sum_{i=1}^k \frac{y_i^2}{\sigma_i^2}, \quad y \in \Omega.$$

Лемма 1. (i) Если $p > 2$, то $\min(-S(y) : y \in \Omega) = \frac{1}{\sigma_1^2}$ и

$$y_{\pm}^i = (0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0), \quad i = 1, \dots, m,$$

где ± 1 являются точками минимума функции $-S$ на границе $\partial\Omega$, причем при фиксированном i , ± 1 расположены на i -том месте.

(ii) Если $2 > p > 0$, то $\min(-S(y) : y \in \Omega) = \frac{1}{\sigma_1^{2(p)}}$ и 2^k точек минимума на $\partial\Omega$ состоит из всех точек $z = (z_1, \dots, z_k)$ с

$$z_i = \pm \left(\frac{\sigma(p)}{\sigma_1} \right)^{-\frac{2}{2-p}}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Доказательство. Из теоремы Вейерштрасса об экстремуме непрерывной функции, определенной на компактном множестве и

$$\sum_{i=1}^k \frac{y_i^2}{\sigma_i^2} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \|y\|_{2,k} \rightarrow \infty$$

следует, что для функции $-S$ существует точка минимума. При решении задачи на экстремум мы используем метод множителей Лагранжа и определяем функцию Лагранжа

$$L(y; \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 \sum_{i=1}^k \frac{y_i^2}{\sigma_i^2} + \lambda_1 (1 - \sum_{i=1}^k |y_i|^p), \quad \lambda_0, \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_0 + \lambda_1 > 0.$$

Из условия дифференцируемости (С4) для границы $\partial\Omega$, а также необходимого условия для существования экстремального значения, после дифференцирования L по y_i , получаем

$$2\lambda_0\sigma_i^{-2}y_i - \lambda_1 p|y_i|^{p-1}\text{sign}(y_i) = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (2)$$

Кроме того, имеем уравнение

$$\lambda_1(1 - \sum_{i=1}^k |y_i|^p) = 0. \quad (3)$$

Если $\lambda_0 = 0$, то из (2) следует, что $\lambda_1 \neq 0$ и $y_i = 0$, при $p > 1$, а $y_i = \infty$, при $p < 1$. А это противоречит (3). Следовательно, $\lambda_0 \neq 0$.

Положим $\lambda_0 = 1$, тогда $\lambda_1 \neq 0$. Из (2) следует, что либо

$$|y_i| = \left(\frac{1}{2}\lambda_1 p \sigma_i^2\right)^{\frac{1}{2-p}} \quad (4a)$$

либо

$$y_i = 0 \quad \text{при} \quad p > 1. \quad (4b)$$

Пусть $l \in \{1, \dots, k\}$ обозначает число отличных от нуля координат критической точки y , а $I_l \subset \{1, 2, \dots, k\}$ - множество индексов этих координат. Заметим, что если $1 > p > 0$, то $l = k$.

Из уравнений (2) - (4) следует, что

$$1 = \sum_{i \in I_l} |y_i|^p = \frac{2}{\lambda_1^{\frac{1}{p}}} \sum_{i \in I_l} \frac{y_i^2}{\sigma_i^2}$$

и

$$\lambda_1 = \frac{2}{p} \left(\sum_{i \in I_l} \sigma_i^{\frac{2p}{2-p}} \right)^{\frac{2-p}{p}}$$

Таким образом

$$|y_i| = \begin{cases} \sigma_i^{\frac{2}{2-p}} \left(\sum_{j \in I_l} \sigma_j^{\frac{2p}{2-p}} \right)^{-\frac{1}{p}}, & i \in I_l \\ 0 & i \notin I_l. \end{cases}$$

И, следовательно

$$\min_{l \in \{1, \dots, k\}} \min_{I_l} \sum_{i \in I_l} \frac{y_i^2}{\sigma_i^2} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_1^2}, & \text{при } p > 2 (l=1) \\ \left(\sum_{i=1}^k \sigma_i^{\frac{2p}{2-p}} \right)^{\frac{2-p}{p}}, & \text{при } 2 > p > 0 (l=k). \end{cases}$$

Отсюда мы получаем структуру минимальной точки, и Лемма 1 доказана.

Доказательство утверждения (i) Теоремы 1. Применяем пункт (i) Леммы 1. Функция $S(y) = -\sum_{i=1}^k \frac{y_i^2}{\sigma_i^2}$ достигает максимума в точках на границе $y_+^1, y_-^1, \dots, y_+^m, y_-^m$ области $\bar{\Omega} = \{y \in R^k : \|y\|_{p,k} \geq 1\}$. Каждая из этих точек удовлетворяет условиям Теоремы 2. Направление внутренней нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω в точках максимума совпадает с направлениями координатных осей. Нормальными производными являются

$$\frac{\partial S}{\partial y_i}(y_{\pm}^i) = \mp \frac{2y_i}{\sigma_i^2} \Big|_{y_i=\pm 1} = -\frac{2}{\sigma_i^2}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Касательные гиперплоскости H_+^i и H_-^i к $\partial\Omega$ в точках максимума y_+^i и y_-^i , соответственно, параллельны к гиперплоскости, образованной $k-1$ векторами, направления которых совпадают с направлением координатных осей $y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_k$.

Для оценки B_+^1 , обозначающей матрицу B точки y_+^1 , рассмотрим сужение $\tilde{S}_{1,+}$ функции S на $\partial\Omega$ в окрестности точки y_+^1 :

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{1,+}(\tilde{y}) &= S|_{\partial\Omega}(\tilde{y}) = S\left(\left(1 - \sum_{i=1}^k |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, y_2, \dots, y_k\right) = \\ &= -\frac{1}{\sigma_1^2} \left(1 - \sum_{i=1}^k |y_i|^p\right)^{\frac{2}{p}} - \sum_{i=1}^k \frac{y_i^2}{\sigma_i^2}, \quad \tilde{y} = (y_2, \dots, y_k). \end{aligned}$$

В точке y_+^1 имеем $\tilde{y} = 0 \in R^{k-1}$ и

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}_{1,+}}{\partial y_i \partial y_j}(0) = -\frac{2\delta_{i,j}}{\sigma_i^2}, \quad i, j = 2, \dots, k,$$

где $\delta_{i,j} = 0$, при $i \neq j$ и $\delta_{i,j} = 1$, при $i = j$. Следовательно

$$B_+^1 = -2 \operatorname{diag} \left(\frac{1}{\sigma_2^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_k^2} \right).$$

Аналогично, для всех $l \in \{1, \dots, k\}$ получаем, что

$$B_{\pm}^l = -2 \operatorname{diag} \left(\frac{1}{\sigma_1^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_{l-1}^2}, \frac{1}{\sigma_{l+1}^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_k^2} \right),$$

т. е. отрицательно определена. Остается применить Теорему 2.

Доказательство утверждения (ii) Теоремы 1. Снова применим Теорему 2 к $J(x)$. Но так как в этом случае множество точек максимума функции

$$y \mapsto S(y) = - \sum_{i=1}^k \frac{y_i^2}{\sigma_i^2}$$

есть некоторое многообразие, т.е. не существует конечного числа изолированных точек, как предполагалось в Замечании 5, мы должны ограничить $J(x)$ так, чтобы выполнялись бы все условия Теоремы 2. Далее, определим частные сферические координаты $(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}, \bar{y}_{m+1}, \dots, \bar{y}_k)$ формулами

$$y_1 = r \cos \varphi_1, y_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \dots,$$

$$y_{m-1} = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \cos \varphi_{m-1},$$

$$y_m = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2} \sin \varphi_{m-1},$$

$$y_{m+1} = \bar{y}_{m+1}, \dots, y_k = \bar{y}_k.$$

Якобианом этого преобразования является

$$r^{m-1} (\sin \varphi_1)^{m-2} (\sin \varphi_2)^{m-3} \dots \sin \varphi_{m-2}.$$

Следовательно

$$J(x) = \omega_m \int \dots \int_{\substack{(r^2 + \sum_{i=m+1}^k y_i^2 > 1, \\ r \geq 0}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \left(\frac{r^2}{\sigma_1^2} + \sum_{i=m+1}^k \frac{y_i^2}{\sigma_i^2} \right) \right) r^{m-1} dr dy_{m+1} \dots dy_k,$$

где

$$\omega_m = \int_0^\pi (\sin \varphi_1)^{m-2} d\varphi_1 \dots \int_0^\pi \sin \varphi_{m-2} d\varphi_{m-2} \int_0^\pi d\varphi_{m-1} = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})}$$

равно площади поверхности единичной сферы в R^m . Применим Теорему 2 к интегралу

$$I(x) = \int \dots \int z_1^{m-1} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \left(\frac{z_1^2}{\sigma_1^2} + \sum_{i=2}^{k-m+1} \frac{z_i^2}{\sigma_{m+i-1}^2} \right) \right) dz_1 \dots dz_{k-m+1}$$

с областью интегрирования

$$\{z \in R^m : \sum_{i=1}^{k-m+1} z_i^2 > 1, z_1 \geq 0\}.$$

Для применения формулы (1), сформулируем без доказательства следующую лемму.

Лемма 2. Минимум функции

$$z \mapsto -S(z) = \frac{z_1^2}{\sigma_1^2} + \sum_{i=2}^{k-m+1} \frac{z_i^2}{\sigma_{m+i-1}^2}$$

в области

$$\bar{\Omega} = \{z \in R^{k-m+1} : \sum_{i=1}^{k-m+1} z_i^2 \geq 1, z_1 \geq 0\}$$

достигается в точке $z^0 = (1, 0, \dots, 0) \in \partial\Omega$, и только в ней, и равен $\frac{1}{\sigma_1^2}$.

Возвращаясь к доказательству утверждения (ii) Теоремы 1, рассмотрим условие (СЗ). $n = (z_1, 0, \dots, 0)$ является внутренней нормалью к $\partial\Omega$ в точке z^0 , а нормальной производной функции S по этой нормали является

$$\frac{\partial S}{\partial n}(z^0) = \frac{\partial S}{\partial z_1}(z^0) = -\frac{2}{\sigma_1^2}.$$

Наконец, остается оценить матрицу B из условия (С5). Касательная гиперплоскость к границе $\partial\Omega$ в точке z^0 параллельна координатной гиперплоскости H_0 , которая определяется уравнением $z_1 = 0$. Через $z_2, \dots, z_{k-m+1}$ обозначим координаты точки из H_0 относительно некоторого ортогонального базиса в H_0 . Сужение $\tilde{S}$ функции S на границу $\partial\Omega$ в окрестности точки z^0 представляется в виде :

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\tilde{z}) &= S|_{\partial\Omega}(\tilde{z}) = S\left(\left(\left(1 - \sum_{i=2}^{k-m+1} z_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, z_2, \dots, z_{k-m+1}\right)\right) = \\ &= -\frac{1}{\sigma_1^2} - \sum_{i=2}^{k-m+1} \left(\frac{1}{\sigma_{m+i-1}^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right) z_i^2, \quad \tilde{z} = (z_2, \dots, z_{k-m+1}). \end{aligned}$$

Следовательно

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial z_i \partial z_j}(0) = -2\delta_{i,j} \left(\frac{1}{\sigma_{m+i-1}^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)$$

и

$$B = -2\left(\text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_{m+1}^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_k^2}\right) - \frac{1}{\sigma_1^2} I\right),$$

т. е. отрицательно определена, здесь I обозначает $(k-m) \times (k-m)$ -мерную матрицу. Применение Теоремы 2 завершает доказательство.

Доказательство утверждения (iii) Теоремы 1. Также как и при доказательстве утверждений (i) и (ii), мы применим Теорему 2 к функции $J(x)$ (определенной после Замечания 3). Пусть $z^0 = (z_1^0, \dots, z_k^0)$ - одна из точек $z = (z_1, \dots, z_k)$

с $z_i = \pm \left(\frac{\sigma(p)}{\sigma_1} \right)^{\frac{2}{p-2}}, i = 1, \dots, k$ из Леммы 1. Что касается условия (С3), покажем, что

$$\frac{\partial S}{\partial n}(z^o) = -2 \left(\sum_{i=1}^k \sigma_i^{\frac{4(p-1)}{2-p}} \right)^{\frac{1}{2}} \sigma(p)^{\frac{2}{p-2}}, \quad (5)$$

где $n = (n_1, \dots, n_k)$ - внутренняя нормаль к

$$\partial\Omega = \{y \in R^k : \sum_{i=1}^k |y_i|^p = 1\}$$

в точке z^o . Заметим, что $n_i = \frac{\partial G}{\partial y_i}(z^o)$, где $G(y) = \sum_{i=1}^k |y_i|^p - 1$. Следовательно

$$n_i = p|z_i^o|^{p-1} \text{sign} z_i^o, i = 1, \dots, k.$$

Теперь, равенство (5) следует из

$$\frac{\partial S}{\partial n}(z^o) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial S}{\partial y_i}(z^o) \frac{n_i}{\|n\|_{2,k}}.$$

Что касается матрицы $B = (b_{j,q})$ покажем, что в данном случае из условия (С5) следует, что

$$\det B = (-2(2-p))^{k-1} \prod_{i=1}^k \sigma_i^{-2} \sum_{j=1}^k \frac{\sigma_j^2 n_j^2}{\|n\|_{2,k}^2}, \quad (6)$$

а B отрицательно определена. Наконец, заметим, что касательная гиперплоскость к границе $\partial\Omega = \{y \in R^k : G(y) = 0\}$ в точке z^o удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=1}^k (y_i - z_i^o) n_i = 0. \quad (7)$$

Сделаем замену переменных $u = T(y - z^o)$, где $T = (t_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$ - некоторая ортогональная матрица с

$$(t_{k,1}, \dots, t_{k,k}) = \frac{n}{\|n\|_{2,k}}.$$

Тогда (7) эквивалентно уравнению $u_k = 0$, т.е. касательная гиперплоскость совпадает с координатной гиперплоскостью $Ou_1 u_2 \dots u_{k-1}$. Границу $\partial\Omega$ можем записать в новых координатах :

$$\partial\Omega^* = \{u \in R^k : \sum_{i=1}^k |z_i^o + \sum_{j=1}^k \theta_{ij} u_j|^p = 1\},$$

где $\theta = (\theta_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$ - обратная к T матрица.

Из теоремы о неявной функции получаем, что в окрестности точки $u = 0$ граница удовлетворяет уравнению

$$u_k = g(\tilde{u}), \quad \tilde{u} = (u_1, \dots, u_{k-1}).$$

Здесь g - некоторая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\sum_{i=1}^k |z_i^0 + \sum_{j=1}^{k-1} \theta_{ij} u_j + \theta_{ik} g(u_1, \dots, u_{k-1})|^p = 1 \quad (8)$$

в некоторой окрестности точки $u = (u_1, \dots, u_k) = 0$. Функцию S можно записать также в виде :

$$S(y) = S(T^{-1}u + z^0) = - \sum_{i=1}^k \sigma_i^{-2} (z_i^0 + \sum_{j=1}^k \theta_{ij} u_j)^2 := S^*(u).$$

Сужением $\tilde{S}$ функции S^* на $\partial\Omega^*$ в окрестности точки z^0 является

$$\tilde{S}(\tilde{u}) = S^*|_{\partial\Omega^*}(\tilde{u}) = - \sum_{i=1}^k \sigma_i^{-2} (z_i^0 + \sum_{j=1}^{k-1} \theta_{ij} u_j + \theta_{ik} g(u_1, \dots, u_{k-1}))^2. \quad (9)$$

Из определения функции g следует, что $g(\tilde{0}) = 0$. Из геометрических соображений имеем

$$\text{grad } g(\tilde{0}) = \tilde{0} = (0, \dots, 0) \in R^{k-1}.$$

Это соотношение можно получить также аналитически, дифференцируя (8) по u_j и используя соотношение $g(\tilde{0}) = 0$. Имеем

$$\frac{\partial g}{\partial u_j}(\tilde{0}) = - \frac{\sum_{i=1}^k \theta_{ij} |z_i^0|^{p-1} \text{sign } z_i^0}{\sum_{i=1}^k \theta_{ik} |z_i^0|^{p-1} \text{sign } z_i^0}, \quad j = 1, \dots, k-1.$$

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^k \theta_{ij} |z_i^0|^{p-1} \text{sign } z_i^0 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^k \theta_{ij} n_i.$$

Из определения θ следует, что

$$\sum_{i=1}^k \theta_{ij} |z_i^0|^{p-1} \text{sign } z_i^0 = \delta_{k,j} p^{-1} \|n\|_{2,k}, \quad j = 1, \dots, k \quad (10)$$

Следовательно

$$\frac{\partial g}{\partial u_j}(\bar{0}) = 0, \quad j = 1, \dots, k-1.$$

Оценивая теперь частные производные второго порядка обеих частей (8) и используя соотношение (10), получаем

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u_j \partial u_q}(\bar{0}) = -\frac{p(p-1)}{\|n\|_{2,k}} \sum_{i=1}^k |z_i^o|^{p-2} \theta_{ij} \theta_{iq},$$

$$j, q = 1, \dots, k-1.$$

Отсюда следует, что

$$b_{jq} = \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial u_j \partial u_q}(\bar{0}) = -2 \sum_{i=1}^k \sigma_i^{-2} \theta_{ij} \theta_{iq} + \frac{2p(p-1)}{\|n\|_{2,k}} \sum_{i=1}^k \sigma_i^{-2} z_i \theta_{ik} \sum_{s=1}^k |z_s^o|^{p-2} \theta_{sj} \theta_{sq},$$

$$j, q = 1, \dots, k-1.$$

Из (10) имеем

$$\sum_{i=1}^k \sigma_i^{-2} z_i^o \theta_{ik} = \|n\|_{2,k} \sigma(p)^{-2} p^{-1}$$

и

$$\sum_{i=1}^k |z_i^o|^{p-2} \theta_{ij} \theta_{iq} = \sum_{i=1}^k \sigma_i^{-2} \theta_{ij} \theta_{iq} \sigma^2(p).$$

Наконец

$$b_{jq} = -2(2-p) \sum_{i=1}^k \sigma_i^{-2} \theta_{ij} \theta_{iq}.$$

Прямое вычисление $\det B$ громоздко и потому опускается. Теоремой 2 и формулами (5) и (6) доказательство завершается.

§3. БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ПЛОТНОСТЕЙ ФУНКЦИОНАЛА МИНКОВСКОГО ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ ВОЗРАСТАЮЩИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Всюду в этом параграфе $\|\cdot\|^*$ и $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{2,k}$ обозначают произвольную и евклидову нормы в R^k , соответственно. Положим

$$A^* = \{y \in R^k : \|y\|^* \geq 1\}$$

и определим квадрат расстояния A^* от начала координат следующим образом :

$$a^* = a(A^*) = \inf \{\|y\|^2 : y \in A^*\}.$$

Как упоминалось выше, одним из интересных вопросов теории больших уклонений является описание таких малых окрестностей A^* области

$$M(A^*) = \{y \in A^* : \|y\|^2 = a^*\},$$

что асимптотическое поведение $\Phi(xA^*)$, $x \rightarrow \infty$ полностью определяется асимптотическим поведением $\Phi(x\bar{A}^*)$, при $x \rightarrow \infty$. Здесь

$$xA^* = \{(xy_1, \dots, xy_k) : (y_1, \dots, y_k) \in A^*\}, \quad x > 0.$$

Для формулировки результата

$$B^*(x) = \{y \in R^k : \|y\|^2 \leq a^* + 2\frac{\rho(x)}{x^2}\},$$

где ρ - функция из $[1, \infty]$ в $[0, \infty]$. Как видно из следующей теоремы можем считать, что

$$A^* = A^* \cap B^*(x).$$

для подходящей функции ρ .

Теорема 3([15]). Если $\rho(x) \geq (k+2)\log x$, то

$$\Phi(xA^*) \sim \Phi(x[A^* \cap B^*(x)]), \quad x \rightarrow \infty.$$

Предположим ниже, что размерность k зависит от параметра x , т.е. $k = k(x)$. Обозначим через $A(x)$, $x \geq 1$ такие подмножества пространства R^k , что их дополнения $A^c(x) = R^k \setminus A(x)$ являются выпуклыми окрестностями начала координат в соответствующих пространствах R^k и удовлетворяют условию

$$0 < C_0 \leq a(A(x)) \leq C_1 < \infty.$$

Следующая теорема из [16] обобщает Теорему 3 в двух направлениях: возможного увеличения размерности и рассмотрения более общего класса множеств $A(x)$ по сравнению с классом множеств A^* .

Теорема 4 ([16]). Если $\rho(x) \geq 2k(x) \log x$, $\rho(x) = o(x^2)$, $k(x) = o(x^2)$, при $x \rightarrow \infty$, то

$$\Phi(xA(x)) \sim \Phi(x[A(x) \cap B(A(x))]) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Здесь

$$B(A(x)) = \{y \in R^k : \|y\|^2 \leq a(A(x)) + 2\frac{\rho(x)}{x^2}\}.$$

Целью параграфа является доказательство аналогичного локального результата. Определим функционал Минковского по формуле

$$h_A(y) = \inf\{r > 0 : y \in rA\}, y \in R^k,$$

где $A = A(x)$ как и выше. Тогда

$$\Phi(rA(x)) = \Phi(\{y \in R^k : h_{A(x)}(y) > r\}).$$

Положим

$$\varphi(r; A(x)) = \frac{d}{dr} \Phi(rA(x)), \quad r > 0.$$

Пусть

$$S(v) = \{y \in R^k : \|y\| = v\}, \quad v > 0$$

и

$$\mathcal{F}(v; A) = U_o(A \cap S(v)), \quad v > 0,$$

где через U_o обозначена равномерное вероятностное распределение на $S(v)$. Изучение асимптотического поведения плотности $\varphi(r; A(x))$ функционала Минковского $h_{A(x)}(X)$ некоторого стандартного гауссовского случайного вектора $X = X^{(k)}$ в R^k , $k = k(x)$ начнем со следующей формулы из работы [10].

Лемма 3 ([10]). Если $A \subset R^k$ измеримо, то

$$\varphi(r; A) = C(k)r^{k-3} \exp(-\frac{1}{2}r^2 a) I(r; A),$$

где

$$I(r; A) = \int_0^\infty (a + \frac{2c}{r^2})^{\frac{k}{2}-1} e^{-c(k - ar^2 - 2c)} F(\frac{2c}{r^2}; A) dc,$$

причем

$$F(\epsilon; A) = \mathcal{F}((a + \epsilon)^{\frac{1}{2}}; A), \epsilon > 0, \quad a = a(A), \quad C(k) = 2^{1-\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{2})^{-1}.$$

Теорема 5. Если выполнены предположения Теоремы 4, то

$$\varphi(x; A(x)) \sim \varphi(x; A(x) \cap B(A(x))), x \rightarrow \infty.$$

Прежде чем доказать эту теорему заметим, что

$$\varphi(x; A(x)) = \varphi(x; A(x) \cap B(A(x))) + \varphi(x; A(x) \cap B^c(A(x))).$$

Лемма 4. При предположениях Теоремы 4

$$\exp(-\frac{1}{2}x^2 a(A(x))) = O(1) |\varphi(x; A(x) \cap B(A(x)))|, \quad x \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Из Леммы 3 следует, что

$$\varphi(x; A(x) \cap B(A(x))) = C(k) r^{k-3} \exp(-\frac{1}{2}r^2 a(A(x))) \tilde{I}(r; \rho(x)),$$

где

$$\tilde{I}(r; \rho(x)) = I(r; A(x) \cap B(A(x))).$$

Пусть $H(x)$ обозначает полупространство в R^k , удовлетворяющее условию

$$H(x) \subseteq A(x) \quad \text{и} \quad a(H(x)) = a(A(x)) = a.$$

Тогда

$$-\varphi(x; A(x) \cap B(A(x))) \geq \int_0^{\rho(x)} (a + \frac{2c}{x^2})^{\frac{k}{2}-1} e^{-c} (ax^2 + 2c - k) F(\frac{2c}{x^2}; H(x)) dc. \quad (11)$$

Из доказательств в [14, Теорема 4] следует, что

$$F(\frac{2c}{x^2}; H(x)) \sim \omega_{k-1} \omega_k^{-1} \int_0^{\alpha(x)} (\sin \theta)^{k-2} d\theta, \quad x \rightarrow \infty,$$

где

$$\alpha(x) = \arctan((\frac{2c}{a})^{\frac{1}{2}}/x)$$

(ω_k было определено в параграфе 2). Методом Лапласа получаем

$$\int_0^{\alpha(x)} (\sin \theta)^{k-2} d\theta \sim \left(\frac{\alpha(x)}{k-2} \right) (\sin \alpha(x))^{k-2}, x \rightarrow \infty.$$

Следовательно

$$F\left(\frac{2c}{x^2}; H(x)\right) \sim \left(\frac{k}{2\pi a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2c}{x^2}\right)^{\frac{k-1}{2}} \left(a + \frac{2c}{x^2}\right)^{1-\frac{k}{2}}$$

при $x \rightarrow \infty$. Так как $ax^2 - 2c - k \sim ax^2, x \rightarrow \infty$, мы получаем

$$\left(\frac{a}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 a\right)$$

является асимптотическим представлением для нижней границы функции $-\varphi(x; A(x) \cap B(A(x)))$ (см. в (11)).

Лемма 5. Если выполнены предположения Теоремы 4, то

$$\varphi(x; A(x) \cap B^c(A(x))) = o(1)\varphi(x; A(x) \cap B(A(x))), x \rightarrow \infty.$$

Доказательство. В силу Леммы 3 имеем

$$\varphi(x; A(x) \cap B^c(A(x))) = C(k)x^{k-3} \exp\left(-\frac{1}{2}ax^2 - \rho(x)\right) l(x),$$

где

$$l(x) = \int_0^\infty \left(a + \frac{2\rho(x) + 2c}{x^2}\right)^{\frac{k}{2}-1} e^{-c} dc.$$

В [16, доказательство Теоремы 3] показано, что

$$l(x) = o(1)x^{1-k}C(k)^{-1} \exp(\rho(x)), x \rightarrow \infty.$$

Следовательно

$$\varphi(x; A(x) \cap B^c(A(x))) = o(x^{-2})\varphi(x; A(x) \cap B(A(x))), \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

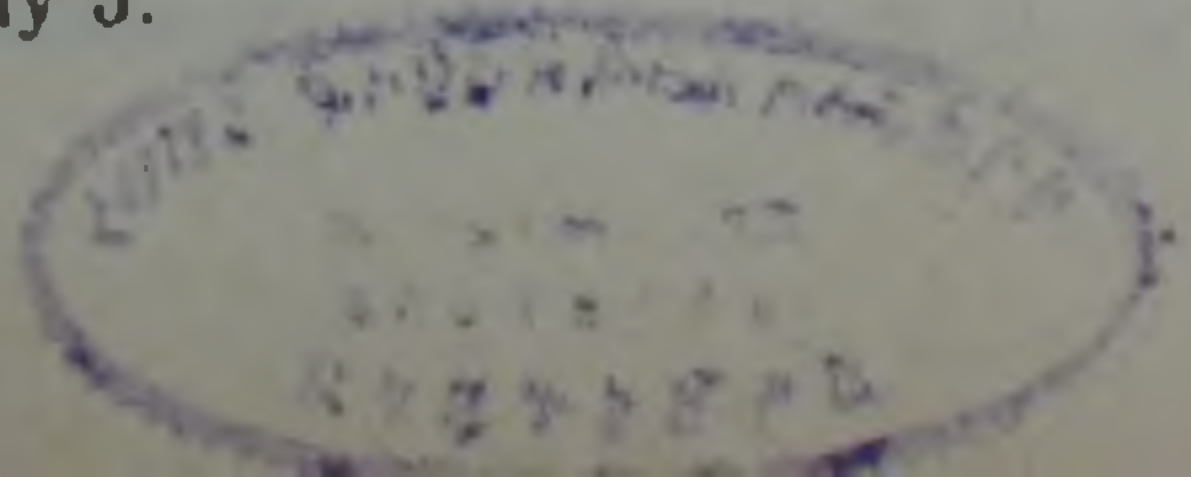
Замечание 6. Последний шаг в доказательстве Леммы 5 показывает, что при переходе от интеграла к локальному случаю возможна замена условия

$$\rho(x) \geq 2k \log x$$

на более слабое

$$\rho(x) \geq 2(k-1) \log x.$$

Замечание 7. Леммы 4 и 5 доказывают Теорему 5.



Замечание 8. После того как настоящая работа была подготовлена к печати, мы получили оттиск работы В. Линде "Гауссовы меры больших шаров в R^n ", в которой автор доказывает Теорему 1 другим способом, без оценивания порядка остаточных членов.

ABSTRACT. The asymptotical behaviour of the probabilities

$P((\sum_{i=1}^k |X_i|^p)^{\frac{1}{p}} > u), u \rightarrow \infty, p > 0$ for Gaussian independent random variables

X_i is obtained by Laplace method for multiple integrals. Also large deviations for the densities of Minkowski functionals of Gaussian vectors for increasing dimensions k are investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Birndt, W.-D. Richter, "Vergleichende Betrachtungen Bestimmung des asymptotischen Verhaltens mehrdimensionaler Laplace-Gauss -Integrale", Z. Anal. Anwen., vol. 4, pp. 269 - 276, 1985.
2. C. Borell, "The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space", Invent. Math., vol. 30, pp. 207 - 216, 1975.
3. V. Dobric, M. B. Marcus, M. Weber, "The distribution of large values of the supremum of a Gaussian processes", Asterisque, no. 157/158, pp. 95 - 127, 1988.
4. R. S. Ellis, J. S. Rosen, "Laplace's method for Gaussian integrals with an application to Statistical Mechanics", Ann. Prob., vol. 10, pp. 46 - 66, 1982.
5. В. Р. Фаталов, "Точная асимптотика функции распределения максимума гауссовского неоднородного случайного поля", Докл. АН Арм. ССР, т.77, №1, стр. 25 - 29, 1983.
6. М. В. Федорюк, Метод Седловой Точки, Москва, 1977.
7. X. Fernique, "Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes", Lect. Notes in Math., vol 480, pp. 1 - 96, 1975.
8. A. Hertle, "On the asymptotic behaviour of Gaussian spherical integrals", Lect. Notes in Math., vol. 990, pp. 221 - 234, 1983.
9. C. R. Hwang, "Gaussian measure of large balls in a Hilbert space", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 78, pp. 107 - 110, 1980 (Erratum ibidem, p. 188, 1985).
10. G. Pap, W.-D. Richter, "Zum asymptotischen Verhalten der Verteilungen und der Dichten gewisser Funktionale Gaußscher Zufallsvektoren", Math. Nachr., vol. 135, pp. 119 - 124, 1988.
11. В. И. Питербарг, Асимптотические Методы в Теории Гауссовских Случайных Процессов и Полей, изд. МГУ, Москва, 1988.
12. W.-D. Richter, "Gaußsche Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen im Banachraum l_p ", Wissensch. Z. TU Dresden, vol. 34, no. 4, p. 60, 1985.
13. W.-D. Richter, "Laplace-Gauss integrals, Gaussian measure asymptotic behaviour and probabilities of moderate deviations", Z. Anal. Anwen., vol. 4, pp. 257 - 267, 1985.
14. W.-D. Richter, "Laplace integrals and probabilities of moderate deviations, In : Probab. Distrib. and Mathem. Stat. Fan, Tashkent, pp. 406-420, 1986.
15. W.-D. Richter, "Moderate deviations for a certain class of sets in finite dimensional space", Theory Probab. Appl., vol. 31, pp. 174 - 175, 1986.
16. W.-D. Richter, "Multidimensional domains of large deviations", to appear.

17. M. Talagrand, "Small tails for the supremum of a Gaussian process", Ann. Inst. H. Poincaré", Ser. B, vol. 24, pp. 307 – 315, 1988.
18. V. M. Zolotarev, "Concerning a certain probability problem", Theory Probab. Appl., vol. 6, pp. 201 – 204, 1961.
19. V. R. Fatalov, " The asymptotics of distribution of the bivariate Kolmogorov-Smirnov statistics in testing the hypothesis on normality", In : Proceedings of the 1st World Congress of the Bernoulli Society, v. 2, (N.N. Bogolyubov, editor), Math. Inst. of USSR Acad. of Scien., Moscow, Tula, pp. 269-274, 1988.

9 Апреля 1991

Ереванский госуниверситет,
Ростокский университет (Германия)