ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 6, 1991 Математика

УДК 515.168

А. В. КАРАБЕГОВ

ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРЕ НА ОДНОПОЛОСТНОМ ГИПЕРБОЛОИДЕ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

Под однополостным гиперболоидом над полем k мы понимаем подмножество X трехмерного пространства k^3, заданное уравнением $x^2+y^2-z^2=1$ (в случае, когда $k=R$, X — обычный однополостный гиперболоид). Гиперболоид X является орбитой линейного действия в пространстве k^3 группы $PGL(2, k)$ проективных преобразований проективной прямой над полем k.

В настоящей работе мы описываем структуру некоторого оператора в пространстве комплекснозначных функций на гиперболоиде над конечным полем F_q нечетной характеристики, инвариантного относительно сдвигов на элементы группы $PGL(2, F_q)$. Этот оператор построен по аналогии с оператором, возникающим в задаче квантования на однополостном гиперболоиде над вещественным полем (см. [1]), структура которого описана в [2]. Спектр данного оператора описывается на языке Г-функций локальных полей (см. [3]).

1. Действие группы $PGL(2, k)$ на гиперболоиде X

Пусть $M=Mat(2, k)$ — пространство матриц второго порядка с элементами из поля k, $GL(2, k)$ — группа обратимых матриц из M, Z — ее центр, состоящий из скалярных матриц. Определим группу $PGL(2, k)=GL(2, k)/Z$. Элемент $PGL(2, k)$, представителем которого в группе $GL(2, k)$ является матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(выбираемая неоднозначно), мы будем обозначать

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Зададим правое (контравариантное) действие $GL(2, k)$ на M сопряжением: для $g\in GL(2, k)$, $m\in M$ $g: m\to g^{-1}mg$. Поскольку центр Z действует на M тривиально, то фактически на M действует группа $G=PGL(2, k)$. Поскольку сопряжение сохраняет след, группа G действует в подпространстве $M_0\subset M$ матриц с нулевым следом. Это — трехмерное пространство над k. Зададим в нем систему координат: тройке $(x, y, z)\in k^3$ поставим в соответствие матрицу

$$\begin{pmatrix} x, & y+z \\ y-z & -x \end{pmatrix}\in M_0. \qquad (1)$$

Поскольку сопряжение сохраняет определитель, а определитель матрицы (1) равен $-(x^2+y^2-z^2)$, действие группы G в M_0 сохраняет квадратичную форму $x^2+y^2-z^2$.

Точки однополостного гиперболоида X — решения уравнения $x^2+y^2-z^2=1$ — суть матрицы с нулевым следом и определителем, равным -1. Любая такая матрица приводится сопряжением к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Таким образом, X является орбитой точки (2) под действием группы G. Стабилизатором этой точки является подгруппа $A \subset G$, состоящая из элементов G, представителями которых в $GL(2, k)$ являются диагональные матрицы. Как правое однородное пространство группы G, X изоморфен пространству левых смежных классов G по A: $X \simeq A \diagdown G$. Далее мы отождествляем X и $A \diagdown G$.

2. Проективные координаты на гиперболоиде X

Проективная прямая P^1 над полем k — это совокупность одномерных подпространств плоскости k^2. Точка P^1, отвечающая подпространству, натянутому на вектор $(\alpha, \beta) \in k^2$, задается проективной координатой $(\alpha : \beta)$. Проективные координаты $(\alpha : \beta)$ и $(\gamma : \delta)$ задают одну и ту же точку P^1, если $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$.

Пусть группа $GL(2, k)$ действует справа на k^2:

$$GL(2, k) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : (\alpha, \beta) \to (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\alpha a + \beta c, \alpha b + \beta d).$$

Это действие определяет проективное действие G на P^1:

$$G \ni \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : (\alpha : b) \to (\alpha a + \beta c : \alpha b + \beta d).$$

Таким образом, $G = PGL(2, k)$ — это группа проективных преобразований проективной прямой над полем k.

Зададим эквивариантное вложение $X = A \diagdown G$ в декартов квадрат проективной прямой P^1:

$$X = A \diagdown G \ni A \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \to ((\alpha : \beta), (\gamma : \delta)) \in P^1 \times P^1. \tag{3}$$

Поскольку представители элементов G — невырожденные матрицы, имеем $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, откуда следует, что $(\alpha : \beta) \neq (\gamma : \delta)$, то есть образом X является дополнение до диагонали декартова квадрата $P^1 \times P^1$. Соответствие (3) задает проективные координаты на X.

Как известно, на P^1 имеется проективный инвариант — двойное отношение четвертки точек. Пользуясь проективными координатами на X, определим с помощью двойного отношения функцию от двух переменных на X, инвариантую относительно сдвигов на элементы G: для $x_i = ((\alpha_i : \beta_i), (\gamma_i : \delta_i)) \in X$, $i = 1, 2$, положим

$$\xi(x_1, x_2) = \frac{(\alpha_1\delta_2 - \beta_1\gamma_2)(\alpha_2\delta_1 - \beta_2\gamma_1)}{(\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1)(\alpha_2\delta_2 - \beta_2\gamma_2)}.$$

3. Определение оператора I_π

Пусть $k=\mathbf{F}_0$ — конечное поле нечетного порядка q, π — мультипликативный характер поля $\mathbf{F}_q$ (т. е. гомоморфизм мультипликативной группы $\mathbf{F}_q^*$ поля $\mathbf{F}_q$ в группу по умножению комплексных чисел, по модулю равных единице), такой, что $\pi^2\neq 1$. Раз и навсегда условимся продолжать нетривиальный мультипликативный характер ρ нулем в нуль поля $\mathbf{F}_q$, т. е. полагаем $\rho(0)=0$. Определим оператор I_π в пространстве комплекснозначных функций на гиперболоиде X над полем F_q следующей формулой:

$$I_\pi f(x)=\frac{1}{q}\sum_{y\in X}\pi(\xi(x,\ y))f(x).$$

Поскольку $\xi(x,\ y)$ — инвариантная функция на $X\times X$, оператор I_π также инвариантен, т. е. перестановочен со сдвигами на элементы группы $G=PGL(2,\ \mathbf{F}_q)$.

Нашей задачей является описание структуры и спектра оператора I_π. Поскольку I_π инвариантен, он сплетает с самим собой квазирегулярное представление R группы G на X (представление в функциях на X сдвигами), поэтому изотропные компоненты представления R являются инвариантными подпространствами оператора I_π (см. [4]).

В следующем пункте мы приведем список и конструкции неприводимых унитарных представлений группы G. Эти результаты получаются незначительной модификацией результатов из [5] о представлениях группы $SL(2,\ \mathbf{F}_q)$.

4. Неприводимые унитарные представления группы $G=PGL(2,\ \mathbf{F}_q)$

Порядок группы G равен $q(q^2-1)$, а число ее классов сопряженности — $q+2$.

По каждому характеру β мультипликативной группы $\mathbf{F}_q^*$ строится представление основной серии T_ρ в комплекснозначных функциях $f(\alpha,\ \beta)$ от двух переменных на $\mathbf{F}_q^2\setminus\{0\}$, однородных степени $\bar{\rho}^2$: для $t\in\mathbf{F}_q^*$ $f(t\alpha,\ t\beta)=\bar{\rho}^2(t)f(\alpha,\ \beta)$. Действие группы G задается следующей формулой:

$$T_\rho\left(\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}\right)f(\alpha,\ \beta)=f(\alpha a+\beta c,\ \alpha b+\beta d)\ \rho\ (ad-bc).$$

Инвариантное эрмитово скалярное произведение таково:

$$\langle f_1,\ f_2\rangle=\sum_{(\alpha:\beta)\in P^1}f_1(\alpha,\ \beta)\overline{f_2(\alpha,\ \beta)}$$

(суммирование производится по системе представителей точек P^1). Если характер ρ^2 нетривиален, представление T_ρ неприводимо. При этом два представления T_ρ и $T_{\rho'}$ эквивалентны, если $\rho'=\rho$, либо если $\rho'=\bar{\rho}$. Таким образом, получаются $(q-3)/2$ попарно неэквивалентных неприводимых представлений основной серии, размерность которых равна $q+1$.

Если же на $\mathbf{F}_q^*$ $\rho^2 \equiv 1$, то либо $\rho \equiv 1$, либо $\rho = \varkappa_0$ — нетривиальный характер второго порядка. В обоих случаях T_ρ разлагается в сумму одномерного представления T'_ρ в константах и неприводимого q-мерного представления $\tilde{T}_\rho$ в функциях с нулевым средним по $\mathbf{F}_q^2 \setminus \setminus \{0\}$: $T_1 \simeq T'_1 \oplus \tilde{T}_1$, $T_{\varkappa_0} \simeq T'_{\varkappa_0} \oplus \tilde{T}_{\varkappa_0}$. Представление T'_1 — единичное; представления $\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_{\varkappa_0}$ неэквивалентны.

Помимо представлений основной серии, у группы G есть так называемая „аналитическая" серия неприводимых представлений, которая строится с использованием квадратичного расширения поля $\mathbf{F}_q$.

Пусть ε — элемент поля $\mathbf{F}_q$, не являющийся квадратом. Квадратичное расширение поля $\mathbf{F}_q$, обозначаемое $\mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$, — это совокупность формальных сумм $z = x + \sqrt{\varepsilon}y$, где x, $y \in \mathbf{F}_q$, с очевидными операциями. Элемент $\bar{z} = x - \sqrt{\varepsilon}\, y$ называется сопряженным к $y = x + \sqrt{\varepsilon}\, y$. Группа по умножению U, образованная элементами $z \in \mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$ такими, что $z\bar{z} = 1$, имеет порядок $q + 1$.

Зафиксируем нетривиальный аддитивный характер χ поля $\mathbf{F}_q$. По каждому характеру τ группы U, такому, что $\tau^2 \neq 1$, и некоторым образом продолженному до мультипликативного характера поля $\mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$, строится предтавление S_τ аналитической серии, реализуемое в функциях на $\mathbf{F}_q^*$: для $b \neq 0$ и $D = ad - bc$

$$S_\tau\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) f(u) = -\frac{1}{q} \sum_{v \in \mathbf{F}_q^*} \sum_{t\bar{t} = \frac{v}{uD}} \chi\left(\frac{(d - tD)\, u + (a - 1/t)\, v}{b}\right) \tau(t^2 D) f(v).$$

Здесь t принимает значения из $\mathbf{F}_n(\sqrt{\varepsilon})$. При $b = 0$

$$S_\tau\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}\right) f(u) = \tau(d/a)\, \chi(cu/a)\, f(du/a).$$

Инвариантное скалярное произведение задается формулой

$$< f_1, f_2 > = \sum_{u \in \mathbf{F}_q^*} f_1(u) \overline{f_2(u)}\,.$$

Представления S_τ и $S_{\tau'}$ эквивалентны, если $\tau' = \tau$, либо если $\tau' = \bar{\tau}$. Таким образом, получаются $(q-1)/2$ попарно неэквивалентных неприводимых представлений аналитической серии размерности $q - 1$.

Полный список неприводимых представлений группы G состоит из представлений

$$T'_1,\ T'_{\varkappa_0},\ \tilde{T}_1,\ \tilde{T}_{\varkappa_0},\ T_\rho\ (\rho^2 \not\equiv 1),\ S_\tau.$$

5. Разложение квазирегулярного представления G на X

Поскольку квазирегулярное представление R индуцировано с единичного представления подгруппы A, по теореме Фробениуса (см. [4]) кратность вхождения неприводимого представления T группы G

в представление R равна числу линейно-независимых A-инвариантных векторов в представлении T. Непосредственно проверяется, что представление $T'_{\varkappa_0}$ не содержит A-инвариантных векторов, представления T'_1 (единичное), $\tilde{T}_{\varkappa_0}$, T_ρ ($\rho^2 \not\equiv 1$) и S_τ содержат по одному, а $\tilde{T}_1$ — два A-инвариантных вектора.

Укажем сразу же подпредставления R, изоморфные T'_1 и $\tilde{T}_1$. Единичное представление реализуется в константах, а представление $\tilde{T}_1$ можно реализовать двумя различными способами; в функциях на X, зависящих только от первой или второй проективной координаты и имеющих нулевое среднее по всему X.

6. Описание структуры оператора $I_\varkappa$

Изотропные компоненты представления R являются инвариантными подпространствами оператора $I_\varkappa$. Поскольку при этом представление $T_\rho(\rho^2 \not\equiv 1)$ и S_τ входят в разложение R однократно, из леммы Шура следует, что оператор $I_\varkappa$ на этих подпредставлениях скалярен. Спектр оператора $I_\varkappa$ на них будет в дальнейшем вычислен явно, а сейчас покажем, что на подпредставлениях R, изоморфных T'_1 и $\tilde{T}_1$, оператор $I_\varkappa$ действует тождественно (т. е. как единичный оператор).

Лемма 1. *Пусть ρ — нетривиальный мультипликативный характер поля $\mathbf{F}_q$, причем $\rho(0)=0$. Тогда*

$$\sum_{x \in F_q} \rho(x) = 0.$$

Доказательство леммы очевидно. Отметим также, что формула $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y)$ остается справедливой, когда аргументы обращаются в ноль.

Предложение 1. *Функция $f(x)$ на X, зависящая только от одной проективной координаты (скажем от первой), является собственным вектором оператора $I_\varkappa$ с собственным значением, равным* 1.

Доказательство. Запишем действие оператора $I_\varkappa$ на функцию f в проективных координатах:

$$I_\varkappa f((\alpha_1:\beta_1),\gamma_1:\delta_1)) = \frac{1}{q} \sum_{(\alpha_2:\beta_2)+\gamma_2:\delta_2)} \pi\left(\frac{(\alpha_1\delta_2-\beta_1\gamma_2)(\alpha_2\delta_1-\beta_2\gamma_1)}{(\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1)(\alpha_2\delta_2-\beta_2\gamma_2)}\right) f((\alpha_2:\beta_2)). \quad (4)$$

Мы считаем, что конкретные пары (α_i, β_i) и (γ_i, δ_i) являются представителями соответствующих точек $(\alpha_i:\beta_i)$ и $(\gamma_i:\delta_i)$ проективной прямой. Условимся также для одной точки P^1 выбирать ровно один представитель. Тогда мы можем представить сумму в (4) в следующем виде:

$$\frac{1}{q} \sum_{(\alpha_2:\beta_2)} \left(\sum_{(\gamma_2:\delta_2)\neq(\alpha_2:\beta_2)} \pi\left(\frac{\alpha_1\delta_2-\beta_1\gamma_2}{\alpha_2\delta_2-\beta_2\gamma_2}\right)\right) \pi\left(\frac{\alpha_2\delta_1-\beta_2\gamma_1}{\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1}\right) f((\alpha_2:\beta_2)).$$

При $(\alpha_2:\beta_2) \neq (\alpha_1:\beta_1)$ дробь $(\alpha_2\delta_1-\beta_2\gamma_1)/(\alpha_2\delta_2-\beta_2\gamma_2)$ принимает по одному разу все значения из $\mathbf{F}_q$, поэтому, по лемме 1, сумма в скобках равна нулю. Вклад во внешнюю сумму дает лишь слагаемое с $(\alpha_2 : \beta_2) = (\alpha_1 : \beta_1)$, равное $f((\alpha_1 : \beta_1))$.

Поскольку подпредставления R, изоморфные единичному и $\bar{T}_1$, реализуются в функциях, зависящих только от одной проективной координаты, оператор $I_\varkappa$ действует на них тождественно.

7. Метод вычисления спектра оператора $I_\varkappa$

Подпредставления R, изоморфные $\tilde{T}_{\varkappa_0}$, T_ρ $(\rho^2 \neq 1)$ и S_ε, однократны, так что оператор $I_\varkappa$ на этих подпредставлениях скалярен, и достаточно вычислить действие $I_\varkappa$ хотя бы на одном векторе в каждом из них.

Пусть T — неприводимое унитарное представление G в пространстве V с эрмитовым скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, и $w \in V$ — A-инвариантный вектор. Эквивариантное вложение V в пространство функций на X задается формулой

$$V \ni v \to f_v(x) = \langle T(g)v, w \rangle. \tag{5}$$

Здесь g — произвольный представитель смежного класса $x \in X = A \setminus G$.

В каждом из представлений $\tilde{T}_{\varkappa_0}$, T_ρ $(\rho^2 \neq 1$ и S_ε ровно один A-инвариантный вектор. Пусть T — любое из этих представлений, и w — соответствующий A-инвариантный вектор. Рассмотрим действие оператора $I_\varkappa$ на образе вектора w относительно вложения (5), $f_w(x) = \langle T(g)w, w \rangle$. Поскольку $I_\varkappa f_w = \theta f_w$, для собственного значения θ оператора $I_\varkappa$ на подпредставлении R, изоморфном T, то для определения θ достаточно вычислить обе части равенства в точке $x_0 = ((1:0), (0:1)) \in X$, отвечающей смежному классу единицы в $A \setminus G$ (в этой точке $f_w(x_0) = \langle w, w \rangle$ отлично от нуля).

Из G-инвариантности $\xi(x, y)$ следует, что функция $\psi(x) = \xi(x_0, x)$ A-инвариантна, поскольку A — стабилизатор точки $x_0 \in X$. В силу A-инвариантности вектора w, функция $f(x)$ A-инвариинтна и потому в формуле

$$I_\varkappa f_w(x_0) = \frac{1}{q} \sum_{x \in X} \pi(\psi(x)) f_w(x) \tag{6}$$

под знаком суммы также стоит A-инвариантная функция. Поэтому суммирование в формуле (6) сводится к суммированию по пространству орбит действия группы A на X, с учетом соответствующих кратностей. Приведем без доказательств список A-орбит на X.

Для каждого $c \neq 0, 1$ из $\mathbf{F}_q$ линия уровня $\psi(x) = c$ (т. е. полный прообраз $\psi^{-1}(c) \subset X$) является A-орбитой из $q-1$ элемента с представителем $x_c = ((c : c-1), (1:1))$. Для $c = 1$ линия уровня $\psi(x) = 1$ разбивается на три орбиты — орбиту точки x_0 из одного элемента и две из $q-1$ элемента каждая, с представителями $x' = ((1:0), (1:1))$ и $x' = (1:1), (0:1))$. Случай $c = 0$ аналогичен случаю $c = 1$, поскольку $\pi(0) = 0$, суммирование в формуле (6) по линии уровня $c = 0$ отсутствует. Окончательно, мы приходим к следующей формуле:

$$I_\varkappa f_\pi(x_0) = \frac{q-1}{q}\left(f_\pi(x') + f_\pi(x'') + \sum_{c \neq 0,1} \pi(c^{\cdot}) f_\pi(x_c)\right) + \frac{1}{q} f_\pi(x_0). \quad (7)$$

8. Г-функции конечных полей

Явные формулы для собственных значений оператора $I_\varkappa$ содержат так называемые Г-функции поля $\mathbf{F}_q$ и его квадратичного расширения $\mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$.

Пусть χ — нетривиальный аддитивный характер поля $\mathbf{F}_q$. Г-функция поля $\mathbf{F}_q$ — это функция на множестве мультипликативных характеров поля $\mathbf{F}_q$, заданная формулой

$$\Gamma(\pi) = \sum_{x \in \mathbf{F}_q^*} \chi(x)\pi(x).$$

Продолжим единичный мультипликативный характер нулем в нуль поля $\mathbf{F}_q$ и обозначим это продолжение через π_1:

$$\pi_1(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Тогда для любого мультипликативного характера π, продолженного на все $\mathbf{F}_q$, справедливо соотношение $\pi\bar{\pi} = \pi_1$. Поскольку

$$\sum_{x \in \mathbf{F}_q} \chi(x) = 0$$

и $\chi(0) = 1$, имеем $\Gamma(\pi_1) = -1$.

Для мультипликативных характеров ρ и π поля $\mathbf{F}_q$ определим B-функцию*:

$$B(\pi, \rho) = \sum_{x \neq 0,1} \pi(x)\rho(1-x).$$

Очевидно, что B-функция симметрична, т. е. $B(\pi, \rho) = B(\rho, \pi)$.

Лемма 2. *Пусть π — мультипликативный характер поля $\mathbf{F}_q$, тогда*

$$B(\pi, \bar{\pi}) = \begin{cases} -\pi(-1), & \pi \neq \pi_1 \\ q-2, & \pi = \pi_1. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\pi \neq \pi_1$.

$$B(\bar{\pi}, \pi) = \sum_{x \neq 0,1} \bar{\pi}(x)\pi(1-x) = \sum_{x \neq 0,1} \pi\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

Поскольку $1/x - 1$ принимает по одному разу все значения, кроме 0 и -1, из леммы 1 следует что $B(\pi, \bar{\pi}) = -\pi(-1)$. Случай $\pi = \pi_1$ очевиден.

Предложение 2. *Пусть π, ρ — мультипликативные характеры поля $\mathbf{F}_q$. Имеет место формула*

$$\Gamma(\pi)\Gamma(\rho) = \Gamma(\pi\rho)B(\pi, \rho) + (q-1)\pi(-1)\,\delta_{\pi, \bar{\rho}},$$

где $\delta_{\pi, \bar{\rho}}$ — символ Кронекера.

* В теории чисел функции Г и B над конечным полем называются соответственно суммами Гаусса и Якоби.

Доказательство.

$$\Gamma(\pi)\Gamma(\rho)=\sum_{x\neq 0}\chi(x)\pi(x)\sum_{y\neq 0}\chi(y)\rho(y)=\sum_{x,\,y\neq 0}\chi(x+y)\pi(x)\rho(y).$$

Сделав замену переменных $y\to xy$, получаем

$$\sum_{x,\,y\neq 0}\chi(x(1+y))\pi(x)\rho(xy)=\sum_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0,1}}\chi(x(1+y))\pi(x)\rho(xy)+$$

$$+\sum_{x\neq 0}\pi(x)\rho(-x).$$

В первом слагаемом сделаем замену $x\to x/(1+y)$ и введем обозначение $\lambda=1/(x+y)$, а второе слагаемое вычислим с помощью леммы 1. Получим

$$\sum_{x\neq 0}\chi(x)\pi(x)\rho(x)\cdot\sum_{\lambda\neq 0,\,1}\pi(\lambda)\rho(1-\lambda)+(q-1)\pi(-1)\delta_{\pi,\,\bar\rho}.$$

Предложение доказано.

Из выражения для Γ-функции легко усмотреть, что $\overline{\Gamma(\pi)}=$ $=\pi(-1)\Gamma(\bar\pi)$. Сформулируем несколько следствий из предложения 2.

Следствие 1. *Пусть* $\pi\neq\bar\rho$, *тогда*

$$B(\pi,\ \rho)=\frac{\Gamma(\pi)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\pi\rho)}.$$

Следствие 2. *Пусть* $\pi\neq\pi_1$, *тогда* $|\Gamma(\pi)|^2=q$.

Докажем следствие 2. Поскольку

$$|\Gamma(\pi)|^2=\Gamma(\pi)\overline{\Gamma(\pi)}=\pi(-1)\Gamma(\pi)\Gamma(\bar\pi),$$

из предложения 2 получим $|\Gamma(\pi)|^2=q-1-\pi(-1)B(\pi,\ \bar\pi)$. Остается применить лемму 2.

Поскольку квадратичное расширение поля F_q — конечное поле, изоморфное F_{q^2}, Γ-функция поля $F_q(\sqrt{\varepsilon})$ определяется аналогичным образом. Однако аддитивный хaрактер $\tilde\chi$ поля $F_q(\sqrt{\varepsilon})$ удобно выбрать согласованным с характером $\chi:\tilde\chi(z)=\chi(z+\bar z)$. Обозначим Γ-функцию поля $F_q(\sqrt{\varepsilon})$ через Γ_ε. Таким образом, для мультипликативного характера σ поля $F_q(\sqrt{\varepsilon})$

$$\Gamma_\varepsilon(\sigma)=\sum_{z\in F_q(\sqrt{\varepsilon})^*}\chi(z+\bar z)\sigma(z).$$

Отметим, что если σ нетривиален, то $|\Gamma_\varepsilon(\sigma)|=q$.

Предложение 3. *Пусть* σ — *мультипликативный характер поля* $F_q(\sqrt{\varepsilon})$, ρ — *его ограничение на* F_q^*, *причем* $\rho\neq 1$, *тогда*

$$\Gamma_\varepsilon(\sigma)=\Gamma(\rho)\cdot\sum_{y\in F_q}\sigma\left(\frac{1+\sqrt{\varepsilon}y}{2}\right).$$

Доказательство. Для $z\in F_q(\sqrt{\varepsilon})^*$ либо $z=y\sqrt{\varepsilon}$, где $y\in F_q^*$, либо $z=x(1+y\sqrt{\varepsilon})$, где $x\in F_q^*$, $y\in F_q$.

$$\Gamma_\varepsilon(\sigma) = \sum_{z\in F_q(\sqrt{\varepsilon})^*} \chi(z+\bar z)\sigma(z) = \sum_{y\in F_q^*} \sigma(\sqrt{\varepsilon})\rho(y) = \sum_{\substack{x\in F_q^*\\ y\in F_q}} \chi(2x)\rho(x)\sigma(1+y\sqrt{\varepsilon}).$$

Первое слагаемое обращается в ноль, в силу леммы 1. Остается произвести во второй сумме замену переменных $x \to x/2$.

9. Спектр оператора $I_\varkappa$ на представлениях основной серии

Пусть ρ — нетривиальный мультипликативный характер поля F_q. В реализации представления T_ρ в $\overline{\rho^2}$-однородных функциях на $F_q^2\setminus\{0\}$ A-инвариантный вектор равен $\bar\rho(\alpha\beta)$, причем если $\rho=\pi_0$, то этот вектор лежит в пространстве представления $\bar T_{\pi_0}$. Его образ в функциях на X, обозначаемый f_ρ, таков:

$$f_\rho((\alpha:\beta),(\gamma:\delta)) = \sum_{(x:y)\in P^1} \bar\rho((x\alpha+y\gamma)(x\beta+y\delta))\rho((\alpha\delta-\beta\gamma)xy). \qquad (8)$$

Суммирование в (8) производится по семейству представителей точек P^1. Пользуясь тем, что $\rho(0)=0$, выражение для f_ρ можно преобразовать к виду

$$f_\rho((\alpha:\beta),(\gamma:\delta)) = \sum_{\substack{(x:y)\in P^1\\ xy\neq 0}} \bar\rho\left(\frac{(x\alpha+y\gamma)(x\beta+y\delta)}{(\alpha\delta-\beta\gamma)xy}\right). \qquad (9)$$

Делая в (9) замену переменных $t=x/y$, получим окончательно

$$f_\rho((\alpha:\beta),(\gamma:\delta)) = \sum_{t\in F_q^*} \bar\rho\left(\frac{-\alpha\beta t^2+(\alpha\delta+\beta\gamma)t-\gamma\delta}{(\alpha\delta-\beta\gamma)t}\right).$$

Вычислим значения функции f_ρ на представителях A-орбит на X, входящих в формулу (7). В точке $x_c=((c:c-1),1:1))$

$$f_\rho(x_0) = \sum_{t\in F_q^*} \bar\sigma((2-1-1/t)c-(1-1/t)).$$

В точке $x_0=((1:0,(0:1))$ $f_\rho(x_0)=q-1$. В точке $x'=((1:0),(1:1))$ имеем

$$f_\rho(x') = \sum_{t\in F_q^*} \bar\rho\left(1-\frac{1}{t}\right) = -1.$$

Точно так же для $x''=((1:1),(0:1))$ получаем $f_\rho(x'')=-1$.

Пользуясь формулой (7), выпишем выражение для собственного значения θ_ρ оператора $I_\varkappa$ в представлении R оператора T_ρ при $\rho\neq\pi_0$, и $\bar T_{\pi_0}$ при $\rho=\pi_0$:

$$\theta_\rho = \frac{1}{q}\left(-1+\sum_{c\neq 0,1}\pi(c)\sum_{t\neq 0}\bar\rho((2-t-1/t)c-(1-1/t))\right). \qquad (10)$$

Поскольку при $c=1$ сумма по t в (10) обращается в -1, слагаемое -1 в (10) можно включить в общую сумму:

$$\theta_\rho = \frac{1}{q} \sum_{c \neq 0} \pi(c) \sum_{t \neq 0} \bar{\rho}((2 - t - 1/t)c - (1 - 1/t)).$$

Учитывая, что при $t = 1$ слагаемое в сумме по t обращается в нуль, отбросим его и сделаем замену переменной $c \to c(1 - 1/t)/(2 - t - 1/t)$:

$$\theta_\rho = \frac{1}{q} \sum_{c \neq 0} \pi(c) \bar{\rho}(1 - c) \sum_{t \neq 0} \bar{\pi} \bar{\rho}(1 - t) \rho(t).$$

Пользуясь предложением 2, получим, что при $\pi \neq \rho, \bar{\rho}$

$$\theta_\rho = \frac{1}{q} \frac{\Gamma(\pi)\Gamma(\bar{\rho})}{\Gamma(\pi\bar{\rho})} \frac{\Gamma(\bar{\pi}\bar{\rho})\Gamma(\rho)}{\Gamma(\bar{\pi})}.$$

Применяя формулы преобразования для Г-функции поля $\mathbf{F}_q$, получаем окончательно

$$\theta_\rho = \frac{\Gamma(\pi)^2}{\Gamma(\pi\rho)\Gamma(\pi\bar{\rho})}.$$

Отметим, что в этом случае $|\theta_\rho| = 1$. Для $\pi = \rho$ или $\pi = \bar{\rho}$

$$\theta_\pi = \theta_{\bar{\pi}} = -\frac{1}{q} \frac{\Gamma(\pi)^2}{\Gamma(\pi^2)}.$$

При этом $|\theta_\pi|^2 = 1/q$. Поскольку представления T_ρ и $T_{\bar{\rho}}$ изоморфны, им отвечает одно и то же подпредставление R, так что для всех ρ имеет место $\theta_\rho = \rho_{\bar{\rho}}$.

10. Спектр оператора I_κ на представлениях аналитической серии

Пусть τ — характер группы U такой, что $\tau^2 \not\equiv 1$, и продолженный некоторым образом до мультипликативного характера поля $\mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$. В реализации представления S_τ на $\mathbf{F}_q^* A$-инвариантный вектор равен $\bar{\tau}(u)$. Его образ в функциях на X, обозначаемый f_τ, имеет в точке $x = ((\alpha : 0), (\gamma : \delta)) \in X$ следующий вид:

$$f_\tau(x) = \sum_{u \in \mathbf{F}_q^*} \tau\left(\frac{\delta}{\alpha}\right) \chi\left(\frac{\gamma u}{\alpha}\right) \bar{\tau}\left(\frac{\delta u}{\alpha}\right) \tau(u) = \sum_{u \in \mathbf{F}_q^*} \chi\left(\frac{\gamma u}{\alpha}\right),$$

откуда при $\gamma \neq 0$ $f_\tau((\alpha : 0), (\gamma : \delta)) = -1$ и $f_\tau((\alpha : 0), (0 : \delta)) = q - 1$. При $\beta \neq 0$ положим $D = \alpha\delta - \beta\gamma$. Тогда

$$f_\tau((\alpha : \beta), (\gamma : \delta)) = -\frac{1}{q} \sum_{u, v \in \mathbf{F}_q^*} \sum_{t\bar{t} = \frac{v}{uD}} \chi\left(\frac{(\delta - tD)u + (\alpha - 1/t)v}{\beta}\right) \tau\left(t^2 D \frac{u}{v}\right) =$$

$$= -\frac{1}{q} \sum_{u \in \mathbf{F}_q^*} \sum_{t \in \mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})^*} \chi(uD(\alpha t\bar{t} - t - \bar{t} + \delta/D)) \tau(t/\bar{t}) =$$

$$= - \sum_{\alpha t\bar{t} - t - \bar{t} + \delta/D = 0,\ t \neq 0} \tau(t/\bar{t}).$$

Вычислим значения функции f_τ на представителях A-орбит на X, входящих в формулу (7). В точке $x_c = ((c:c-1),\ (1:1))$ при $c \neq 0,1$, получим

$$f_\tau(x_c) = -\sum_{(t-1)(\bar t-1)=1-c,\ t\neq 0} \tau(t/\bar t).$$

Наконец, $f_\tau(x_0) = q-1$, $f_\tau(x') = f_\tau(x'') = -1$.

Пользуясь формулой (7), выпишем выражение для собственного значения θ_τ оператора I_π в подпредставлении R, изоморфном S_τ:

$$\theta_\tau = -\frac{1}{q}\Big(1+\sum_{c\neq 0,1}\pi(c)\sum_{(t-1)(\bar t-1)=1-c,\ t\neq 0}\tau(t/\bar t)\Big) =$$

$$= -\frac{1}{q}\sum_{c\neq 0}\pi(c)\sum_{(t-1)(\bar t-1)=1-c,\ t\neq 0}\tau(t/\bar t) =$$

$$= -\frac{1}{q}\sum_{t\in F_q(\sqrt{\varepsilon})^*}\pi(t+\bar t-t\bar t)\,\tau(t/\bar t).$$

Представим $t\in F_q(\sqrt{\varepsilon})^*$ в виде $t = 2\lambda/(1-y\sqrt{\varepsilon})$, $\lambda\in F_q^*$, $y\in F_q$. Пользуясь формулой

$$t+\bar t-\bar t t = \lambda(1-\lambda)\,\frac{2}{1+y\sqrt{\varepsilon}}\cdot\frac{2}{1-y\sqrt{\varepsilon}},$$

получим

$$\theta_\tau = -\frac{1}{q}\sum_{\lambda\in F_q^*}\pi(\lambda)\pi(1-\lambda)\sum_{y\in F_q}\bar\pi\Big(\frac{1+y\sqrt{\varepsilon}}{2}\cdot\frac{1-y\sqrt{\varepsilon}}{2}\Big)\times$$

$$\times\,\tau\left(\frac{(1+y\sqrt{\varepsilon})/2}{(1-y\sqrt{\varepsilon})/2}\right). \qquad (11)$$

Определим мультипликативный характер σ поля $F_q(\sqrt{\varepsilon})$ формулой $\sigma(t) = \pi(t\bar t)\,\tau(\bar t/t)$ и перепишем (11) в следующем виде:

$$\theta_\tau = -\frac{1}{q}\,B(\pi,\pi)\sum_{y\in F_q}\bar\sigma\Big(\frac{1+y\sqrt{\varepsilon}}{2}\Big).$$

Поскольку ограничение σ на F_q равно π^2, из предложения 3 получаем

$$\theta_\tau = -\frac{1}{q}\,\frac{\Gamma(\pi)^2}{\Gamma(\pi^2)}\cdot\frac{\Gamma_\varepsilon(\bar\sigma)}{\Gamma(\bar\pi^2)} = -\frac{\Gamma(\pi)^2}{\Gamma_\varepsilon(\sigma)}.$$

Отметим, что $|\theta_\tau| = 1$. Таким образом, оператор I_π „почти" унитарен — унитарность нарушается лишь на подпредставлении R, изоморфном T_π. Сформулируем окончательный результат.

Теорема. *Оператор I_π на гиперболоиде над конечным полем F_q нечетной характеристики скалярен на каждой изотропной компоненте квазирегулярного представления R. На подпредставлении R, изоморфном единичному, и на изотропной компоненте, отвечающей $\tilde T_1$, I_π действует тождественно. Собственные значения* θ_p

оператора I_π *на подпредставлениях* R_ρ *изоморфных* T_ρ *при* $\rho \neq \pi_0$ *и* $\tilde{T}_{\pi_0}$ *при* $\rho = \pi_0$, *задаются формулами*

$$\theta_\rho = \frac{\Gamma(\pi)^2}{\Gamma(\pi\rho)\,\Gamma(\pi\bar{\rho})} \text{ при } \rho \neq \pi, \bar{\pi} \text{ и } \theta_\pi = \theta_{\bar{\pi}} = -\frac{1}{q}\,\frac{\Gamma(\pi)^2}{\Gamma(\pi^2)}.$$

Наконец, на подпредставлениях R_τ *изоморфных* S_τ, *его собственные значения* θ_τ *выражаются формулой*

$$\theta_\tau = -\frac{\Gamma(\pi)^2}{\Gamma_2(\sigma)},$$

где $\sigma(t) = \pi(t\bar{t})\,\tau(\bar{t}/t)$.

Межвузовский научный центр
по прикладным проблемам
математики ЕГУ

Поступила 12.VI.1991

Ա. Վ. ԿԱՐԱԲԵԳՈՎ. Վերջավոր դաշտի վրա սահմանված միախոռոչ հիպերբոլոիդի վրա մի օպերատորի մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում նկարագրված են վերջավոր դաշտի վրա սահմանված միախոռոչ հիպերբոլոիդի վրա մի ինվարիանտ օպերատորի կառուցվածքը և սպեկտրը։ Այդ օպերատորը նմանատիպ է pq *և* qp-*սիմվոլները կապող սովորական միախոռոչ հիպերբոլոիդի վրա որոշված օպերատորին։ Օպերատորի սպեկտրը նկարագրված է վերջավոր դաշտերի* Γ-*ֆունկցիաների լեզվով։*

A. V. KARABEGOV. *On some operator on a hyperboloid of one sheet over finite field* (summary)

The structure and spectrum of an invariant operator on a hyperboloid of one sheet over finite field is described. This operator is analogous to the one connecting pq- and qp-symbols on an ordinary hyperboloid of one sheet.

The spectrum of the operator is described in terms of Γ-functions of finite fields.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Ф. Молчанов.* Квантование на мнимой плоскости Лобачевского, Функц. анализ и его прилож., 1980, 14, № 2 73—74.
2. *А. В. Карабегов.* Об операторе, связывающем *pq*- и *qp*-символы на однополостном гиперболоиде, УМН, 42, вып. 2 (24), 1987, 229—230.
3. *И. М. Гельфанд, М. И. Граев, И. И. Пятецкий-Шапиро.* Теория представлений и автоморфные функции, М., Наука, 1966.
4. *Ж.—П. Серр.* Линейные представления конечных групп, М., Мир, 1970.
5. *М. А. Наймарк.* Теория представлений групп. М., Наука, 1976.