

ЗАМЕЧАНИЯ О ПОРОЖДЕНИИ МЕР В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМЫХ В $\mathbb{R}^3$

Р. В. Амбарцумян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 27, № 5, 1992

В работе рассмотрены два разных способа порождения мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$: с помощью функционалов, определяемых в терминах системы пластинок в $\mathbb{R}^3$ и с помощью метрик в $\mathbb{R}^3$. При первом подходе полная аналогия с изученным ранее плоским случаем может быть достигнута только при дополнительном предположении о существовании плотности. Во втором подходе теорема о порождении плоских мер линейно-аддитивными непрерывными псевдометриками обобщается на $\mathbb{R}^3$ по крайней мере в одном направлении в общем случае и в обоих направлениях в трансляционно-инвариантном случае.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Результаты комбинаторной интегральной геометрии на плоскости (см. [1], [2]) допускают следующую интерпретацию. Предположим, что на каждой прямой g в $\mathbb{R}^2$ определена знакопеременная мера m_g . Тогда при выполнении некоторых условий (см. ниже Предложение 1) существует единственная знакопеременная мера μ в пространстве $\mathcal{G}$ прямых в $\mathbb{R}^2$, для которой для любой иглы (отрезка) $\nu \subset \mathbb{R}^2$ имеет место

$$\mu([\nu]) = m_g(\nu),$$

где $\nu \subset g$ и $[\nu] = \{g \in \mathcal{G} : g \text{ пересекает } \nu\}$ (в этом случае m_g называется проекцией меры μ на прямую g).

При этом μ является неотрицательной мерой тогда и только тогда, когда функция F , определенная на иглах посредством $F(\nu) = m_g(\nu)$, является псевдометрикой в $\mathbb{R}^2$. Мотивом настоящего исследования был вопрос: справедливы ли подобные соотношения для семейств мер m_g , которые заданы на плоскостях $e \subset \mathbb{R}^3$? Пусть задано семейство мер m_e , мы ищем

меру μ в пространстве Γ прямых в $\mathbb{R}^3$, для которой m_ϵ являются проекциями т.е. $\mu([\pi]) = m_\epsilon(\pi)$, где $\pi \subset \epsilon$ и $[\pi] = \{g \in G : g \text{ пересекает } \pi\}$ для каждой пластины $\pi \subset \mathbb{R}^3$ (пластина – ограниченная выпуклая часть плоскости, лежащая в $\mathbb{R}^3$).

Для удобства читателей мы даем в §1 полную логическую структуру получения плоских результатов в [1] с помощью функционального подхода (и пользуясь случаем, переформулируем их для знакопеременных мер, так как в [1] и [2] рассмотрены только неотрицательные меры). В §2 показано, как аналогичный функциональный подход применить для порождения мер в пространстве Γ .

В §§4,5 изучены взаимосвязи между метриками в $\mathbb{R}^3$ и мерами в Γ . Здесь основным результатом является следующее достаточное условие существования и единственности (неотрицательной) меры μ в пространстве Γ : меры m_ϵ должны быть порождены гладкой линейно-аддитивной метрикой F в $\mathbb{R}^3$. А именно, каждая m_ϵ должна быть образом меры $\mu_{F,\epsilon} \times \mu_{F,\epsilon}$ при отображении

пара прямых в $\epsilon \longmapsto$ точка их пересечения,

где $\mu_{F,\epsilon}$ – мера, порожденная сужением F на ϵ , как это обычно делается в интегральной геометрии на плоскости. Мы покажем, что в трансляционно-инвариантном случае это условие является также и необходимым.

Большинство рассуждений не зависят от предположения о трансляционной инвариантности, за исключением §4, где мы пользуемся некоторыми фактами из теории выпуклых тел. Здесь основными источниками являются [2], [3], [6].

Результаты, публикуемые впервые, названы предложениями, в то время, как термин теорема сохранен за уже опубликованными результатами.

§1. ЭКСКУРС В КОМБИНАТОРНУЮ ИНТЕГРАЛЬНУЮ ГЕОМЕТРИЮ НА ПЛОСКОСТИ

Мы будем пользоваться следующими обозначениями :

G – пространство прямых в $\mathbb{R}^2$, $g \in G$,

μ_0 – единственная (с точностью до постоянного множителя) мера на G , инвариантная относительно группы евклидовых движений в $\mathbb{R}^2$,

dg – элемент меры μ_0 ,

ν – игла (отрезок прямой в $\mathbb{R}^2$),

$[\nu] = \{g \in G : g \text{ пересекает иглу } \nu\}$,

$r\{\nu_i\}$ – минимальное кольцо подмножеств G , которое содержит все множества $[\nu_i]$ для некоторой конечной совокупности игл $\{\nu_i\}$ в $\mathbb{R}^2$,

μ – общая знакопеременная мера на G .

В основе всех наших построений лежит следующее утверждение из интегральной геометрии на плоскости.

Теорема 1. Пусть μ – мера в G , равная нулю на каждой пучке прямых, проходящих через точку, и пусть $\{\nu_i\}$ – некоторая конечная совокупность игл в $\mathbb{R}^2$. Для каждого $B \in r\{\nu_i\}$ имеет место следующее представление

$$\mu(B) = \frac{1}{2} \sum_{i < j} c_{ij}(B) \mu([P_i, P_j]), \quad (1.1)$$

где суммирование ведется по парам точек из множества $\{P_i\}$ концов игл. Коэффициенты $c_{ij}(B)$ суть целые числа, алгоритм нахождения которых приведен ниже.

Достаточно рассмотреть случай, когда среди точек P_i есть хотя бы три, не лежащие на одной прямой. В дальнейшем мы всегда это предполагаем.

Алгоритм :

$$c_{ij}(B) = \begin{cases} 0 & \text{если точки } P_i, P_j \text{ разделены,} \\ n_\alpha(i, j; B) - n_\beta(i, j; B) & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Мы говорим, что P_i и P_j разделены, если на прямой g_{ij} , проходящей через точки P_i, P_j , существует точка P , такая, что на g_{ij} P лежит между P_i и P_j .

Для определения величин $n_o(i, j)$ заметим, что имеются два атома кольца $r\{u_i\}$ (обозначим их α_1 и α_2), которые удовлетворяют условиям

$$g_{i,j} \in \partial\alpha_1, \quad g_{i,j} \in \partial\alpha_2, \quad \alpha_1 \subset [P_i, P_j], \quad \alpha_2 \subset [P_i, P_j].$$

Тогда

$$n_o(i, j; B) = \text{число атомов } \alpha_k, \text{ принадлежащих } B.$$

Пусть P^* и P^{**} – две точки из $\{P_i\}$, занимающие на прямой $g_{i,j}$ крайние положения. Имеются два атома (обозначим их β_1 и β_2), которые удовлетворяют условиям

$$g_{i,j} \in \partial\beta_1, \quad g_{i,j} \in \partial\beta_2, \quad \beta_1 \subset [P^*, P^{**}]^c, \quad \beta_2 \subset [P^*, P^{**}]^c$$

(с означает дополнение). Тогда

$$n_\beta(i, j; B) = \text{число атомов } \beta_k, \text{ принадлежащих } B.$$

Доказательство теоремы вместе с алгоритмом можно легко вывести из аналогичного результата, содержащегося в [1] при предположении, что никакие три точки из $\{P_i\}$ не лежат на одной прямой. Переход к этому простому случаю можно осуществить аппроксимацией точек в коллинеарных группах (если таковые имеются) точками на выпуклых кривых, кривизна которых стремится к нулю. Полное доказательство, основанное на топологической интерпретации, можно найти в [4].

Пусть $F(P_1, P_2)$ – функция, определенная на $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, непрерывная в топологии $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ и линейно аддитивная, т.е. если P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой и P_2 лежит между P_1 и P_3 , то

$$F(P_1, P_2) + F(P_2, P_3) = F(P_1, P_3).$$

В частности, F может быть порождена семейством m_g , $g \in G$, где каждая m_g есть знакопеременная мера на соответствующей прямой g . Для любых двух точек P_1, P_2 положим

$$F(P_1, P_2) = m_g(\text{отрезок } (P_1, P_2)),$$

где g – прямая, проходящая через P_1, P_2 . Этим связывается функциональный подход с плоской задачей, упомянутой во введении.

1. Построение функционала Для заданной конечной совокупности игл $\{\nu_i\}$ построим функционал Φ , подставив в (1.2) вместо $\mu([P_1, P_2])$ значения $F(P_1, P_2)$, т.е.

$$\Phi = \Phi(B; \{\nu_i\}) = \frac{1}{2} \sum_{i < j} c_{ij}(B) F(P_i, P_j). \quad (1.3)$$

2. Свойство состоятельности Естественнo ввести для подмножеств G отношение эквивалентности: два множества в G эквивалентны, если они совпадают с точностью до конечного числа пучков $[P]$,

$$[P] = \{g \in G : P \in g\}, \quad P \in \mathbb{R}^2.$$

Мы можем утверждать, что

$$\text{если } \{\nu_i\} \subset \{\nu'_k\}, \quad \text{то необходимо } r\{\nu_i\} \subset r\{\nu'_k\} \quad (1.4)$$

в том смысле, что каждое $B \in r\{\nu_i\}$ эквивалентно некоторому $B' \in r\{\nu'_k\}$.

Для таких эквивалентных множеств B, B' имеем

$$\Phi(B; \{\nu_i\}) = \Phi(B'; \{\nu'_k\}).$$

Отсюда, в частности, следует, что функционал Φ единственным образом определен на классе $U_G = \bigcup r\{\nu_i\}$, где объединение берется по всем конечным совокупностям $\{\nu_i\}$, и мы вправе использовать обозначение $\Phi = \Phi(B)$.

3. Проекция Φ на прямые. Сужение Φ на подмножества некоторой фиксированной прямой g называем проекцией Φ на g . Непосредственным применением Алгоритма убеждаемся, что

$$\Phi([P_1, P_2]) = F(P_1, P_2). \quad (1.5)$$

В случае, когда функция F порождена семейством мер m_g , (1.5) означает, что проекции функционала Φ на прямые g суть меры m_g .

4. Конечная аддитивность Функционал Φ конечно аддитивен на U_G . Из (1.4) следует, что для всякой конечной совокупности множеств $B_i \in U$

мы можем найти конечное множество игл $\{\nu_j\}$ такое, что $B_i \in r\{\nu_j\}$ для всех i и наше утверждение следует из аддитивности коэффициентов $c_{ij}(B)$ по B .

5. Неотрицательность Φ влечет непрерывность Φ . Согласно теории продолжения мер, для того, чтобы конечно аддитивный неотрицательный функционал Φ можно было бы продолжить до меры, Φ должен быть в некотором смысле непрерывным. В нашем контексте достаточно выполнения следующего условия непрерывности :

$$\lim \Phi([\tau_n] \cap [\nu_n]) = 0, \quad (1.6)$$

где τ_n — последовательность коллинеарных игл, стягивающихся к точке, ν_n — произвольная последовательность игл, обе последовательности содержатся в некотором ограниченном многоугольнике $D \subset \mathbb{R}^2$. Предположим, что функционал Φ неотрицателен. Тогда из конечной аддитивности следует, что

$$\Phi([\tau_n] \cap [\nu_n]) \leq \Phi([\tau_n] \cap [\nu_n]) + \Phi([\tau_n] \cap [\nu_n]^c) = \Phi([\tau_n]). \quad (1.7)$$

Отсюда и из свойства 3 получаем (1.6).

6. Условие неотрицательности. Сейчас (и ниже в пунктах 7, 8) мы дополнительно предположим, что F является псевдометрикой (т.е. $F \geq 0$ и F удовлетворяет неравенству треугольника). Тогда функционал Φ будет неотрицательным. Естественное доказательство этого получается моделированием пространства G с помощью стереографической проекции

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \text{открытая полусфера}$$

(при которой каждая прямая g отображается в геодезическую линию) и последующим полярным отображением, при котором каждая геодезическая представляется своим полюсом.

Суперпозиция этих двух отображений переводит G в полусферу, у которой склеены диаметрально противоположные точки экватора и выброшен полюс Q (топологически это открытый лист Мёбиуса). На этой метрической модели пучкам прямых в G соответствуют большие полуокружности,

а каждому сферическому треугольнику, не содержащему полюс Q , соответствует множество прямых

$$\Delta = [P_1, P_2] \cap [P_1, P_3] \quad (1.8)$$

для некоторой тройки точек P_1, P_2, P_3 из $\mathbb{R}^2$. Прямым вычислением коэффициентов в (1.3) получаем, что

$$\Phi(\Delta) = F([P_1, P_2]) + F([P_1, P_3]) - F([P_2, P_3]) \geq 0$$

если F – псевдометрика. При этом отображении каждое $B \in U$ представимо как объединение геодезически выпуклых многоугольников на сфере, не содержащих полюс Q . Но всякое такое множество может быть представлено в виде конечного объединения треугольников

$$B = \cup \Delta_i, \quad \text{внутренность } \Delta_i \cap \text{внутренность } \Delta_j = \emptyset,$$

и из аддитивности F следует, что $\Phi(B) \geq 0$ для всякого $B \in U$.

7. Построение семейства мер. Зафиксируем пару прямых g_1, g_2 на $\mathbb{R}^2$ и рассмотрим Φ на множествах вида

$$[\nu_1] \cap [\nu_2], \quad \nu_1 \subset g_1, \quad \nu_2 \subset g_2.$$

Ясно, что эти множества образуют полукольцо в произведении пространств $g_1 \times g_2$. Свойства 5, 6 гарантируют применимость стандартной теоремы о продолжении меры с полукольца. Образ этой меры при отображении

$$(l_1, l_2) \longmapsto \text{прямая, проходящая через } l_1, l_2, \quad l_1 \in g_1, l_2 \in g_2,$$

есть мера μ_{g_1, g_2} в пространстве прямых, пересекающих обе прямые g_1 и g_2 (она априори зависит от выбора g_1 и g_2).

8. Состоятельность мер в семействе. Докажем, что все меры из семейства, определенного в 7., совпадают с некоторой мерой μ на $\mathcal{G}$. Выберем некоторое $A \in U_{\mathcal{G}}$ и пусть $\nu_1, \dots, \nu_n$ – набор игл, для которых

$A \in \tau\{v_i\}$. Далее выбираем многоугольник D , который покрывает иглы v_i . Пусть $a_1, \dots, a_m$ суть стороны многоугольника D и

$$[D] = \{g \in G : g \text{ пересекает } D\} \in U_G.$$

Через μ_{ij} обозначим меру из семейства, построенного в 7., которая соответствует прямому, содержащему отрезки a_i и a_j . На множестве $[D]$ мы рассмотрим меру μ_D , определяемую как сумма $\mu_D = \sum \mu_{ij}$. Имеем

$$\mu_D(A) = \sum \mu_{ij}(A \cap [a_i] \cap [a_j]) = \sum \Phi(A \cap [a_i] \cap [a_j]) = \Phi(A).$$

Когда D расширяется до всего $\mathbb{R}^2$, меры μ_D остаются состоятельными. Следовательно, $\mu(B) = \mu_D(B)$ для $B \subset [D]$ определяет меру μ на G , для которой $\mu(A) = \Phi(A)$ при $A \in U_G$. Таким образом доказана

Теорема 2. Пусть $F(P_1, P_2)$ — линейно-аддитивная, непрерывная псевдометрика в $\mathbb{R}^2$. Тогда существует единственная мера μ на G , обращающаяся в ноль на каждом пучке прямых, проходящих через точку, для которой

$$F(P_1, P_2) = \mu([P_1, P_2]).$$

На U_G имеем $\mu(A) = \Phi(A)$, где $\Phi(A)$ определена по (1.3).

В следующем утверждении условие, что F — псевдометрика опускается.

Предложение 1. Пусть τ_g — семейство знакопеременных мер на прямых $g \in G$. Предположим, что функция

$$F(P_1, P_2) = \tau_g(\text{отрезок}(P_1, P_2)), \quad P_1, P_2 \in g$$

непрерывна. Построим функционал Φ по (1.3). Если для каждого множества Δ вида (1.8) отношение $\Phi([\Delta])/\mu_0(\Delta)$ остается ограниченным снизу при P_1, P_2, P_3 , меняющихся в ограниченной части $\mathbb{R}^2$, то существует единственная знакопеременная мера μ на G , обращающаяся в ноль на каждом пучке прямых, проходящих через точку, для которой $F(P_1, P_2) = \mu([P_1, P_2])$.

Доказательство. Пусть D – ограниченный выпуклый многоугольник в $\mathbb{R}^2$.

Существует константа $C > 0$ такая, что

$$\Phi(\Delta)/\mu_0(\Delta) > -C$$

для всех возможных $P_1, P_2, P_3 \subset D$. Определим подкласс $U_D \subset U_G$:

$$A \in U_D \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad A \in r\{\nu_i\} \quad \text{и} \quad \nu_i \subset D.$$

Сужение на U_D функционала $\Phi_1 = \Phi + C\mu_0$ сохраняет все свойства 2 – 8 (или точнее, их версий, переписанных для D). Следовательно, Φ_1 можно продолжить до меры μ'_D на $[D]$; это значит, что Φ по существу есть знакопеременная мера на этом множестве. Доказательство завершается расширением D до всей плоскости, так как упомянутые знакопеременные меры остаются состоятельными (их значения для $B \in U_D$ даны посредством (1.3) и не зависят от D).

Пусть задана знакопеременная мера μ на G , имеющая плотность ρ , последняя может быть вычислена как предел

$$\rho(g_0) = \lim \Phi([\tau_1] \cap [\tau_2])(dg_0)^{-1}.$$

Здесь dg_0 – значение инвариантной меры множества $[\tau_1] \cap [\tau_2]$, τ_1, τ_2 – две бесконечно малые иглы, которые стягиваются к двум разным точкам $l_1, l_2 \in g_0$. Говоря о бесконечно малой игле τ , мы имеем в виду последовательность игл, лежащих на одной прямой и монотонно стягивающихся к точке l . Мы используем обозначение $\lim \tau = (l, \psi)$, чтобы выделить направление ψ иглы τ , которое остается неизменным, когда длина τ стремится к нулю. Напомним, что (см. [2])

$$dg_0 = \sin \psi_1 \sin \psi_2 r^{-1} dl_1 dl_2, \quad (1.9)$$

где ψ_i – угол между g_0 и прямой, содержащей τ_i , r – расстояние между бесконечно малыми иглами, dl_i – длина τ_i .

Следующее утверждение дает некоторые условия, при которых функционал Φ определяет знакопеременную меру на G , имеющую плотность.

Предложение 2. Пусть Φ – аддитивный функционал, определенный на классе U_G . Предположим, что предел

$$\lim \Phi([\tau_1] \cap [\tau_2])(dg_0)^{-1} = V(l_1, \psi_1; l_2, \psi_2) \quad (1.10)$$

существует для всякой пары бесконечно малых неколлинеарных углов τ_1, τ_2 и

$$\lim \tau_i = (l_i, \psi_i), \quad l_1 \neq l_2.$$

Если функция V непрерывна и равномерно ограничена в любой компактной области из $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, то V зависит только от прямой g_0 , соединяющей l_1 с l_2 , и Φ есть знакопеременная мера с плотностью V .

Доказательство. Выберем две иглы ν_1, ν_2 и разобьем их на бесконечно малые иглы $\tau_i^{(n)}$:

$$\nu_i = \bigcup_n \tau_i^{(n)}, \quad i = 1, 2.$$

Построим римановы суммы для интеграла (1.11). Ввиду (1.9), (1.10) и аддитивности Φ для этих римановых сумм имеем асимптотическое равенство

$$\sum_{k,l} \Phi([\tau_1^{(k)}] \cap [\tau_2^{(l)}]) = \Phi([\nu_1] \cap [\nu_2]).$$

Иначе говоря,

$$\Phi([\nu_1] \cap [\nu_2]) = \int_{\nu_1} \int_{\nu_2} V(l_1, \psi_1; l_2, \psi_2) r^{-1} \sin \psi_1 \sin \psi_2 dl_1 dl_2. \quad (1.11)$$

Вначале предположим, что $V \geq 0$. Отсюда следует непрерывность Φ и $\Phi([\nu_1] \cap [\nu_2]) \geq 0$. Повторяя вышеописанные шаги 7, 8, получаем, что Φ – мера на G . В случае знакопеременной функции V , наше допущение об ограниченности позволяет воспользоваться приемом, использованным нами при доказательстве Предложения 1, и этим завершить доказательство.

§2. СОСТОЯТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В Γ

Используем обозначения

Γ – пространство прямых в $\mathbb{R}^3$, $\gamma \in \Gamma$.

μ_0 – единственная (с точностью до постоянного множителя) мера на Γ ,

инвариантная относительно группы евклидовых движений $\mathbb{R}^3$,

$d\gamma$ – элемент меры μ_0 ,

π – пластина (ограниченная выпуклая часть плоскости, лежащая в $\mathbb{R}^3$),

$[\pi] = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \text{ пересекает пластину } \pi\}$,

$r\{\pi_i\}$ – минимальное кольцо подмножеств Γ , содержащее все множества $[\pi_i]$

для некоторого конечного набора $\{\pi_i\}$ пластин в $\mathbb{R}^3$,

μ – общая знакопеременная мера в Γ ,

$U_\Gamma = \cup\{A : A \in r\{\pi_i\}\}$, где объединение берется по всем конечным наборам пластин $\{\pi_i\}$,

$\mathbb{E}$ – пространство плоскостей в $\mathbb{R}^3$, $e \in \mathbb{E}$.

G_e – пространство прямых, лежащих на плоскости e , $g \in G_e$,

de – единственная (с точностью до постоянного множителя) мера на $\mathbb{E}$,

инвариантная относительно группы евклидовых движений $\mathbb{R}^3$,

ν – отрезок прямой в $\mathbb{R}^3$.

Пусть имеем семейство функций F_e , зависящих от параметра $e \in \mathbb{E}$.

Предположим, что на каждой плоскости e функция

$$F_e = F_e(P_1, P_2), \quad P_1, P_2 \in e$$

является непрерывной линейно-аддитивной псевдометрикой. Через Φ_e обоз-

начим функционал Φ , построенный на G_e с помощью F_e процедурой,

описанной в предыдущем параграфе. Для заданной системы пластин $\{\pi_i\}$

и всякой $A \in r\{\pi_i\}$ множество

$$A \cap e = \{g \in G_e : g \in A\}$$

принадлежит кольцу $r\{\nu_i\}$ подмножеств G_e , порожденному иглами $\nu_i = \pi_i \cap e$.

Пусть m – мера в $\mathbb{E}$. Выражение

$$\Psi(A) = \int \Phi_e(A \cap e) m(de) \quad (2.1)$$

является для каждого m примером функционала, состоятельного на классе

U_Γ и допускающего продолжение до меры μ на Γ .

Функционал Ψ *состоятелен* на U_Γ , если для каждой пары множеств $A, A' \in U_\Gamma$, совпадающих с точностью до конечного числа множеств типа

$$[\partial\pi] = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \text{ пересекает границу } \partial\pi \text{ пластины } \pi\},$$

имеем $\Psi(A) = \Psi(A')$.

Верхнее утверждение приводит к следующему замечанию. Пусть μ_e — мера в G_e , соответствующая F_e согласно Теореме 2. В расслоенном пространстве

$$\{(e, g) : e \in \mathbb{E}, \quad g \in G_e\},$$

рассмотрим меру $m(de)\mu_e(dg)$. Искомая мера μ есть образ $m(de)\mu_e(dg)$ при отображении

$$(e, g) \longmapsto \gamma,$$

где $\gamma \in \Gamma$ и $g \in G$ совпадают, как множества в $\mathbb{R}^3$. Доказательство следует прямым интегрированием $m(de)\mu_e(dg)$ и применением Теоремы 1.

Теперь перейдем к рассмотрению общих аддитивных функционалов *состоятельно* определенных на U_Γ . Для заданного на U_Γ функционала Ψ его сужение на класс $\{[\pi] : \pi \subset e\}$ назовем проекцией Ψ на плоскость e , а значения Ψ на классе

$$\{[\pi_1] \cap [\pi_2] : \pi_1 \in e_1, \pi_2 \in e_2\}$$

назовем проекцией Ψ на произведение $e_1 \times e_2$.

Автору не известны в классе U_Γ простые множества, роль которых сравнима с ролью множеств Δ в G (см §1, пункт 8). В частности, для множеств $[\pi_1] \cap [\pi_2]$ доказательство пункта 5 из §1 не проходит. Это может быть обойдено требованием, что проекция Ψ на каждое произведение $e_1 \times e_2$ должна определять знакопеременную меру на $e_1 \times e_2$. При этом условии мы получаем следующий неполный аналог Предложения 1 с $[\pi_1] \cap [\pi_2]$ вместо Δ .

Лемма. Пусть Ψ — конечно аддитивный функционал, определенный на U_Γ , чьи проекции на каждое произведение $e_1 \times e_2$ суть знакопеременные меры. Если

отношение

$$\Psi([\pi_1] \cap [\pi_2]) / \mu_0([\pi_1] \cap [\pi_2])$$

остается ограниченным снизу для каждой пары прямоугольных пластин в ограниченной части $\mathbb{R}^3$, то существует единственная знакопеременная мера μ в Γ , которая совпадает с Ψ на U_Γ .

Доказательство. Отображением

$$e_1 \times e_2 \longmapsto \Gamma,$$

которое каждой паре точек $P_1 \in e_1, P_2 \in e_2$ ставит в соответствие прямую, проходящую через P_1, P_2 , проекция Ψ на $e_1 \times e_2$ индуцирует знакопеременную меру на $[e_1] \cap [e_2]$. Остается показать, что все такие меры на самом деле являются соответствующими сужениями некоторой знакопеременной меры μ на Γ . Это следует из предположенной конечной аддитивности Ψ и применением приема, использованного в пункте 8 §1, с заменой многоугольников и их сторон на многогранники и их грани.

Говоря о бесконечно малых пластинах, мы имеем в виду последовательность пластин, которые лежат в одной плоскости e и монотонно стягиваются к точке P . Бесконечно малую пластину мы обозначаем через δ и пишем $\lim \delta = (\omega, P)$, где ω — пространственное направление нормали к e . Ниже в Предложении 3 δ_1, δ_2 — две произвольные выпуклые бесконечно малые пластины, для которых $\lim \delta_i = (\omega_i, P_i), i = 1, 2$, а $d\gamma_0$ обозначает инвариантную меру множества $[\delta_1] \cap [\delta_2]$. Через γ_0 обозначим прямую, соединяющую δ_1 с δ_2 . Напомним, что (см. [2])

$$d\gamma_0 = r^{-2} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 dP_1 dP_2,$$

где dP_i — плоская мера Лебега пластины δ_i , α_i — угол между ω_i и прямой γ_0 , которая соединяет dP_1 с dP_2 . r — расстояние между δ_1 и δ_2 .

Имеем следующий аналог Предложения 2.

Предложение 3. Пусть Ψ — конечно аддитивный функционал, определенный на U_Γ . Предположим, что существует предел

$$\lim \Psi([\delta_1] \cap [\delta_2]) (d\gamma_0)^{-1} = W(\omega_1, P_1; \omega_2, P_2) \quad (2.2)$$

для прямоугольных некопланарных бесконечно малых пластин δ_1, δ_2 с центрами в $P_1 \neq P_2$. Если функция W непрерывна и равномерно ограничена в любой компактной области из $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, то функция W зависит только от прямой γ_0 , проходящей через P_1, P_2 , и существует знакопеременная мера μ в Γ , для которой W служит плотностью, а Ψ совпадает с μ на U_Γ .

Доказательство. По существу тем же способом, что и при доказательстве Предложения 2, можно показать, что для любых двух пластин π_1, π_2 ,

$$\Psi([\pi_1] \cap [\pi_2]) = \int_{\pi_1} \int_{\pi_2} W(\omega_1, P_1; \omega_2, P_2) r^{-2} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 dP_1 dP_2 \quad (2.3)$$

т.е. Ψ – знакопеременная мера на $e_1 \times e_2$. Остается применить Лемму.

§3. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Настоящий параграф содержит некоторые замечания, касающиеся взаимосвязей между метриками в $\mathbb{R}^3$ и мерами в Γ . Каждая мера μ в Γ , имеющая плотность $\rho(\gamma)$ относительно $d\gamma$, может быть представлена в виде (2.1) с $m(de) = de$. Это можно показать с помощью известного соотношения (см. [2])

$$d\gamma d\phi = de dg, \quad (3.1)$$

где dg – инвариантная мера в G_e , $d\phi$ – равномерная угловая мера в пространстве поворотов ϕ вокруг оси γ ; или же с помощью его следующего варианта

$$\rho(\gamma) d\gamma d\phi = \rho(g) de dg.$$

Вычислить $\mu(A)$ при $A \in U_\Gamma$ можно следующим образом :

$$\mu(A) = \pi^{-1} \int de \int_{A \cap e} \rho(g) dg = \pi^{-1} \int \Phi_e(A \cap e, \{\pi_i \cap e\}) de,$$

здесь использована Теорема 1, Φ_e порождена посредством

$$F_e(\nu) = \int_{\nu \cap e} \rho(g) dg.$$

Однако выбор меры m не единственен. Более того, мы можем получить неотрицательную меру на Γ в виде (2.1) с помощью знакопеременной меры

m на $\mathbb{E}$. Класс примеров приведен в Теории Зонотдов, см. ниже §4. В рамках следующих двух параграфов мы рассмотрим порождение мер в Γ при помощи (2.1), причем F и m , удовлетворяют следующим условиям:

Предположение А.1. F не зависит от e , т.е.

$$F = F(P_1, P_2), \quad P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$$

и достаточно гладкая линейно аддитивная псевдометрика в $\mathbb{R}^3$.

Предположение А.2. m есть знакопеременная мера на $\mathbb{E}$, чей образ при отображении

$$e \longmapsto e \cap \Pi, \quad \Pi - \text{фиксированная плоскость}$$

есть неотрицательная мера m_Π в пространстве G_Π для любого $\Pi \in \mathbb{E}$.

Следовательно, функционал Ψ задаваемый посредством (2.1) определяет знакопеременную меру μ в Γ . Найдем проекции на плоскости функционала (2.1). Для отдельной пластины $\pi \subset \Pi$ имеем

$$\Psi([\pi]) = \int_{\mathbb{E}} F(\pi \cap e) m(de) = \int_{G_\Pi} F(X) m_\Pi(dg) = S_\Pi(\pi), \quad (3.2)$$

где $X = \pi \cap e$ — функция, зависящая лишь от прямой

$$g = \Pi \cap e \in G_\Pi$$

Ясно, что при А.1, А.2 S_Π есть мера на плоскости Π .

Попробуем применить Предложение 3 к нашему Ψ . Рассмотрим отношение

$$(d\gamma_0)^{-1} \Psi([\delta_1] \cap [\delta_2]) = (d\gamma_0)^{-1} \int_B \Phi_e([\tau_1] \cap [\tau_2]) m(de),$$

предел которого должен дать (если Ψ — знакопеременная мера) значение плотности $\rho(\gamma)$. Здесь $\tau_i = \delta_i \cap e$ — бесконечно малые иглы,

$$B = \{e \in \mathbb{E} : e \text{ пересекает } \delta_1 \text{ и } \delta_2\}.$$

Так как F_e — гладкая плоская псевдометрика, согласно Предложению 1 имеем

$$\Phi_e([\tau_1] \cap [\tau_2]) = V_e(g) dg.$$

где V_e — гладкая функция, зависящая от прямых в G_e (плотность) а dg равна инвариантной мере в G_e множества $[\tau_1] \cap [\tau_2]$. На множестве

$$C = \{(e, g) : g = \gamma \in [\delta_1] \cap [\delta_2]\}$$

каждая непрерывная функция $v(e, g)$ имеет асимптотическое представление $v(e, g) = v(\phi, \gamma_0)$, где ϕ обозначает угол поворота e вокруг γ_0 . Слегка изменив обозначение $V_e(g) = V_\phi(\gamma_0)$, мы приходим к соотношению

$$\rho(\gamma_0) = (d\gamma_0)^{-1} \int_C V_\phi(\gamma_0) dg m(de).$$

Далее мы предполагаем существование непрерывной плотности $u : m(de) = u(e) de$. На множестве B имеет место асимптотическое равенство $u(e) = u(\gamma_0, \phi)$. Следовательно,

$$\rho(\gamma_0) = (d\gamma_0)^{-1} \int_C V_\phi(\gamma_0) u(\gamma_0, \phi) de dg = (d\gamma_0)^{-1} \int_C V_\phi(\gamma_0) u(\gamma_0, \phi) d\gamma d\phi. \quad (3.3)$$

Здесь мы снова использовали равенство (3.1). В (3.3) можно выполнить интегрирование по $d\gamma$ и получить значение $d\gamma_0$. Следовательно,

$$\rho(\gamma_0) = \int V_\phi(\gamma_0) u(\gamma_0, \phi) d\phi. \quad (3.4)$$

Таким образом мы получили следующий

Критерий. Неравенство

$$\int V_\phi(\gamma_0) u(\gamma_0, \phi) d\phi \geq 0 \quad (3.5)$$

гарантирует, что Ψ порождает по (2.1) меру в Γ (для которой $\rho(\gamma)$ служит плотностью).

§4. ГЛАДКИЕ МЕТРИКИ МИНКОВСКОГО В $\mathbb{R}^3$ ПОРОЖДАЮТ МЕРЫ В Γ И НАОБОРОТ

Критерий (3.5) приводит к неожиданному результату в случае, когда F — гладкая метрика Минковского в $\mathbb{R}^3$, а знакопеременная мера m связана с F "уравнением зоноида". Метрику F мы называем метрикой Минковского, если она имеет вид (который влечет линейную аддитивность)

$$F(\nu) = |\nu| f(\Omega), \quad (4.1)$$

где $|\nu|$ – евклидова длина иглы ν , Ω – пространственное направление ν , f – функция, определенная в пространстве направлений в $\mathbb{R}^3$ и в случае гладкости удовлетворяющая “условию выпуклости”

$$f(\Omega) + \frac{d^2}{d\alpha^2} f(\Omega) \geq 0, \quad (4.2)$$

где $d^2/d\alpha^2$ – вторая производная по направлению α (на сфере пространственных направлений α определяется большой окружностью, проходящей через Ω , или же точкой на большой окружности, ортогональной к Ω). Функция f , удовлетворяющая (4.2), обязательно является опорной функцией некоторого гладкого центрально-симметричного выпуклого тела $B \subset \mathbb{R}^3$.

Напомним, (см. [2]) что функция

$$V_\alpha(\Omega) = f(\Omega) + \frac{d^2}{d\alpha^2} f(\Omega) \quad (4.3)$$

совпадает с плотностью меры μ_e в G_e , которая по Теореме 2 соответствует сужению F_e метрики F на e .

Здесь плоскость e предполагается параллельной большой окружности, проходящей через Ω и α . Слегка изменив обозначения, мы можем записать $V_\alpha(\Omega) = V_e(\beta)$, понимая, что направление β лежит в плоскости e и совпадает с Ω , а $\mu_e(dg) = V_e(\beta) dg$, где β – направление прямой $g \subset e$. Подчеркнем, что (4.3) может быть получено предельным переходом, описанным в Предложении 1, как показано в [2]. Величина V имеет и другое выражение (см. [7], стр. 40) :

$$V_\alpha(\Omega) = \int \sin^2 \psi Z d\psi. \quad (4.4)$$

Здесь интегрирование ведется по окружности направлений, ортогональных к Ω , причем за начало отсчета $\psi = 0$ берется точка α . Функцию

$$Z = Z(\xi), \quad \xi \text{ — направление в } \mathbb{R}^3,$$

определяем как решение уравнения Эйнштейна

$$f(\Omega) = \int |\cos(\Omega, \xi)| Z(\xi) d\xi, \quad (4.5)$$

где $d\xi$ – обычная инвариантная мера вращений в пространстве направлений в $\mathbb{R}^3$ (т.е. телесный угол), (Ω, ξ) – угол между двумя пространственными направлениями.

Доказательство равенства (4.4) может быть обосновано стандартной формулой из интегральной геометрии (см. [7], стр. 61)

$$de = \sin^2 \psi d\psi dg, \quad (4.6)$$

где g – образ e при отображении $e \mapsto e \cap \Pi = g$, ψ – двугранный угол между e и плоскостью Π .

Следующие утверждения I – III или хорошо известны, или могут быть проверены с помощью результатов из [7], стр. 41.

I. Для всякой достаточно гладкой опорной функции f уравнение (4.5) имеет единственное решение Z , которое не обязательно неотрицательно. Функция Z обеспечивает полное описание центрально-симметричного тела B . Требование неотрицательности Z существенно сужает B до подкласса выпуклых тел, называемых *зоноидами*, см. [3].

II. Функция $Z(\xi)$ определяет посредством (4.5), (4.1) метрику Минковского F в $\mathbb{R}^3$ (т.е. выпуклое тело B) тогда и только тогда, когда интегралы (4.4) остаются неотрицательными для любых Ω и любом выборе α на окружности, ортогональной к Ω .

III (следует из II). Если $Z(\xi)$ определяет метрику F посредством (4.5), (4.1), то знакопеременная мера $Z(\xi)de$ (ξ – направление нормали к e) удовлетворяет условию A.2.

Мы теперь в состоянии сформулировать и доказать наш результат относительно метрик Минковского. Пусть задана метрика Минковского F в $\mathbb{R}^3$, на каждой плоскости e определим меру

$$\sigma_e^{(F)}(\pi) = \int_{\mathbb{G}_e} F(\pi \cap g) \mu_e(dg), \quad \pi \subset e, \quad (4.7)$$

которая (при трансляционной инвариантности) пропорциональна плоской мере Лебега L_2 : $\sigma_e^{(F)} = \lambda_\omega L_2$, где коэффициент пропорциональности λ_ω зависит от направления ω нормали к e .

Согласно II, III плоские меры (4.7) совпадают с проекциями функционала

$$\Psi = \int \Phi_{\omega} Z(\omega) d\omega \quad (4.8)$$

на плоскости e . В (4.8) Φ_{ω} – функционал в G_e , построенный как в §1 с использованием F_e (этот функционал зависит только от ориентации e т.е. от направления ω нормали к e); $Z(\omega)$ – решение уравнения (4.5), где f связана с нашей метрикой F посредством (4.1).

Предложение 4. Для каждой гладкой метрики Минковского F в $\mathbb{R}^3$ существует единственная трансляционно-инвариантная мера μ в Γ , чей образ на каждой плоскости e при отображении

$$\Gamma \longrightarrow e: \gamma \longmapsto \gamma \cap e \quad (4.9)$$

совпадает с мерой $\sigma_e^{(F)}$. Значения меры μ на U_{Γ} даются функционалом (4.8).

Доказательство. Покажем, что (4.8) имеет продолжение до неотрицательной меры μ . Для этого мы покажем, что неравенство (3.4) выполнено, когда V задано по (4.4) и u совпадает с Z . Другими словами мы должны доказать, что

$$I = \iint \sin^2(\alpha - \psi) Z(\alpha) Z(\psi) d\alpha d\psi \geq 0, \quad (4.10)$$

если Z такова, что

$$V_{\alpha}(\Omega) = \int \sin^2(\alpha - \psi) Z(\psi) d\psi \geq 0$$

для всех значений α из окружности направлений, ортогональных некоторому фиксированному направлению Ω . Эта окружность является областью интегрирования для последнего интеграла, а её квадрат – областью интегрирования для предшествующего двойного интеграла.

Очевидно, имеем $I = a^2 - (b^2 + c^2)$, где

$$a = \int Z(\alpha) d\alpha, \quad b = \int Z(\alpha) \sin 2\alpha d\alpha, \quad c = \int Z(\alpha) \cos 2\alpha d\alpha$$

и

$$V(\alpha) = a - [b \sin 2\alpha + c \cos 2\alpha] = a - (b^2 + c^2)^{1/2} \sin(\theta + 2\alpha),$$

где

$$\cos \theta = b (b^2 + c^2)^{-1/2}, \quad \sin \theta = c (b^2 + c^2)^{-1/2}.$$

Из последнего выражения для $V(\alpha)$ заключаем, что требование

$$V(\alpha) \geq 0 \text{ для всех значений } \alpha \in (0, \pi)$$

влечет

$$a \geq (b^2 + c^2)^{1/2} \geq 0$$

($V(\alpha)$ достигает своего минимума, когда $\sin(\theta + 2\alpha) = 1$). Последнее неравенство эквивалентно $I \geq 0$. Так как это верно для любого направления Ω , то наше требование $\Psi = \mu$ выполнено. Выше уже объяснено, что проекции Ψ на плоскости e совпадают с $\sigma_e^{(F)}$. Единственность следует из того, что для любой трансляционно-инвариантной меры μ в Γ , которая порождает меру $\sigma_e^{(F)}$ на плоскостях, имеем

$$\lambda_\omega = \int |\cos(\omega\xi)| m(d\xi), \quad (4.11)$$

где m есть "роза направлений" меры μ (см. [2]). Мера m определяется этим уравнением единственным образом (см. [3]). Но совпадение роз направлений влечет совпадение трансляционно-инвариантных мер в Γ . Предложение 4 полностью доказано.

Замечательно, что утверждение, обратное Предложению 4, также верно.

Предложение 5. Каждой трансляционно-инвариантной мере μ на Γ , имеющей достаточно гладкую плотность соответствует единственная метрика Минковского F в $\mathbb{R}^3$ такая, что на каждой плоскости e образ μ при отображении (4.9) совпадает с мерой $\sigma_e^{(F)}$.

Доказательство. Образ μ при отображении (4.9) пропорционален плоской мере Лебега с коэффициентом $\tau_e = \tau_\omega$, зависящим лишь от направления ω нормали к e . Очевидно,

$$\tau_\omega = \int |\cos(\omega\xi)| m(d\xi),$$

где m – роза направлений меры μ , т.е. τ_ω есть опорная функция зоноидального тела. В силу предположения о существовании плотности, это тело не является плоским. Согласно известной теореме (см. [3]) этот зоноид является проекционным телом. Другими словами, существует единственное центрально-симметричное выпуклое тело K такое, что

$$\tau_\omega = \text{площади проекции } K \text{ на плоскость } e \text{ с нормалью } \omega.$$

Искомую метрику F мы определяем, как метрику порождаемую телом K обычным (Минковского) способом. Остается показать, что

$$\tau_\omega = \lambda_\omega. \quad (4.12)$$

Это следует из формул (которые можно найти в [6]), выражающих площадь τ_ω плоской выпуклой области D в терминах опорной функции f

$$\tau_\omega = \frac{1}{2} \int (f^2 - f'^2) d\beta$$

и варианта формулы (4.7) (см. [2], стр. 142),

$$\lambda_\omega = \int f(\beta) V_e(\beta) d\beta,$$

где $V_e(\beta)$ задано по (4.3). Интегрирование по частям и приводит к (4.11).

Предложение 5 доказано.

Следствие. На самом деле мы установили два способа вычисления λ_ω : первый, с помощью (4.11), причем мера m имеет плотность, задаваемую по (4.10); и второй, как площадь проекции выпуклого тела B , чья функция $Z(\omega)$ участвует в (4.10). Вторым путем приводит к тому, что

$$\lambda_\omega = \int |\cos(\omega\xi)| (R_1 R_2)_\xi d\xi,$$

где $(R_1 R_2)_\xi$ означает произведение двух главных радиусов кривизны в точке ∂B , где внешняя нормаль имеет направление ξ . Сравнивая это равенство с (4.11), из уже упомянутого результата о единственности для уравнения зоноида заключаем, что

$$(R_1 R_2)_\xi = \frac{1}{2\pi^2} \iint \sin^2(\alpha - \psi) Z(\alpha) Z(\psi) d\alpha d\psi,$$

где интегрирование ведется по квадрату большой окружности, ортогональной к ξ . Эта формула имеется в [6] в ином контексте.

§5. ОТКАЗ ОТ ТРЕБОВАНИЯ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ В ОДНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Мы в этом параграфе покажем, что утверждения Предложения 4 могут быть распространены на случаи, не требующие трансляционной инвариантности.

Начнем с важного замечания :

Всякая гладкая метрика F в $\mathbb{R}^3$ – асимптотически Минковская, если её рассматривать в бесконечно малом объеме.

Точнее говоря, это означает следующее. Рассмотрим шар с центром в фиксированной точке Q пространства $\mathbb{R}^3$ и бесконечно малым радиусом ϵ . Перенесем Q в O и изменим масштаб так, чтобы наш бесконечно малый шар преобразовался в шар единичного радиуса с центром в O . На последнем шаре рассмотрим новую метрику F_ϵ :

$$F_\epsilon(x_1, x_2) = \epsilon^{-1} F(P_1, P_2),$$

где x_1, x_2 суть образы точек P_1, P_2 . В пределе F_ϵ (когда ϵ стремится к нулю) будет сужением на единичный шар некоторой метрики Минковского F_1 . Мы докажем это, явно найдя f_1 , связанную с F_1 посредством (4.1). Возьмем точки P_1, P_2 внутри бесконечно малого шара. Используя векторные обозначения, имеем

$$P_1 - P_2 = \epsilon(x_1 - x_2)$$

где x_1, x_2 уже из единичного шара. Так как F предполагается гладкой, то

$$F(P_1, P_2) = f(Q, \Omega) |x_1, x_2| \epsilon + o(\epsilon),$$

где Ω – направление, а $|x_1, x_2|$ – евклидова длина отрезка x_1, x_2 и

$$f(Q, \Omega) = \left| \frac{\partial F(Q, P)}{\partial_\Omega P} \right|, \quad (5.1)$$

есть модуль производной по направлению Ω . Следовательно,

$$F_\epsilon(x_1, x_2) = f(Q, \Omega) |x_1, x_2| + o(1),$$

т.е. $f_1(\Omega) = f(Q, \Omega)$.

Следствие. Если F – гладкая метрика в $\mathbb{R}^3$, то в каждой точке Q функция (5.1) удовлетворяет условию выпуклости (4.2). Таким образом F определяет семейство центрально-симметричных выпуклых тел $B(Q)$ (а значит и семейство метрик Минковского), зависящее от $Q \in \mathbb{R}^3$.

Мы основываем наше обобщение Предложения 5 на результате Погорелова [5], утверждающего, что всякая достаточно гладкая линейно аддитивная метрика F в $\mathbb{R}^3$ допускает представление посредством знакопеременных мер $z(e) de$ в пространстве $\mathbb{E}$:

$$F(P_1, P_2) = \int_{[P_1, P_2]} z(e) de, \quad (5.2)$$

где $[P_1, P_2]$ обозначает множество плоскостей, разделяющих точки $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$.

Предложение 6. Пусть F – достаточно гладкая линейно аддитивная метрика в $\mathbb{R}^3$. В пространстве Γ существует единственная мера μ , у которой для каждой плоскости e мера $\sigma_e^{(F)}$ есть образ μ при отображении

$$\Gamma \longrightarrow \mathbb{E}: \quad \gamma \longmapsto \gamma \cap e. \quad (5.3)$$

Доказательство. Заметим, что из (5.2) следует, что $z(e) de$ удовлетворяет условию A.2 из §3, так как искомая мера m_Π совпадает с мерой в G_Π , порожденной (согласно Теореме 2) сужением F_Π нашей метрики F на плоскость Π . Чтобы показать это, рассмотрим плоскость Π , проходящую через P_1, P_2 и, используя (4.6), преобразуем (5.2) (причем ψ – плоский угол между Π и e) к виду

$$F(P_1, P_2) = \int_{[P_1, P_2]} dg \int z(e) \sin^2 \psi d\psi,$$

где $[P_1, P_2] \subset G_\Pi$ – множество прямых, отделяющих P_1 от P_2 . В силу Теоремы 2 и Предложения 1, F_Π имеет подобное представление

$$F(P_1, P_2) = F_\Pi(P_1, P_2) = \int_{[P_1, P_2]} x(g) dg$$

с некоторой плотностью $x(g) \geq 0$, единственной в классе знакопеременных плотностей. Из этого следует, что

$$\int z(e) \sin^2 \psi d\psi = x(g) \geq 0.$$

Рассмотрим функционал

$$\Psi = \int \Phi_\epsilon z(e) de,$$

где Φ_ϵ построен с помощью F_ϵ , $\epsilon \in \mathbb{E}$. Функционал Ψ удовлетворяет условиям А.1, А.2, следовательно, проекции Ψ на плоскости образуют меры $\sigma_\epsilon^{(F)}$. Остается доказать, что Ψ — мера в Γ . Поскольку $z(e) = z_1(e) - z_2(e)$, где $z_1, z_2 \geq 0$ и имеют непересекающиеся носители, то из результатов §3 заключаем, что функционал Ψ порождает знакопеременную меру в Γ с знакопеременной плотностью $\rho(\gamma)$. Теперь достаточно показать, что ρ неотрицательна.

Для всякой прямой γ_0 значение $\rho(\gamma_0)$ может быть вычислено предельным переходом (2.2) с использованием только пластин из шара радиуса ϵ с центром Q , лежащим на γ_0 . Следовательно, то же можно сделать, используя пластины из единичного шара и функционал Ψ_ϵ , основанный на F_ϵ (см. замечание в начале настоящего параграфа). Хотя результат не зависит от ϵ , удобнее думать, что мы сперва вычисляем предел (2.2), а затем устремляем ϵ к нулю.

Если F достаточно гладка, то можно поменять порядок двух предельных переходов. Это означает, что $\rho(\gamma_0)$ может быть вычислена процедурой (2.2) с использованием значений F_1 . Однако мы знаем из Предложения 4, что для метрик Минковского результат может быть только неотрицательным. Этим завершается доказательство.

ABSTRACT. The paper considers two different approaches to measure generation in the space of lines in $\mathbb{R}^3$: by means of functionals defined in terms of system of plates in $\mathbb{R}^3$ and by means of metrics in $\mathbb{R}^3$. Under the first approach, complete analogy with previously studied planar case could be reached only under additional assumption of existence of density. Under the second approach, it is shown that the planar theorem about generation of measures by linearly additive continuous pseudometrics generalizes to $\mathbb{R}^3$ at least in one direction in general case, and in both directions in translation invariant case.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry, Wiley & Sons, 1982.
2. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, 1990.
3. R. Schneider, W. Weil, "Zonoids and related topics", In : Convexity and its Applications, P. Gruber and J. M. Wills ed., Birkhauser, Basel, pp. 296-317; 1983.
4. R. V. Ambartzumian, Buffon Needle : a Plaything or More ?, Preprint.
5. А. В. Погорелов, Четвертая Проблема Гильберта, М., Наука, 1974.
6. В. Бляшке, Круг и Шар, М., Наука, 1967.
7. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штойян, Введение в Стохастическую Геометрию, М., Наука, 1989.

26 Августа 1992

Институт Математики
Национальной Академии Наук Армении