ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
XXVI, № 6, 1991

УДК 517.53

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Р. А. АВЕТИСЯН

О МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЯХ, ПРЕДСТАВИМЫХ РЯДАМИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

1. В настоящей заметки изучаются мероморфные функции вида

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A}{(z_k-z)^n},\quad z_k\to\infty,\ n\geq 1, \tag{1}$$

где ряд (1) предполагается абсолютно сходящимся, что как легко видеть эквивалентно условию

$$\sum_{|z_k|<1}\frac{|A_k|}{|z_k|^n}<+\infty. \tag{2}$$

Впервые ряды вида (1) при $n=1$ изучались в работе М. В. Келдыша [1], который, исходя из свойств рациональных функций вида

$$R_n(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{z_k-z},$$

получил их аналоги для для мероморфных функций вида (1). Приведем точные формулировки этих результатов, используя известные определения неванлинновской теории распределения значений мероморфных функций.

Теорема А [1]. *Пусть f — мероморфная функция вида* (1)) $n=1$. *Тогда*

$$m(r,f)=O(1),\ \text{при } r\to\infty. \tag{3}$$

Теорема B [1]. *Пусть f — мероморфная функция вида* (1), *$n=1$ конечного нижнего порядка. Тогда при всех $a\neq 0$ справедливо $\delta(a,f)=0$ и порядок $N(r,a)$ равен порядку $T(r,a)$. Если дополнительно*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|A_k|<+\infty,\quad \sum_{k=1}^{\infty}A_k\neq 0, \tag{4}$$

то эти утверждения верны и при $a=0$.

И. В. Островский уточнил оценку (3) (см. монографию [2], стр. 326), показав, что для мероморфных функций вида (1) при $n=1$ и $0<p<1$ имеют место оценки

$$\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta<\frac{8\pi}{\cos\frac{p\pi}{2}}\left[\left(\frac{1}{r}\sum_{|z_k|<r}|A_k|\right)^p+\left(\sum_{|z_k|>r}\frac{A_k}{|z_k|}\right)^p\right],\ \text{при } r\to\infty, \tag{5}$$

$$m(r, f) = o(1), \text{ при } r \to \infty. \tag{6}$$

Отметим, что эти оценки позволили упростить доказательство теоремы Б.

Основной целью настоящей заметки также является изучение величины $m(r, f)$ для мероморфных функций вида (1). Рассмотрим сначала случай, когда $n = 1$. Очевидно, что неравенство (6) является следствием неравенства (5). Ясно также, что (5) при $p = 1$ не имеет места. Однако, с помощью метода М. В. Келдыша [1] можно показать, что для функций f вида (1), $n = 1$ имеет место

Теорема 1. *Пусть f — мероморфная функция вида* (1), $n = 1$. *Тогда*

$$m(r, f) < c\left(\frac{1}{r}\sum_{|z_k|<r}|A_k| + \sum_{|z_k|>r}\frac{|A_k|}{|z_k|}\right), \text{ при } r \to \infty, \tag{7}$$

где c — абсолютная постоянная.

Переходя к случаю $n \geqslant 2$ отметим, что для выполнения условия (6) минимального условия (2) абсолютной сходимости ряда (1) оказывается недостаточно. Точнее имеет место

Теорема 2. *Для любого $n \geqslant 2$ существует мероморфная функция f вида* (1) *такая, что при всех $p > \frac{1}{n}$ выполнены условия*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|A_k|^p}{|z_k|^{pn}} < +\infty, \tag{8}$$

но

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, m(r, f) > 0. \tag{9}$$

С другой стороны, нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Если f — мероморфная функция вида* (1), $n \geqslant 2$ *такая, что для некоторого $p < \frac{1}{n}$ сходится* (8), *то для f выполнено условие* (6).

Теоремы 2 и 3 приводят к вопросу о выполнении оценки (6) при условии сходимости ряда (8) при $p = \frac{1}{n}\cdot$ В общем случае ответ на этот вопрос не ясен. Однако при некоторых ограничениях на аргументы коэффициентов A_k и полюсов z_k можно получить оценку (6) и в этом случае. Чтобы сформулировать наше утверждение введем некоторые обозначения, рассматривая для простоты случай $n = 2$.

а). Для монотонно возрастающей последовательности целых чисел n_k положим $\sigma = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$.

б). Для мероморфной функции f вида (1), $n = 2$ при некотором выборе чисел $A_k^{\frac{1}{2}}$ положим

$$b_m(\sigma) = \sup_k\left\{\left|\sum_{\substack{l < n_k\\ l \neq m}}\frac{A_l^{\frac{1}{2}}}{z_l - z_m}\right|, \text{ при } n_k \geqslant m\right\}.$$

Теорема 4. *Пусть f — мероморфная функция вида* (1), $n=2$ *Если для некоторых* $\sigma=\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и чисел* $A_k^{\frac{1}{2}}$ *сходится ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left|A_m^{\frac{1}{2}}\right|}{|z_m|}(1+b_m(\sigma))<+\infty, \tag{10}$$

то для f выполнено условие (6.)

2. В этом пунктке мы докажем теоремы 1—4.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\theta_k=\arg z_k$, $A_k=\alpha_k+$ $+i\beta_k$. Следуя М. В. Келдышу представим функцию f в виде

$$f(z)=\sum_{|z_k|>r}{}'\frac{e^{i\theta_k}\operatorname{Re}(A_ke^{-i\theta_k})}{z_k-z}+\sum_{|z_k|>r}{}''+i\sum_{|z_k|>r}{}'\frac{e^{i\theta_k}\operatorname{Im}(Ae^{-i\theta_k})}{z_k-z}+$$

$$+\sum_{|z_k|>r}{}''+\sum_{|z_k|<r}{}'\frac{\alpha_k}{z_k-z}+\sum_{|z_k|<r}{}''+i\sum_{|z_k|<r}{}'\frac{\beta_k}{z_k-z}+\sum_{|z_k|<r}{}''=$$

$$=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_8(z), \tag{11}$$

где $r=|z|$, а суммы Σ' распространяются на слагаемые с положительными значениями соответственно $\operatorname{Re}(A_ke^{-i\theta_k})$, $\operatorname{Im}(A_ke^{-i\theta_k})$, α_k, β_k, а суммы Σ'' — на остальные. Далее для измеримой на окружности $|z|=r$ функции $g(z)$ при $\lambda>0$ положим

$$E_\lambda=\{\theta\in[0,\ 2\pi]:|g(re^{i\theta})|>\lambda\},$$

$$\mu(\lambda,\ g)=mE_\lambda.$$

Учитывая представление (11) получаем

$$\mu(\lambda,\ f)\leqslant\sum_{k=1}^{8}\mu(\lambda/8,\ f_k).$$

Так как при $|z_k|>r$, $|\zeta|\leqslant r$ функция $\operatorname{Re}f_k(\zeta)$, $k=1,2,3,4$ непрерывны и выполняются условия

$$\operatorname{Re}f_k(\zeta)\geqslant0,\ \operatorname{Im}f_k(0)=0,$$

то по известному неравенству для сопряженных функций получаем

$$\mu(\lambda,\ f_k)\leqslant\frac{C_1}{\lambda}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}f_k(re^{i\theta})\,d\theta\leqslant\frac{C_1}{\lambda}\sum_{|z_j|>r}\frac{|A_j|}{|z_j|},\ k=1,2,3,4.$$

Далее так как при $|\zeta|=r$

$$\left|\sum_{|z_k|<r}\frac{\alpha_k}{z_k-\zeta}\right|=\left|\sum_{|z_k|<r}\frac{r\alpha_k}{r^2-\bar z_k\zeta}\right|,$$

а при $|\zeta|\leqslant r$

$$\operatorname{Re}\frac{r\alpha_k}{r^2-\bar z_k\zeta}\geqslant0,\ |z_k|\leqslant r,$$

то рассматривая функцию

$$f_5^1(z)=\sum_{|z_k|<r}\frac{r\alpha_k}{r^2-\bar z_kz},\ |z|\leqslant r,$$

вновь получаем

$$\mu(\lambda, f_5) = \mu(\lambda, f_5^1) \leqslant \frac{c_1}{\lambda} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f_5^1 (re^{i\theta})\, d\theta \leqslant \frac{c_1}{r\lambda} \sum_{|z_k| < r} |A_k|.$$

Учитывая, что те же неравенства имеют место и при f_6, f_7, f_8, получаем

$$\mu(\lambda, f) \leqslant \frac{32 c_1}{\lambda} \left(\frac{1}{r} \sum_{|z_k| < r} |A_k| + \sum_{|z_k| > r} \frac{|A_k|}{|z_k|} \right).$$

Из последнего неравенства следует оценка

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_1^{\infty} \ln \lambda \, d\mu(\lambda, f) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_1^{\infty} \frac{\mu(\lambda, f)}{\lambda}\, d\lambda \leqslant \frac{16 c_1}{\pi} \left(\frac{1}{r} \sum_{|z_k| < r} |A_k| + \sum_{|z_k| > r} \frac{|A_k|}{|z_k|} \right).$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Для простоты рассмотрим случай $n = 2$. Будем исходить из формулы

$$\frac{z^{n-1}}{z^n - R^n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1} \frac{1}{z - z_k}, \quad z_k = Re^{\frac{2\pi ik}{n}}, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

Дифференцируя эту формулу получаем

$$\frac{nz^{2(n-1)} - (n-1) z^{n-2} (z^n - R^n)}{(z^n - R^n)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z - z_k)^2}.$$

Следовательно на окружности $|z| = R$ будем иметь

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z - z_k)^2} \right| \geqslant \frac{(n-1) |z|^{n-2} R^n - |z|^{2(n-1)}}{|z^n - R^n|^2} \geqslant \frac{n-2}{4R^2}. \tag{12}$$

С другой стороны, при $|z| \neq R$ имеем

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z - z_k)^2} \right| \leqslant \frac{(n-1) |z|^{n-2} R^n + |z|^{2(n-1)}}{||z|^n - R^n|^2}. \tag{13}$$

Возьмем последовательности $R_n = 2^n$ и $m_n = 8 \cdot 2^{2n}$, $n = 0, 1, 2$. Положим

$$\varphi_j(z) = \frac{1}{m_j} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{1}{(z - z_k^j)^2}, \quad z_k^j = R_j e^{\frac{2\pi ik}{m_j}}, \quad k = 1, 2, \cdots, m_j.$$

Учитывая (12), имеем при $|z| = R_m$

$$|\varphi_n(z)| \geqslant (m_n - 2) 14 R^2 > 1, 5. \tag{14}$$

А при $|z|=R_n$, $j<n$ из (13) следует оценка

$$|\varphi_j(z)| \leqslant 4[(m_j-1)2^{n(m_j-2)}\cdot 2^{jm_j}+2^{2n(m_n-1)}]2^{-2n\cdot m_n} \leqslant 8\cdot 2^{-2n}. \quad (15)$$

Также при $|z|=R_n$, $j>n$ получаем из (13)

$$|\varphi_j(z)| \leqslant 4[(m_j-1)2^{n(m_j-\ )}\cdot 2^{jm_j}+2^{2n(m_j-1)}]\cdot 2^{-2jm_j} \leqslant 8\cdot(m_j-1)\cdot$$
$$\cdot 2^{-2n}\cdot 2^{-m_j}. \quad (16)$$

Искомую функцию f определим по формуле

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(z).$$

Покажем, что определенная таким образом функция f будет удовлетворять условиям (8), (9) теоремы 2. Определим коэффициенты A_n и полюсы z_n функции f следующим образом: при $8(4^j-1)<n\leqslant 8(4^{j+1}-$ $-1)13$, $j=0, 1, 2, \cdots$, положим

$$A_n=m_j^{-1},\ z_n=z^j_{n-8(4^j-1)13}.$$

Проверим условие (8). Пусть $p>1/2$, тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|A_n|^p}{|z_n|^{2p}}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_k}(m_kR_k^2)^{-p}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m_k^{1-p}}{R_k^{2p}}\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{8^{1-p}}{2^{k(4p-2)}}<+\infty.$$

Проверим, что выполняется (9). Пусть $|z|=R_n$, учитывая (14) — (16), имеем

$$|f(z)|>|\varphi_n(z)|-\sum_{j=0}^{n-1}|\varphi_j(z)|-\sum_{j=n+1}^{\infty}|\varphi_j(z)|\geqslant$$
$$\geqslant 1.5-\sum_{j=1}^{n-1}8\cdot 2^{-2n}\sum_{j=n+1}^{\infty}8m_j2^{-(2n+m_j)}=1.5+o(1),\ \text{при}\ n\to\infty.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 2 видно, что если зафиксировать число $p>1/2$ и взять в теореме 2 последовательность $m_n=[2^{2an}]$, где $a>1$, $a(1-p)-p<0$, то может быть построена функция $f=f_p$ вида (1), такая, что сходится ряд (8), но

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, m(r, f_p)=+\infty.$$

Доказательство теоремы 3. Для доказательства теоремы 3 достаточно заметить, что при выполнении условия $pn<1$ теоремы 3 имеем

$$m(r, f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant\frac{1}{2\pi p}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2\pi p}\left(\sum_{|z_k|<r}|A_k|^p\int_p^{2\pi}\frac{d\theta}{|z_k-re^{i\theta}|^{pn}}+\sum_{|z_k|>r}|A_k|^p\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|z_k-re^{i\theta}|^{pn}}\leqslant\right.$$
$$\left.\leqslant\frac{c_2}{2\pi p}\left(\frac{1}{r^{np}}\sum_{|z_k|<r}|A_k|^p+\sum_{|z_k|>r}\frac{|A_k|^p}{|z_k|^{pn}}\right)=o(1),\ \text{при}\ r\to\infty.\right.$$

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Положим

$$R_k(z) = \sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_j}{(z_j - z)^2}.$$

Очевидно, что имеет место равенство

$$R_k(z) = \left(\sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_j^{\frac{1}{2}}}{(z_j - z)}\right)^2 - \sum_{\substack{l \neq j \\ l,\, j < n_k}} \frac{A_l^{\frac{1}{2}} A_j^{\frac{1}{2}}}{(z_l - z)(z_j - z)} = R_k^1(z) + R_k^2(z).$$

Возьмем число $p < 1/2$. Из равенства (5) имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |R_k^1(re^{i\theta})|^{2p}\, d\theta \leqslant \frac{4}{\cos p\pi} \left[\left(\frac{1}{r} \sum_{\substack{|z_j| \leqslant r \\ j < n_k}} \left|A_j^{\frac{1}{2}}\right|\right)^{2p} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{\substack{|z_j| > r \\ j < n_k}} \frac{\left|A_j^{\frac{1}{2}}\right|}{|z_j|}\right)^{2p}\right]. \tag{17}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{(z_l - z)(z_j - z)} = \frac{1}{(z_l - z_j)} \left(\frac{1}{z_l - z} - \frac{1}{z_j - z}\right),$$

получаем

$$R_k^2(z) = -2 \sum_{j=1}^{n_j} \frac{A_j^{\frac{1}{2}}}{z_j - z} \sum_{l \neq j} \frac{A_l^{\frac{1}{2}}}{z_l - z_j}.$$

Вновь из неравенства (5) получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |R_k^2(re^{i\theta})|^p\, d\theta \leqslant \frac{4}{\cos \frac{p\pi}{2}} \left[\left(\frac{1}{r} \sum_{\substack{|z_j| < r \\ j < n_k}} \left|A_j^{\frac{1}{2}}\right| b_j(\sigma)\right)^p + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{\substack{|z_j| > r \\ j < n_k}} \frac{\left|A_j^{\frac{1}{2}}\right| b_j(\sigma)}{|z_j|}\right)^p\right]. \tag{18}$$

Устремляя в (17) и (18) $k \to +\infty$ получаем

$$m(r, f) \leqslant \frac{1}{2\pi p} \lim_{k \to \infty} \int_0^{2\pi} |R_k(re^{i\theta})|^p d\theta \leqslant c_2 \left[\left(\frac{1}{r} \sum_{|z_j| < r} \left|A_j^{\frac{1}{2}}\right|\right)^{2p} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{|z_j| > r} \frac{\left|A_j^{\frac{1}{2}}\right|}{|z_j|}\right)^{2p} + \left(\frac{1}{r} \sum_{|z_j| < r} \left|A_j^{\frac{1}{2}}\right| b_j(\sigma)\right)^p + \left(\sum_{|z_j| > r} \frac{\left|A_j^{\frac{1}{2}}\right| b_j(\sigma)}{|z_j|}\right)^p\right] =$$

$$= o(1), \text{ при } r \to \infty,$$

Теорема 4 доказана.

Замечание 2. Нетрудно проверить, что для функции f, построенной в теореме 2, при $n_k = 8(4^k - 1)/3$ имеют место неравенства

$$b_m(\sigma) < M, \quad m = 1, 2, 3,$$

где M — постоянная, не зависящая от m. Следовательно, учитывая (8), (9) мы получаем пример мероморфной функции f вида (1), $n = 2$ такой, что при любом $p > 1/2$ сходится ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|A_m|^p}{|z_m|^{2p}} (1 + b_m(\sigma)) < +\infty,$$

но для f условие (6) не выполняется.

Рассмотрим теперь случай мероморфных функций f вида (1), заданных в единичном круге. В этом случае для абсолютной сходимости ряда (1) при $|z| < 1$, $z \neq z_k$ очевидно достаточно условия (5). Условие (6) в этом случае естественно заменяется на условия (3). Легко видеть, что теоремы 1, 3, 4 имеют место и в этом случае с заменой оценки (6) на (3) и условий (2), (8), (10), соответственно, на условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|^{pn} < +\infty, \quad pn < 1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k^{\frac{1}{2}}| (1 + b_k(\sigma)) < +\infty.$$

Теорема 2 также имеет место и принимает следующий вид.

Теорема 5. *Для любого фиксированного числа $p > 1/2$ существует мероморфная в единичном круге функции f_p вида* (1), *$n = 2$ такая, что для произвольного $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|^p < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{1+\varepsilon} < +\infty,$$

но

$$\overline{\lim_{r \to \infty}}\, m(r, f_p) = +\infty.$$

В заключение автор благодарит Н. У. Аракеляна за полезные обсуждения настоящей работы.

Институт математики
АН Армении

Поступила 15.III.1991

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. В. Келдыш*. О рядах по рациональным дробям, ДАН СССР, 94, № 3, 1954, 377—380.

2. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский*. Распределение значений мероморфных функций, Изд. «Наука», 1970.