УДК 517.53

К. Г. КАЗАРЯН, В. М. МАРТИРОСЯН

ВОПРОСЫ БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ
 ФУНКЦИЙ ФАБЕРА—ДЖРБАШЯНА В ПРОСТРАНСТВАХ
 В. И. СМИРНОВА И ИХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ

В в е д е н и е

0.1. М. М. Джрбашян [1] для произвольного ограниченного континуума Γ , содержащего более одной точки, построил системы рациональных функций. Они являются обобщениями полиномов Фабера в том смысле, что полюсы этих функций вместо бесконечности расположены на заданной последовательности точек $\{z_n\}_0^\infty \subset G^-$ (G^- — та из смежных с Γ связных компонент, которая содержит точку $z = \infty$), причем, если, в частности, $z_n = \infty$ ($n > 0$), то указанная система обрабатывается в систему полиномов Фабера. В последующем эти рациональные функции и их модификации изучались в других работах М. М. Джрбашяна [2, 3], а также в работах Г. Ц. Тумаркива [4, 5], Г. С. Кочаряна [6, 7] и А. М. Лукацкого [8, 9]. В монографии П. К. Суекина [10] кратко изложен ряд важных свойств рациональных функций Фабера—Джрбашяна.

Для произвольного значения параметра s ($0 < s \leq 1$) рациональные функции Фабера—Джрбашяна $M_n^{(s)}(z)$ ($n \geq 0$) строятся следующим образом. Пусть $w = \Phi(z)$ — функция, конформно отображающая G^- на область $|w| > 1$ и удовлетворяющая условиям нормировки $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$. Эта функция определяет внутри единичного круга последовательность точек $\alpha_n = 1/\Phi(z_n)$ ($n \geq 0$). Рассмотрим систему рациональных функций Такенака—Мальмквиста [11—13, 3]

$$\varphi_0(w) = \frac{(1 - |\alpha_0|^2)^{1/2}}{1 - \alpha_0 w}, \quad \varphi_n(w) = \frac{(1 - |\alpha_n|^2)^{1/2} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k - w}{1 - \bar{\alpha}_k w}}{\alpha_n} \quad (n \geq 0). \quad (0.1)$$

Для этих функций выполняется условие ортонормированности

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|w|=1} \varphi_n(w) \overline{\varphi_k(w)} |dw| = \delta_{nk} \quad (0.2)$$

(δ_{nk} — символ Кронекера) и ряды по ним являются некоторым обобщением рядов Тейлора [11—13, 3]. При всех $n \geq 0$ функции $M_n^{(s)}(z)$ определяются как сумма главных частей (и постоянных слагаемых при $z_k = \infty$) в лорановском разложении функции

$$G_n^{(s)}(z) = \gamma_n [\Phi(z)] [\Phi'(z)]^s \quad (0.3)$$

в окрестностях всех отличных друг от друга точек $z = z_k$ ($k=0, 1, \dots, n$)..

0.2. В работах [1—3] (и в [4, 5] при $s = 1/2$) исследованы вопросы разложения аналитических функций в ряд по системе $\{M_n^{(s)}(z)\}_0^\infty$ ($0 < s \leq 1$) в том случае, когда Γ есть спрямляемая граница конечной односвязной жордановой области G^+ и $[\Phi'(t)]^{s-1/2} \in L_2(\Gamma)$. Установлено интегральное представление

$$\bar{M}_n^{(s)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi_n[\Phi(t)] [\Phi'(t)]^s}{t-z} dt, \quad z \in G^+$$

и введена система функций $\{\chi_n^{(s)}(z)\}_0^\infty$:

$$\chi_n^{(s)}(z) = [\Phi'(z)]^{1-s} [\Phi(z)]^{-1} \bar{\varphi}_n [1/\Phi(z)], \quad z \in G^+,$$

($\bar{\varphi}_n(w) = \overline{\varphi_n(\bar{w})}$), которая биортогональна в $\{M_n^{(s)}(z)\}_0^\infty$ в следующем смысле:

$$\int_{\Gamma} M_n^{(s)}(t) \chi_m^{(s)}(t) dt = \delta_{nm}.$$

Введем классы $K_2^{(s)}(G^+)$ голоморфных в G^+ функций, представимых в G^+ в виде интеграла типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t)}{t-z} dt, \quad g(t) [\Phi'(t)]^{1/2-s} \in L_2(\Gamma)$$

и установлено, что если

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\Phi(z_n)|^{-1}) = \infty, \quad (0.4)$$

то функция $f(z) \in K_2^{(s)}(G^+)$ допускает абсолютно и равномерно сходящееся внутри области G^+ разложение

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n M_n^{(s)}(z) \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty, c_n = \int_{\Gamma} g(t) \chi_n^{(s)}(t) dt \right). \quad (0.5)$$

Подробно исследован также случай, когда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\Phi(z_n)|^{-1}) < \infty. \quad (0.6)$$

При условии (0.6) в работе [3] было установлено следующее представление ядра Коши:

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(s)}(z) \chi_n^{(s)}(t) + \frac{[\Phi'(t)]^{1-s}}{2\pi i B |\Phi|(t)} \int_{\Gamma} \frac{B[\Phi(\eta)] [\Phi'(\eta)]^s}{(\eta-z) [\Phi(t) - \Phi(\eta)]} d\eta \quad (0.7)$$

для $z \in G^+$, $t \in G^-$ и почти для всех $t \in \Gamma(B(w) -$ произведение Бляшке для круга $|w| < 1$ с последовательностью нулей $\{a_n\}_0^\infty$). Это привело к эффективному определению разности между функцией $f(z) \in K_2^{(s)}(G^+)$ и ее разложением в ряд по системе $\{M_n^{(s)}(z)\}_0^\infty$. Отсюда, в качестве непосредственного следствия, была выявлена полная внутренняя характеристика и структурное представление класса $\tilde{K}_2^{(s)}(G^+)$

функций, допускающих при условии (0.6) разложение в абсолютно и равномерно сходящийся ряд вида (0.5). Установлено, что $\tilde{K}_2^{(s)}(G^+)$ совпадает с классом функций, аналитических в отдельности в каждой из областей G^+ , $G^-/\{z_n\}_0^-$ и являющихся в определенном смысле „аналитическими продолжениями“ друг друга через общую границу Γ этих областей; установлено совпадение этих классов функций, представимых внутри этих областей абсолютно и равномерно сходящимся рядом вида (0.5).

0.3. Из результатов, анонсированных Г. Ц. Тумаркиным в работах [4] (с. 15) и [5] (с. 257) можно вывести, что если конечная односвязная область G^+ ограничена спрямляемой жордановой кривой Γ , которая является карлесоновской кривой (т. е. для любого круга Δ радиуса r длина $\Gamma \cap \Delta$ не превосходит $A \cdot r$, где $A (> 0)$ — постоянная, не зависящая от r [14]), то система $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^-$ является базисом в замыкании своей линейной оболочки в метрике $L_1(\Gamma)$ ($f(t) \in L_1(\Gamma) \Leftrightarrow \int_{\Gamma} |f(t)|^2 |dt| < \infty$). В частности, при условии (0.4) эта система является базисом в $E_2(G^+)$.

Для конечных односвязных жордановых областей G^+ , ограниченных ляпуновскими кривыми, в работе Г. М. Айрапетяна [15] было установлено, что для неполных в $E_p(G^+)$ систем рациональных функций $\{(z - \omega_k)^{-1}\}_1^+$ с отличными друг от друга полюсами $\{\omega_k\}_1^+ \subset G^-/\{\infty\}$, при специальных условиях на $\{\omega_k(z)\}_1^+$ эти системы образуют базисы в замыкании своих линейных оболочек в метрике $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$. Особо отметим, что указанные замыкания являются строгими подпространствами из $E_p(G^+)$ (т. е. не совпадают с $E_p(G^+)$).

0.4. Естественно возникает вопрос изучения базисных свойств систем Фабера — Джрбашяна при аппроксимации в топологии пространства $L_p(\Gamma)$ в общем случае $1 < p < \infty$. В данной работе этот вопрос исследован для конечных односвязных жордановых областей G^+ , ограниченных карлесоновскими кривыми Γ . Установлено, что при условии (0.4) система $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^-$ является базисом (при $p = 2$ — базисом Рисса) пространства В. И. Смирнова $E_p(G^+)$, и разложение функции $f(z) \in E_p(G^+)$ в ряд по системе $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^-$ сходится к $f(z)$ (при $p = 2$ — безусловно) как по метрике пространства $L_p(\Gamma)$, так и равномерно на компактах $K \subset G^+$. Если же выполнено условие (0.6), то система $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^-$ является базисом (при $p = 2$ — базисом Рисса) пространства

$$E_p(G^+; \{z_n\}_0^{\infty}) \subset E_p(G^+)$$

(определение и свойства этого пространства см. в § 4), и разложение функции $f(z) \in E_p(G^+ \{z_n\}_0^{\infty})$ в ряд по системе $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^-$ сходится к $f(z)$ (при $p = 2$ — безусловно) как по метрике пространства $L_p(\Gamma)$, так и

равномерно на компактах $K \subset \overline{C}/\Lambda$, где Λ — замыкание множества точек последовательности $\{z_n\}_0^\infty$. Таким образом, система $\{M_n^{1/p}(z)\}_0^\infty$ всегда является базисом замыкания и метрике $L_p(\Gamma)$ своей линейной оболочки, если только Γ — карлесоновская кривая и $1 < p < \infty$.

Из результатов данной работы и известных свойств смириновских кривых* (см. [16—18]), в частности, вытекает, что карлесоновская кривая является смириновской кривой.

§ 1. Предварительные сведения о классах E_p

1.1. Сначала введем некоторые обозначения. На протяжении всей данной работы через G^+ будем обозначать односвязную ограниченную область конечной комплексной плоскости C , граница Γ которой есть спрямляемая жорданова кривая (пробегаемая в направлении положительного обхода области $\overline{G^+} = G^+ \cup \Gamma$) — это дополнение замкнутой области $\overline{G^+} = G^+ \cup \Gamma$ до расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$. Через $w = \chi(z)$ будем обозначать функцию, конформно отображающую область G^+ на круг $|\omega| < 1$, а через $z = \omega(w)$ — обратную функцию. Наконец, пусть $w = \Phi(z)$ — функция, конформно отображающую область G^- на область $|\omega| > 1$, нормированная условиями $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$, а $z = \psi(w)$ — обратная функция.

1.2. Напомним теперь определение и приведем нужные нам свойства классов E_p . В. И. Смирнова (см., напр., [19, 20]). Для любого значения параметра $p \in (0, \infty)$ классы $E_p(G^+)$ и $E_p(G^-)$ определяются следующим образом:

$$f(z) \in E_p(G^+) \Leftrightarrow f(\omega(w))(w'(w))^{1/p} \in H_p^+, \quad (1.1)$$

$$f(z) \in E_p(G^-) \Leftrightarrow f(\psi(w))(\psi'(w))^{1/p} \in H_p^-, \quad (1.2)$$

где H_p^+ — класс Харди функций $g(w)$, голоморфных в круге $|\omega| < 1$ и удовлетворяющих условию

$$\sup_{0 < r < 1} \left\{ \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^p d\theta \right\} < \infty,$$

а H_p^- — соответственно класс функций $g(w)$, голоморфных в области $|\omega| > 1$ и таких, что

$$\sup_{1 < r < \infty} \left\{ \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^p d\theta \right\} < \infty.$$

В следующей теореме содержится эквивалентное определение классов $E_p(G^+)$ и $E_p(G^-)$ (см. [21], с. 47).

Теорема А. Для всех классов $E_p(G^\pm)$ ($0 < p < \infty$) в области $G^\pm$ существует универсальная (т. е. общая для всех $f(z) \in E_p(G^\pm)$)

* Замкнутая спрямляемая жорданова кривая Γ , ограничивающая область G^+ , называется смириновской кривой, если для $z = \omega(w)$ — конформного отображения области $|\omega| < 1$ на G^+ , функция $\ln|\omega'(w)|$ представляется в $|\omega| < 1$ интегралом Пуассона—Лебега.

последовательность областей $\{G_j^\pm\}_1^\infty \subset G^\pm$ с аналитическими границами $\partial G_j^\pm$, сходящаяся к G , удовлетворяющая условию

$$\sup_{j>1} \{ \text{длина } G_j^\pm \} < \infty, \tag{1.3}$$

и такая, что для любой голоморфной в $G^\pm$ функции $f(z)$ имеет место

$$f(z) \in E_p(G^\pm) \Leftrightarrow \sup_{j>1} \left\{ \int_{\partial G_j^\pm} |f(z)|^p |dz| \right\} < \infty. \tag{1.4}$$

Применив неравенство Гельдера, отсюда получаем

$$E_p(G^+) \subset E_1(G^+), E_p(G^-) \subset E_1(G^-), 1 \leq p < \infty. \tag{1.5}$$

Известно, что если функция $f(z) \in E_p(G^+)$ (соответственно $f(z) \in E_p(G^-)$), то она почти всюду на Γ имеет граничные значения $f(t)$ при стремлении z к t изнутри G^+ (соответственно изнутри G^-) и что $f(t)^p$ суммируем на Γ (см., напр., [21], с. 73). Приведем также следующие важные результаты (см.; напр., [21], с. 61–62, и [20], с. 423).

Теорема Б. Если $f^+(z) \in E_1(G^+)$ (или $f^-(z) \in E_1(G^-)$ и $f^-(\infty) = 0$), то справедлива формула Коши

$$\pm \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f^\pm(t)}{t-z} dt = \begin{cases} f^\pm(z), & z \in G^\pm, \\ 0, & z \in G^\pm. \end{cases} \tag{1.6}$$

Теорема В. Если $f(z) \in E_1(G^+)$, то имеет место теорема Коши:

$$\int_{\Gamma} f(t) dt = 0. \tag{1.7}$$

Следствие 1.1. Если $f(z) \in E_p(G^+)$ и $g(z) \in E_q(G^+)$, где $1 < p < \infty$ и $1/p + 1/q = 1$, то

$$\int_{\Gamma} f(t) g(t) dt = 0. \tag{1.8}$$

Доказательство. Достаточно заметить, что в силу теоремы А и неравенства Гельдера $f(z) g(z) \in E_1(G^+)$ и воспользоваться теоремой В.

Убедимся также в справедливости следующего утверждения, которым воспользуемся в дальнейшем.

Лемма 1.1. Пусть функция $f(z) \in E_1(G^-)$ $f(\infty) = 0$ и

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_j}{z^{j+1}}, \quad |z| > \max \{|t_j| : t_j \in \Gamma\}, \tag{1.9}$$

— ее тейлоровское разложение в окрестности точки $z = \infty$. Тогда для любого целого $n \geq 0$ будем иметь:

$$\int_{\Gamma} f(t) t^k dt = 0 \quad (k = 0, \dots, n-1) \Leftrightarrow c_n = 0 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (1.10)$$

Доказательство. Убедимся, что если $R_0 > \max \{|t|, t \in \Gamma\}$, то справедливы равенства

$$\int_{\Gamma} f(t) t^k dt = \int_{|t|=R_0} f(t) t^k dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.11)$$

С этой целью обозначим через C_{R_0} образ окружности $|z| = R_0$ при отображении $w = \Phi(z)$ и предположим, что числа $R > 1$ таковы, что окружность $|w| = R$ лежит в области, ограниченной кривой C_{R_0} и единичной окружностью $|w| = 1$. Тогда, поскольку функция $z = \psi(w)$ голоморфна при $|w| > 1$ и непрерывна при $|w| \geq 1$, а ввиду (1.2)

$$F(w) = f(\psi(w)) \psi'(w) \in H_1^-, \quad (1.12)$$

то по теореме Коши будем иметь

$$\int_{C_{R_0}} F(w) [\psi(w)]^k dw = \int_{|w|=R} F(w) [\psi(w)]^k dw \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.13)$$

С другой стороны, $F(w) \in H_1^-$, так что в силу теоремы Ф. Рисса (см., напр., [20], с. 390)

$$\lim_{R \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} |F(Re^{i\theta}) - F(e^{i\theta})| d\theta = 0.$$

Отсюда с учетом непрерывности функции $z = \psi(w)$ получаем

$$\lim_{R \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} F(Re^{i\theta}) [\psi(Re^{i\theta})]^k Re^{i\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{i\theta}) [\psi(e^{i\theta})]^k e^{i\theta} d\theta$$

или, что то же самое

$$\lim_{R \rightarrow 1} \int_{|w|=R} F(w) [\psi(w)]^k dw = \int_{|w|=1} F(w) [\psi(w)]^k dw \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Следовательно, в силу (1.13) справедливы равенства

$$\int_{C_{R_0}} F(w) [\psi(w)]^k dw = \int_{|w|=1} F(w) [\psi(w)]^k dw \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Переходя в этих равенствах к переменной $t = \psi(w)$ и учитывая (1.12), получим (1.11).

Теперь заметим, что ряд (1.9) равномерно сходится на окружности $|z| = R_0$, и поэтому

$$\int_{|t|=R_0} f(t) t^k dt = \sum_{|j|=k} c_j \int_{|t|=R_0} t^{k-1} dt =$$

$$= \sum_{j=1}^k ic_j R_0^{k-j+1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\lambda-j+1)\theta} d\theta = 2\pi ic_{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Учитывая также (1.11), отсюда получаем требуемое утверждение (1.10).

Следствие 1.2. Если $f(z) \in E_p(G^-)$, $f(\infty) = 0$ и $g(z) \in E_q(G^-)$, $g(\infty) = 0$, где $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, то

$$\int_{\Gamma} f(t) g(t) dt = 0.$$

Доказательство. Из теоремы А и неравенства Гельдера следует, что $f(z) g(z) \in E_1(G^-)$, а в силу равенств $f(\infty) = 0$, $g(\infty) = 0$ в окрестности точки $z = \infty$ будем иметь разложение

$$f(z) g(z) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{c_j}{z^j}.$$

Отсюда на основании леммы 1.1 получаем (1.14).

1.3. (а). Пусть $\{\lambda_k^+\}_1^{\infty} \subset G^+$ ($k = \infty$, либо $k = 1, 2, \dots$) — произвольная последовательность, причем если $k = \infty$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\chi(\lambda_k^+)|) < \infty. \tag{1.15}$$

Пусть

$$B^+(z; \kappa) = \prod_{k=1}^{\kappa} \frac{\chi(\lambda_k^+) - \chi(z)}{1 - \chi(\lambda_k^+) \chi(z)} \frac{|\chi(\lambda_k^+)|}{\chi(\lambda_k^+)} \tag{1.16}$$

(полагаем $|\chi(\lambda_k^+)|/\chi(\lambda_k^+) = -1$ при $\chi(\lambda_k^+) = 0$). Поскольку функция $\chi(z)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{G}^+$ и отображает ее взаимнооднозначно на круг $|\omega| \leq 1$, причем $|\chi(t)| = 1$ при $t \in \Gamma$ (см., напр., [20], с. 46), то в силу известных свойств произведения Бляшке

$$B(\omega) = \prod_{k=1}^{\kappa} \frac{a_k - \omega}{1 - a_k \omega} \frac{|a_k|}{a_k} \quad (\omega = \chi(z), a_k = \chi(\lambda_k^+))$$

(см., напр., [22], с. 81) можем утверждать следующее. Если $\partial\{\lambda_k^+\}_1^{\infty}$ — совокупность предельных точек последовательности $\{\lambda_k^+\}_1^{\infty}$, то функция $B^+(z; \kappa)$ голоморфна в G^+ , непрерывна в $\bar{G}^+/\partial\{\lambda_k^+\}_1^{\infty}$, последовательность ее нулей в $\bar{G}^+/\partial\{\lambda_k^+\}_1^{\infty}$ совпадает с последовательностью $\{\lambda_k^+\}_1^{\infty}$ и

$$|B^+(z, \kappa)| \leq 1 \quad (z \in G^+), \quad |B^+(z, \kappa)| = 1 \quad (z \in \Gamma \text{ п. в.}) \tag{1.17}$$

Функцию $B^+(z, \kappa)$ будем называть произведением Бляшке для области G^+ с нулями $\{\lambda_k^+\}_1^{\infty}$.

Теперь для любой функции $f(z) \in E_p(G^+)$, $f(z) \neq 0$, обозначим через $B_f^+(z)$ произведение Бляшке для области G^+ , нули которого совпадают с нулями $f(z)$ в G^+ (если $f(z) \neq 0$ в G^+ , то полагаем $B_f^+(z) \equiv 1$). Тогда из известных свойств единственности и факторизации пространств Харди H_p^+ (см., напр., [22], гл. II) и из (1.1) вытекает следующая

Теорема Γ_1 . Для всех $p \in (0, \infty)$ справедливы следующие утверждения;

1°. Если $\{\lambda_k^+\}_1^\infty \subset G^+$ ($x = \infty$, либо $x = 1, 2, \dots$), то для существования нетривиальной функции $f(z) \in E_p(G^+)$, обращающейся в нуль на последовательности $\{\lambda_k^+\}_1^\infty$, необходимо и достаточно, чтобы было $x < \infty$, либо $x = \infty$ и выполнено условие (1.15).

2°. Если $f(z) \in E_p(G^+)$, $f(z) \neq 0$, то функция $g(z) = f(z)/B_f^+(z)$ принадлежит $E_p(G^+)$ и

$$\int_{\Gamma} |f(t)|^p |dt| = \int_{\Gamma} |g(t)|^p |dt|. \quad (1.18)$$

(б) Пусть теперь $\{\lambda_k^-\}_1^\infty \subset G^-$ ($x = \infty$, либо $x = 1, 2, \dots$) — произвольная последовательность, для которой при $x = \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\Phi(\lambda_k^-)|^{-1}) < \infty. \quad (1.19)$$

Пусть

$$B^-(z; x) = \prod_{k=1}^x \frac{\Phi(\lambda_k^-) - \Phi(z)}{1 - \Phi(\lambda_k^-)\Phi(z)} \frac{|\Phi(\lambda_k^-)|}{\Phi(\lambda_k^-)} \quad (1.20)$$

(при $\lambda_k^- = \infty$, тогда $\Phi(\lambda_k^-) = \infty$, полагаем

$$\frac{\Phi(\lambda_k^-) - \Phi(z)}{1 - \Phi(\lambda_k^-)\Phi(z)} \frac{|\Phi(\lambda_k^-)|}{\Phi(\lambda_k^-)} = \frac{1}{\Phi(z)}). \quad (1.21)$$

Рассуждая как в предыдущем пункте, можем утверждать следующее. Если $\partial\{\lambda_k^-\}_1^\infty$ — совокупность предельных точек последовательности $\{\lambda_k^-\}_1^\infty$, то функция $B^-(z; x)$ голоморфна в G^- , непрерывна в $\overline{G^-}/\partial\{\lambda_k^-\}_1^\infty$, последовательность ее нулей в $\overline{G^-}/\partial\{\lambda_k^-\}_1^\infty$ совпадает с последовательностью $\{\lambda_k^-\}_1^\infty$ и

$$|B^-(z; x)| \leq 1 \quad (z \in G^-), \quad |B^-(z; x)| = 1 \quad (z \in \Gamma \text{ п. в.}). \quad (1.22)$$

Функцию $B^-(z; x)$ будем называть произведением Бляшке для области G^- с нулями $\{\lambda_k^-\}_1^\infty$.

Если $f(z) \in E_p(G^-)$, $f(z) \neq 0$, то через $B_f^-(z)$ будем обозначать произведение Бляшке для области G^- , нули которого совпадают с нулями $f(z)$ в G^- (если $f(z) \neq 0$ в G^- , то будем полагать $B_f^-(z) \equiv 1$). Тогда вновь из свойств пространств Харди и (1.2) сразу вытекает следующий аналог теоремы Γ_1 .

Теорема Г₁. Для всех $p \in (0, \infty)$ справедливы следующие утверждения:

1°. Если $\{\lambda_k\}_1^x \subset G^-$ ($x = \infty$, либо $x = 1, 2, \dots$), то для существования нетривиальной функции $f(z) \in E_p(G^-)$, обращающейся в нуль на последовательности $\{\lambda_k\}_1^x$, необходимо и достаточно, чтобы было $x < \infty$, либо $x = \infty$ и выполнено условие (1.19).

2°. Если $f(z) \in E_p(G^-)$, $f(z) \neq 0$, то функция $g(z) = f(z)/|B_f^-(z)|$ принадлежит $E_p(G^-)$ и

$$\int_{\Gamma} |f(t)|^p |dt| = \int_{\Gamma} |g(t)|^p |dt|. \quad (1.23)$$

§ 2. Дальнейшие свойства классов E_p

2.1. (а) Известно, что функции классов $E_p(G^\pm)$ однозначно определяются по своим граничным функциям (см., напр., [20]. с. 413). Учитывая этот факт, в пространствах $E_p(G^+)$ и $E_p(G^-)$ ($1 \leq p < \infty$) введем норму по формуле

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Gamma} |f(t)|^p |dt| \right)^{1/p}. \quad (2.1)$$

Тогда из известного результата о полноте пространств Харди (см., напр., [22], гл. II) и из определений (1.1) и (1.2) пространств $E_p(G^\pm)$ непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.1. При всех p ($1 \leq p < \infty$) классы $E_p(G^+)$ и $E_p(G^-)$ с нормой (2.1) являются банаховыми пространствами.

Отсюда ясно, что классы $E_2(G^+)$ и $E_2(G^-)$ являются гильбертовыми пространствами со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{\Gamma} f(t) \overline{g(t)} |dt|. \quad (2.2)$$

(б). Теперь обозначим через $\rho(z; \Gamma)$ расстояние от точки $z \in \overline{G}$ до Γ :

$$\rho(z; \Gamma) = \min \{|z - t| : t \in \Gamma\}. \quad (2.3)$$

Лемма 2.2. Пусть $1 \leq p < \infty$. Тогда:

1°. Если $f(z) \in E_p(G^+)$, то

$$|f(z)| \leq \|f\|_p \{2 \pi \rho(z; \Gamma)\}^{-1/p}, \quad z \in G^+. \quad (2.4)$$

2°. Если $f(z) \in E_p(G^-)$, то

$$|f(z)| \leq \|f\|_p \{2 \pi \rho(z; \Gamma) |\Phi(z)|\}^{-1/p}, \quad z \in G^-. \quad (2.5)$$

Доказательство. 1°. Если $f(z) \in E_p(G^+)$ и $f(z) \neq 0$ (случай $f(z) \equiv 0$ тривиален), то в силу теоремы Г₁ функция $g(z) = f(z)/|B_f^+(z)|$ принадлежит классу $E_p(G^+)$, не имеет нулей в области G^+ и $\|g\|_p =$

$= \|f\|_p; \Gamma_p$. Поэтому в силу теоремы А функция $F(z) = [g(z)]^p$ принадлежит классу $E_1(G^+)$, причем $\|F\|_1 = \|g\|_p^p$. Значит в силу теоремы Б

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(t)}{t-z} dt, \quad z \in G^+,$$

и переходя к модулям будем иметь

$$|F(z)| \leq \|F\|_1 |2\pi r(z; \Gamma)|^{-1}, \quad z \in G^+.$$

Возвращаясь к функции $f(z)$, отсюда получим (2.4).

2°. Предположим теперь, что $f(z) \in E_p(G^-)$ и $f(z) \neq 0$. Тогда в силу теоремы Г, функция $g(z) = f(z)/B_{\Gamma}^-(z)$ принадлежит классу $E_p(G^-)$, не имеет нулей в области G^+ и $\|g\|_p = \|f\|_p$. Значит в силу теоремы А $[g(z)]^p \in E_1(G^-)$. С другой стороны, функция $\Phi(z)$ имеет в точке $z = \infty$ простой полюс и удовлетворяет следующим условиям:

$$|\Phi(z)| \gg 1 \quad (z \in G^-), \quad |\Phi(t)| = 1 \quad (t \in \Gamma). \quad (2.6)$$

Поэтому вновь в силу теоремы А $[g(z)]^p/\Phi(z) \in E_1(G^-)$, причем в точке $z = \infty$ эта функция обращается в нуль. Следовательно, в силу теоремы Б

$$\frac{[g(z)]^p}{\Phi(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{[g(t)]^p/\Phi(t)}{t-z} dt, \quad z \in G^-,$$

и поэтому

$$|g(z)|^p/|\Phi(z)| \leq \|g\|_p^p |2\pi r(z; \Gamma)|^{-1}, \quad z \in G^-.$$

Отсюда, переходя к функции $f(z)$, после простых вычислений получим (2.5).

Следствие 2.1. Пусть $1 < p < \infty$ и $\{f_k(z)\}_k^{\infty} \subset E_p(G^+)$ соответственно $\{f_k(z)\}_k^{\infty} \subset E_p(G^-)$. Если эта последовательность сходится по норме $\|\cdot\|_p; \Gamma_p$ к функции $f(t)$, то $f(t)$ является граничной функцией представителя $f(z) \in E_p(G^+)$ (соответственно $f(z) \in E_p(G^-)$), и эта последовательность сходится к $f(z)$ равномерно внутри G^+ (соответственно внутри G^-).

Это утверждение вытекает непосредственно из леммы 2.1 и оценок (2.4) и (2.5), примененных к разности $f_k(z) - f(z)$.

2.2. (а). Пусть $f(t) \in L_1(\Gamma)$. Рассмотрим интегралы типа Коши

$$K^{\pm}(z; f) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad z \in G^+. \quad (2.7)$$

Известно, что почти всюду на Γ существуют некасательные граничные значения $K^+(t; f)$ и $K^-(t; f)$ соответственно внутри G^+ и G^- (см. [23]). Отсюда в силу известных результатов И. И. Привалова (см., напр., [19], с. 183—194) вытекает существование сингулярного интеграла Коши

$$(S_{\Gamma} f)(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi i} \int_{z \in \Gamma, |t-z| > \epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta, \quad t \in \Gamma \text{ п. в.} \quad (2.8)$$

и справедливость формул Сохоцкого—Племеля п. в. на Γ :

$$K^{\pm}(t; f) = (P_{\Gamma}^{\pm} f)(t), \quad \text{где } P_{\Gamma}^{\pm} = \frac{1}{2} (I \pm S_{\Gamma}), \quad (2.9)$$

а I — единичный оператор. Имеет место также следующий важный результат (см. [14]).

Теорема Д. Если $1 < p < \infty$, то оценка

$$\int_{\Gamma} |(S_{\Gamma} f)(t)|^p |dt| \leq C \int_{\Gamma} |f(t)|^p |dt| \quad (2.10)$$

с константой $C (> 0)$, не зависящей от $f(t)$, имеет место тогда и только тогда, когда Γ — карлесоновская кривая.

(6) Докажем две леммы, которыми воспользуемся в дальнейшем.

Лемма 2.3. Пусть $1 < p < \infty$, Γ — карлесоновская кривая и $f(t) \in L_p(\Gamma)$. Тогда $K^{\pm}(z; f) \in E_p(G^{\pm})$ и

$$f(t) = K^+(t; f) + K^-(t; f), \quad t \in \Gamma \text{ п. в.} \quad (2.11)$$

Доказательство. Сначала заметим, что если $g(t) \in L_q(\Gamma)$, где $1/p + 1/q = 1$, то из тождества

$$\int_{\Gamma} \frac{g(t)}{t - \zeta} dt = 0 \quad (\zeta \in G^+ \cup G^-, \zeta \neq \infty)$$

в силу (2.9) вытекает $g(t) = 0, t \in \Gamma$ п. в. Следовательно, в силу теоремы Хана—Банаха система функций

$$\{Q_{\zeta}(t) = (t - \zeta)^{-1} : \zeta \in G^+ \cup G^-, \zeta \neq \infty\} \quad (2.12)$$

полна в пространстве $L_p(\Gamma)$. С другой стороны, опираясь на теорему А, можем утверждать, что

$$\{Q_{\zeta}(z) : \zeta \in G^- \setminus \{\infty\}\} \subset E_p(G^+) \quad \{Q_{\zeta}(z) : \zeta \in G^+\} \subset E_p(G^-), \quad (2.13)$$

и поскольку $Q_{\zeta}(\infty) = 0$, то в силу (1.5) и теоремы Б будем иметь

$$\zeta \in G^- \setminus \{\infty\} \Rightarrow \begin{cases} K^+(z; Q_{\zeta}) = Q_{\zeta}(z), & z \in G^+, \\ K^-(z; Q_{\zeta}) = 0, & z \in G^-; \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\zeta \in G^+ \Rightarrow \begin{cases} K^+(z; Q_{\zeta}) = 0, & z \in G^+, \\ K^-(z; Q_{\zeta}) = Q_{\zeta}(z), & z \in G^-. \end{cases} \quad (2.15)$$

Теперь заметим, что поскольку система (2.12) полна в $L_p(\Gamma)$, то для некоторой последовательности $\{F_k(t)\}_1^{\infty}$ линейных комбинаций функций системы (2.12) выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} |f(t) - F_n(t)|^p |dt| = 0.$$

Отсюда с учетом ограниченности операторов P_{Γ}^{+} и P_{Γ}^{-} в $L_p(\Gamma)$ (это вытекает из теоремы Д и определения (2.9) указанных операторов) получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} |K^{\pm}(t; f) - K^{\pm}(t; F_k)|^p |dt| = 0. \quad (2.16)$$

Но поскольку из (2.13), (2.14) и (2.15) следует, что $K^{\pm}(t, F_k)$ — суть граничные функции представителей из $E_p(G^{\pm})$, то из (2.16) и следствия 2.1 вытекают включения $K^{\pm}(z; f) \in E_p(G^{\pm})$. Равенство (2.11) непосредственно следует из формул Сохоцкого — Племелья (2.9).

Лемма 2.4. Пусть $1 < p < \infty$, Γ — карлесоновская кривая и $f(t) \in L_p(\Gamma)$. Тогда $f(t)$ является граничной функцией представителя из $E_p(G^+)$ (соответственно представителя из $E_p(G^-)$, обращаяющегося в нуль при $z = \infty$) тогда и только тогда, когда

$$\int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt = 0, \quad z \in G^- \text{ (соответственно } z \in G^+). \quad (2.17)$$

Доказательство. Если $f(t)$ — граничная функция представителя класса $E_p(G^+)$ (соответственно представителя класса $E_p(G^-)$, обращаяющегося в нуль при $z = \infty$), то из (1.5) и теоремы Б следует (2.17). Обратно, предположим, что выполнены условия (2.17). Тогда $K^{\mp}(z; f) = 0$, $z \in G^{\mp}$, а в силу леммы 2.3 $K^{\pm}(z; f) \in E_p(G^{\pm})$, причем ясно, что $K^-(\infty, f) = 0$. Поэтому $K^{\pm}(t; f) = f(t)$ почти всюду на Γ (см. 2.11).

(в) В заключение этого параграфа установим вид линейного функционала из пространства $(E_p(G^+))^*$, сопряженного к $E_p(G^+)$.

Лемма 2.5. Пусть $1 < p < \infty$, Γ — карлесоновская кривая. Тогда для любого функционала $F^* \in (E_p(G^+))^*$ существует единственная функция $g^-(z) \in E_q(G^-)$, $g^-(\infty) = 0$ ($1/p + 1/q = 1$) такая, что

$$F^*(f) = \int_{\Gamma} f(t) g^-(t) dt, \quad f(z) \in E_p(G^+). \quad (2.18)$$

При этом справедливы оценки

$$\|F^*\|_{(E_p(G^+))^*} \leq \|g^-\|_q; \quad \|g^-\|_q \leq B \|F^*\|_{(E_p(G^+))^*} \quad (2.19)$$

с константой $B (> 0)$, не зависящей от F^* . Обратно, если $g^- \in E_q(G^-)$, $g^-(\infty) = 0$, то формулой (2.18) задается функционал $F^* \in (E_p(G^+))^*$.

Доказательство. Пусть $E^* \in (E_p(G^+))^*$. Продолжим этот функционал с сохранением нормы на все пространство $L_p(\Gamma)$. Тогда из общего вида ограниченного линейного функционала над $L_p(\Gamma)$ следует существование функции $g(t)$:

$$g(t) \in L_q(\Gamma), \|F^*\|_{(E_p(G^+))^*} = \|g; \Gamma\|_q, \quad (2.20)$$

для которой

$$F^*(f) = \int_{\Gamma} f(t) g(t) dt, f(z) \in E_p(G^+) \quad (2.21)$$

(см. напр., [24], с. 310). Положив

$$g^\pm(z) = K^\pm(z; g), z \in G^\pm,$$

в силу леммы 2.3 будем иметь: $g^\pm(z) \in E_p(G^\pm)$,

$$g(t) = g^+(t) + g^-(t), t \in \Gamma \text{ п. в.}, \quad (2.22)$$

причем $g^-(\infty) = 0$. Кроме того, в силу формул Сохоцкого—Пиемеля (2.9) и теоремы Д верна оценка

$$\|g^-; \Gamma\|_q \leq B \|g; \Gamma\|_q = B \|F^*\|_{(E_p(G^+))^*} \quad (2.23)$$

с константой $B (> 0)$, не зависящей от $g(t)$, а значит, и от F^* . Таким образом, из (2.22) и (2.21) в силу следствия 1.1 вытекает представление (2.18), а из (2.23) — правая из оценок (2.19). Левая из этих оценок — следствие неравенства Гельдера. Заметим также, что опять же в силу неравенства Гельдера справедлива обратная часть леммы.

Нам осталось доказать, что по заданному функционалу $F^* \in (E_p(G^+))^*$ соответствующая функция $g^-(z) \in E_q(G^-)$, удовлетворяющая условию $g^-(\infty) = 0$, определяется однозначно.

Предположим, что $g_0^-(z) \in E_q(G^-)$, $g_0^-(\infty) = 0$ и

$$\int_{\Gamma} f(t) g_0^-(t) dt = 0, \forall f(z) \in E_p(G^+). \quad (2.24)$$

Тогда, поскольку при фиксированном $\zeta \in G^- \setminus \{\infty\}$ функция $Q_\zeta(z) = (z - \zeta)^{-1}$ принадлежит классу $E_p(G^+)$ (см. (2.13)), то из (2.24), в частности, следует тождество

$$\int_{\Gamma} \frac{g_0^-(t)}{t - \zeta} dt = 0, \zeta \in G^-.$$

Отсюда на основании (1.5) и теоремы Б заключаем, что $g_0^-(\zeta) = 0$, $\zeta \in G^-$, а это доказывает единственность представления (2.18).

§ 3. Некоторые свойства функции Фабера—Джрбашяна

3.1. (а) Пусть вновь G^+ — конечная область, ограниченная замкнутой спрямляемой жордановой кривой Γ . Пусть $\{z_n\}_0^\infty \subset G^-$ — произвольная последовательность, $\{M_n^{1/p}(z)\}_0^\infty$ ($1 < p < \infty$) — система функций Фабера—Джрбашяна, порожденная континуумом Γ и последовательностью $\{z_n\}_0^\infty$. Заметим, что функции $M_n^{(1/p)}(z)$ непрерывны в замкнутой области $\bar{G}^+$, и поэтому в силу теоремы А

$$\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^- \in E_p(G^+), \quad 1 < p < \infty. \quad (3.1)$$

Докажем следующее предложение.

Лемма 3.1. Для функции системы $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^-$ ($1 < p < \infty$) имеют место следующие формулы представлений

а) при $z \in G^+$

$$M_n^{(1/p)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi_n[\Phi(t)] |\Phi'(t)|^{1/p}}{t-z} dt \quad (n=0, 1, 2, \dots); \quad (3.2)$$

б) при $z \in G^-$

$$M_n^{(1/p)}(z) - \varphi_n[\Gamma(z)] [\Phi'(z)]^{1/p} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi_n[\Phi(t)] |\Phi'(t)|^{1/p}}{t-z} dt \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (3.3)$$

Доказательство. Сначала заметим, что поскольку $w \equiv \Phi(\psi(w))$, $|w| > 1$, то

$$\Phi'(\psi(w)) \psi'(w) \equiv 1, \quad |w| > 1,$$

и поэтому

$$\Phi'(\psi(w)) \psi(w) \in H_1^-.$$

Значит согласно (1.2) $\Phi'(z) \in E_1(G^-)$, так что согласно теореме А

$$\sup_{j>1} \left\{ \int_{\partial\sigma_j^-} |\Phi'(z)| |dz| \right\} < \infty. \quad (3.4)$$

Теперь обозначим через j_0 первый из номеров j , для которых в области G^-/G_j^- не содержится точек $z = \lambda_k$ ($0 < k \leq n$). Тогда функция $\varphi_n[\Phi(z)]$ будет непрерывна в замкнутой области $\overline{G^-/G_{j_0}^-}$, и в силу (3.4) будет выполнена оценка

$$\sup_{j>j_0} \left\{ \int_{\partial\sigma_j^-} |\varphi_n[\Phi(z)] [\Phi'(z)]^{1/p} |dz| \right\} < \infty. \quad (3.5)$$

Что касается функции $M_n^{(1/p)}(z)$, то она голоморфна в области $\overline{G^-/G_{j_0}^-}$, так что

$$\sup_{j>j_0} \left\{ \int_{\partial\sigma_j^-} |M_n^{(1/p)}(z)|^p |dz| \right\} < \infty. \quad (3.6)$$

С другой стороны, функция

$$F_n^{(1/p)}(z) \equiv \varphi_n[\Phi(z)] [\Phi'(z)]^{1/p} - M_n^{(1/p)}(z) \quad (3.7)$$

голоморфна в области G^- , и поэтому ввиду (1.3)

$$\sup_{1 < j < j_0-1} \left\{ \int_{\partial\sigma_j^-} |F_n^{(1/p)}(z)|^p |dz| \right\} < \infty.$$

Сопоставив эту оценку с (3.5) и (3.6), будем иметь

$$\sup_{j > 1} \left\{ \int_{\sigma_j^-} |F_n^{(1/p)}(z)|^p |dz| \right\} < \infty.$$

Следовательно, в силу теоремы А

$$\{F_n^{(1/p)}(z) = \varphi_n[\Phi(z)][\Phi'(z)]^{1/p} - M_n^{(1/p)}(z)\}_0^{\infty} \subset E_p(G^-), \quad (3.8)$$

причем нетрудно убедиться, что

$$F_n^{(1/p)}(\infty) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.9)$$

Отсюда на основании (1.5) и теоремы Б получаем при $z \in G^-$

$$\begin{aligned} &M_n^{(1/p)}(z) - \varphi_n[\Phi(z)][\Phi'(z)]^{1/p} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi_n[\Phi(t)][\Phi'(t)]^{1/p} - M_n^{(1/p)}(t)}{t-z} dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (3.10)$$

а при $z \in G^+$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{M_n^{(1/p)}(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi_n[\Phi(t)][\Phi'(t)]^{1/p}}{t-z} dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.11)$$

Кроме того, ввиду (3.1) из теоремы Б вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{M_n^{(1/p)}(t)}{t-z} dt = \begin{cases} M_n^{(1/p)}(z), & z \in G^+, \\ 0, & z \in G^-, \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.12)$$

Наконец, сопоставив (3.11) и (3.12), приходим к представлению (3.2), а из (3.10) и (3.12) следует представление (3.3). Лемма доказана.

Отметим, что в работе М. М. Джрбашяна [3] другим способом были установлены представления вида (3.2) и (3.3) для функций системы $\{M_n^{(s)}(z)\}_0^{\infty}$ ($0 < s \leq 1$) при следующем условии:

$$\int_{\Gamma} |\Phi'(z)|^s |dz| < \infty. \quad (3.13)$$

(б) Перейдем к вопросу разложения функций системы $\{M_n^{(s)}(z)\}_0^{\infty}$ ($0 \leq s \leq 1$) в сумму простых дробей. С этой целью введем необходимые обозначения.

Пусть $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{k(n)}$ — отличные друг от друга числа из которых составлена последовательность $\{z_k\}_0^{\infty}$. При этом, если последовательность $\{z_k\}_0^{\infty}$ содержит ∞ , то условимся полагать $\zeta_0 = \infty$. Обозначим через $k_j(n)$ ($1 \leq k_j(n) \leq n+1$) — кратность появления числа ζ_j в последовательности $\{z_k\}_0^{\infty}$.

Теперь заметим, что при $\zeta_j \neq \infty$ функция

$$G_n^{(s)}(z) = \varphi_n[\Phi(z)][\Phi'(z)]^s \quad (3.14)$$

имеет в точке $z = \zeta_j$ полюс кратности $k_j(n)$, а при $\zeta_0 = \infty$ эта функция имеет в бесконечно удаленной точке полюс кратности $k_0(n) - 1$. Поэтому можем утверждать следующее:

1) если $\zeta_j \neq \infty$, то в некоторой окрестности $|z - \zeta_j| < \eta_j$ ($0 < \eta_j < \infty$) точки $z = \zeta_j$ справедливо представление

$$G_n^{(s)}(z) = \sum_{r=1}^{k_j(n)} \frac{C_r^{(s)}(n; j)}{(z - \zeta_j)^r} + g_{n, j, s}(z), \quad (3.15)$$

где функция $g_{n, j, s}(z)$ голоморфна при $|z - \zeta_j| < \eta_j$, а $C_r^{(s)}(n, j)$ — комплексные числа, определяемые из равенств

$$C_r^{(s)}(n, j) = \frac{1}{(k_j(n) - r)!} \frac{d^{k_j(n) - r}}{dz^{k_j(n) - r}} \left\{ (z - \zeta_j)^{k_j(n)} G_n^{(s)}(z) \right\}_{z = \zeta_j}, \quad (3.16)$$

причем

$$C_r^{(s)}(n; j) \neq 0 \text{ при } r = k_j(n); \quad (3.17)$$

2) если $\zeta_0 = \infty$, то в некоторой окрестности $|z| > \eta$ ($0 < \eta < \infty$) бесконечно удаленной точки справедливо представление

$$G_n^{(s)}(z) = \sum_{r=0}^{k_0(n) - 1} d_r^{(s)}(n) + g_{n, s}(z), \quad (3.18)$$

где функция $g_{n, s}(z)$ голоморфна при $|z| > \eta$, $g_{n, s}(\infty) = 0$, а $d_r^{(s)}(n)$ — комплексные числа, определяемые из равенств

$$d_r^{(s)}(n) = \frac{1}{(k_0(n) - r - 1)!} \frac{d^{k_0(n) - r - 1}}{dw^{k_0(n) - r - 1}} \left\{ w^{k_0(n) - 1} G_n^{(s)}\left(\frac{1}{w}\right) \right\}_{w=0}, \quad (3.19)$$

причем

$$d_r^{(s)}(n) \neq 0 \text{ при } r = k_0(n) - 1. \quad (3.20)$$

Из сказанного на основании определения функции $M_n^{(s)}(z)$ получаем следующее предложение.

Лемма 3.2. При всех значениях параметра s ($0 \leq s \leq 1$) справедливы следующие утверждения:

1°. Если все z_k ($0 < k \leq n$) конечны, то

$$M_n^{(s)}(z) = \sum_{j=0}^{k_0(n)} \sum_{r=1}^{k_j(n)} \frac{C_r^{(s)}(n; j)}{(z - \zeta_j)^r}. \quad (3.21)$$

2°. Если среди членов последовательности $\{z_k\}_0^n$ есть бесконечно удаленная точка, то

$$M_n^{(s)}(z) = \sum_{r=0}^{k_0(n) - 1} d_r^{(s)}(n) z^r + \sum_{j=1}^{k_0(n)} \sum_{r=1}^{k_j(n)} \frac{C_r^{(s)}(n; j)}{(z - \zeta_j)^r}, \quad (3.22)$$

При этом участвующие в представлениях (3.21) и (3.22) коэффициенты определяются из равенств (3.16) и (3.19) и справедливы соотношения (3.17) и (3.20).

Опираясь на представления (3.21), (3.22) и рассуждения по индукции, приходим к следующему утверждению, которое нам понадобится в дальнейшем.

Следствие 3.1. Пусть $0 \leq s \leq 1$ и $g(t) \in L_1(\Gamma)$, а m_n — кратность появления числа z_n в последовательности $\{z_n\}_0^\infty$. Тогда для выполнения равенств

$$\int_{\Gamma} g(t) M_n^{(s)}(t) dt = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.23)$$

необходимо и достаточно, чтобы одновременно имели место равенства

$$\int_{\Gamma} \frac{g(t)}{(t-z_n)^r} dt = 0 \quad (\text{при } z_n \neq \infty; r = 1, \dots, m_n), \quad (3.24)$$

$$\int_{\Gamma} g(t) t^r dt = 0 \quad (r = 0, \dots, m_n - 1), \quad (3.25)$$

если ∞ входит в $\{z_n\}_0^\infty$ и кратностью $m_n \geq 1$.

3.2. Теперь рассмотрим вопрос о минимальности системы $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ в $E_p(G^+)$. Но сначала напомним, что если X — банахово пространство, а X^* — его сопряженное пространство, то системы $\{x_n\}_0^\infty \subset X$ и $\{x_n^*\}_0^\infty \subset X^*$ называются биортонормированными, если

$$x_n^*(x_m) = \delta_{nm} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots).$$

При этом система $\{x_n^*\}_0^\infty$ называется биортогональным дополнением системы $\{x_n\}_0^\infty$. Система $\{x_n\}_0^\infty$ называется минимальной в X , если ни один элемент x_n нельзя аппроксимировать в топологии X линейными комбинациями остальных элементов системы. Как известно, система $\{x_n\}_0^\infty$ имеет хотя бы одно биортогональное дополнение тогда и только тогда, когда она минимальна (см., напр., [25]).

Теперь рассмотрим систему функции $\{\chi_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$, $1 < p < \infty$, где

$$\chi_n^{(1/p)}(z) = \bar{\varphi}_n([\Phi(z)]^{-1}) [\Phi(z)]^{-1} [\Phi'(z)]^{1/q}, \quad z \in G^- \quad (3.26)$$

(полагаем $1/p + 1/q = 1$, $\bar{\varphi}_n(w) = \overline{\varphi_n(\bar{w})}$) и докажем следующую лемму.

Лемма 3.3. При всех p ($1 < p < \infty$)

$$\{\chi_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty \in E_p(G^-), \quad \chi_n^{(1/p)}(\infty) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.27)$$

и системы функций $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ и $\{\chi_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ биортогональны на Γ в следующем смысле:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} M_n^{(1/p)}(t) \chi_m^{(1/p)}(t) dt = \delta_{nm} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.28)$$

Доказательство. В процессе доказательства леммы 3.1 мы убедились в принадлежности $\Phi'(z)$ классу $E_1(G^-)$, откуда следует включение $[\Phi'(z)]^{1/q} \in E_q(G^-)$. Отсюда и из того, что функция

$$\bar{\varphi}_n([\Phi(z)]^{-1}) [\Phi(z)]^{-1}$$

голоморфна и ограничена в G^- и в точке $z = \infty$ обращается в нуль вытекает (3.27).

Далее, из (3.8), (3.9) и (3.27) с учетом теоремы А получаем, что функция $F_n^{(1/p)}(z) \chi_m^{(1/p)}(z)$ принадлежит классу $E_1(G^-)$ и имеет в точке $z = \infty$ нуль, по крайней мере, второго порядка. Поэтому в силу леммы 1.1 справедливы равенства

$$\int_{\Gamma} F_n^{(1/p)}(t) \chi_m(t) dt = 0 \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots)$$

или, что то же самое

$$\int_{\Gamma} \left\{ M_n^{(1/p)}(t) - \varphi_n[\Phi][\Phi'(t)]^{1/p} \right\} \chi_m^{(1/p)}(t) dt = 0 \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.29)$$

С другой стороны, имеем: $\Phi(t) = e^{i\theta}$ и $[\Phi(t)]^{-1} \equiv \overline{\Phi(t)}$ на Γ , и поэтому в силу (0.2)

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \varphi_n[\Phi(t)][\Phi'(t)]^{1/p} \chi_m^{(1/p)}(t) dt = \\ & = \int_{\Gamma} \varphi_n[\Phi(t)] \overline{\varphi_m[\Phi(t)]} [\Phi'(t)/\Phi(t)] dt = \\ & = \int_{|w|=1} \varphi_n(w) \overline{\varphi_m(w)} |dw| = 2\pi i \delta_{nm} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.29) вытекает (3.28). Лемма доказана.

Учитывая (3.1), на основании леммы 3.3 и леммы 2.5 можем утверждать следующее:

При всех значениях p ($1 < p < \infty$) система функций $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^{\infty}$ минимальна в пространстве $E_p(G^+)$.

§ 4. О замыкании системы функций Шабера—Джрбашяна

1.1. (а) Пусть, как и раньше, $\{z_n\}_0^{\infty} \subset G^-$ — произвольная последовательность. При условии

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\Phi(z_n)|^{-1}) < \infty \quad (4.1)$$

обозначим через $B^-(z)$ — произведение Бляшке для области G^- с нулями $\{z_n\}_0^{\infty}$ (см. п. 1.3 (б)):

$$B^-(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi(z_n) - \Phi(z)}{1 - \Phi(z_n)\Phi(z)} \frac{|\Phi(z_n)|}{\Phi(z_n)} \quad (4.2)$$

(при $z_n = \infty$), тогда $\Phi(z_n) = \infty$, полагаем

$$\frac{\Phi(z_n) - \Phi(z)}{1 - \overline{\Phi(z_n)}\Phi(z)} \frac{|\Phi(z_n)|}{\Phi(z_n)} \equiv \frac{1}{\Phi(z)}. \quad (4.3)$$

Рассмотрим один подкласс класса $E_p(G^+)$.

Если выполнено условие (4.1) и $1 < p < \infty$, то через $E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$ обозначим класс функций $f(z)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$1) f(z) \in E_p(G^+); 2) \int_{\Gamma} \frac{f(t) B^-(t)}{t-z} dt = 0, z \in G^+. \quad (4.4)$$

Нетрудно убедиться, что в силу леммы 2.1 и равенства $B^-(t) = 1, t \in \Gamma$ п. в., $E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$ является замкнутым подпространством пространства $E_p(G^+)$. Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1. Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено условие (4.1). Тогда класс $E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$ с нормой $|\cdot|_p$ является банаховым пространством, а при $p = 2$ класс $E_2(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$ со скалярным произведением (2.2) является гильбертовым пространством.

б) С последовательностью $\{z_n\}_0^\infty$ ассоциируем систему функций Фабера—Джрбашяна $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ и убедимся в справедливости следующего утверждения.

Лемма 4.2. Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено условие (4.1). Тогда

$$\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty \subset E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty). \quad (4.5)$$

Доказательство. Если число $z = z_n (z_n \neq \infty)$ входит в последовательность $\{z_n\}_0^\infty$ с кратностью m_n , то в этой точке функция $B^-(z)$ имеет нуль кратности m_n , а функция $M_n^{(1/p)}(z)$ — полюс кратности $\leq m_n$. С другой стороны, если ∞ входит в последовательность $\{z_n\}_0^\infty$ с кратностью $m_\infty \geq 1$ (в силу (4.1) $m_\infty < \infty$), то функция $B^-(z)$ имеет в точке $z = \infty$ нуль кратности m_∞ (см. 4.4), а функция $M_n^{(1/p)}(z)$ — полюс кратности $(k_0(n) - 1 < m_\infty)$ (см. лемму 3.2). Следовательно, функция $M_n^{(1/p)}(z) B^-(z)$ голоморфна в области G^- и обращается в нуль в точке $z = \infty$. Кроме того, в силу леммы 3.2 и оценки $|B^-(z)| \leq 1, z \in G^-$, функция $M_n^{(1/p)}(z) B^-(z)$ ограничена в области G^- . Значит в силу теоремы А будем иметь

$$\{M_n^{(1/p)}(z) B^-(z)\}_0^\infty \subset E_p(G^-), M_n^{(1/p)}(\infty) B^-(\infty) = 0 (n \geq 0).$$

Отсюда на основании (1.5) и теоремы Б заключаем, что при любом $n (n = 0, 1, 2, \dots)$ справедливо тождество

$$\int_{\Gamma} \frac{M_n^{(1/p)}(t) B^-(t)}{t-z} dt = 0, z \in G^+.$$

Учитывая также включение (3.1), получаем требуемое утверждение (4.5).

4.2. Напомним, что

$$\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty \subset E_p(G^+), 1 < p < \infty \quad (4.6)$$

(см. (3.1)), и перейдем к вопросу описания замыкания линейной оболочки (кратко: замыкания) системы $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ при аппроксимации в топологии пространства $E_p(G^+)$.

Теорема 4.1. Пусть $1 < p < \infty$, Γ — карлесоновская кривая и $\{z_n\}_0^\infty \subset G^-$ — произвольная последовательность. Тогда

1°. Для полноты системы $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ в пространстве $E_p(G^+)$ необходимо и достаточно выполнения условия

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\Phi(z_n)|^{-1}) = \infty. \quad (4.7)$$

2°. Если система $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ не полна в пространстве $E_p(G^+)$, т. е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\Phi(z_n)|^{-1}) < \infty, \quad (4.1)$$

то ее замыкание в $E_p(G^+)$ совпадает с пространством $E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$.

Доказательство. Сначала предположим, что выполнено условие (4.1). Вспомним включение (4.5) и докажем, что тогда система $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ полна в пространстве $E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$. В силу теоремы Хана—Банаха для этого достаточно доказать, что если f^* — ограниченный линейный функционал, заданный на пространстве $E_p(G^+)$ и обращающийся в нуль на системе $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$, то f^* обращается в нуль на всех функциях пространства $E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$.

Пусть $1/p + 1/q = 1$ и $g^-(z) \in E_q(G^-)$, $g^-(\infty) = 0$ — функция, порождающая функционал f^* (см. лемму 2.5). Тогда равенства

$$f^*(M_n^{(1/p)}(z)) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.8)$$

можно переписать следующим образом:

$$\int_{\Gamma} M_n^{(1/p)}(t) g^-(t) dt = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.9)$$

С учетом (1.5) отсюда на основании следствия 3.1 теоремы Б и леммы 1.1 заключаем, что функции $g^-(z)$ обращаются в нуль на последовательности $\{z_n\}_0^\infty$. При этом, если ∞ входит в последовательность $\{z_n\}_0^\infty$ с кратностью m_n , то функция $g^-(z)$ имеет в точке $z = \infty$ нуль кратности $\geq m_n - 1$. Поэтому в силу теоремы Γ_2 функция $g^-(z)/B^-(z)$ принадлежит классу $E_q(G^-)$ и обращается в нуль в точке $z = \infty$. С другой стороны, если $f(z) \in E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$, то в силу леммы 2.4 $f(t)B^-(t)$ является граничной функцией представителя класса $E_p(G^-)$, обращающегося в нуль в точке $z = \infty$. Следовательно, произведение

$$f(t)g^-(t) = [f(t)B^-(t)]g^-(t)/B^-(t), \quad t \in \Gamma \text{ п. в.},$$

является граничной функцией представителя класса $E_1(G^-)$, имеющего в точке $z = \infty$ нуль, по крайней мере, второго порядка. Поэтому в силу леммы 2.4 будем иметь

$$F^*(f) = \int_{\Gamma} f(t) g^-(t) dt = 0, \quad \forall f(z) \in E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty),$$

так что при условии (4.1) система $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ полна в пространстве $E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$.

Далее, заметим, что при условии (4.1) функция $f_0(z) = (z - \zeta_0)^{-1}$, $\zeta_0 \in G^- / \{z_n\}_0^\infty$, принадлежит пространству $E_p(G^+)$ но не принадлежит $E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$. Следовательно, условие (4.7) необходимо для полноты системы $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ в пространстве $E_p(G^+)$.

Наконец, предположим, что выполнено условие (4.7). Пусть функционал $F^* \in (E_p(G^+))^*$ обращается в нуль на функциях системы $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$, а $g^-(z) \in E_1(G^-)$, $g^-(\infty) = 0$ — функция, порождающая функционал F^* согласно лемме 2.5. Тогда в силу следствия 3.1, теоремы Б и леммы 1.1 функция $g^-(z)$ обращается в нуль на последовательности $\{z_n\}_0^\infty$. Отсюда на основании теоремы Г, заключаем, что $g^-(z) \equiv 0$, $z \in G^-$, и поэтому F^* — тривиальный функционал. Следовательно, в силу теоремы Хаана—Банаха при условии (4.7) система $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ полна в пространстве $E_p(G^+)$.

4.3. Предположим теперь, что $1 < p < \infty$ и последовательность $\{z_n\}_0^\infty$ удовлетворяет условию (4.1). Пусть $f(z) \in E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$. Тогда функция $f(z)$ принадлежит пространству $E_p(G^+)$, поэтому она голоморфна в области G^+ . Кроме того, $f(z)$ имеет некасательные граничные значения (изнутри G^+) $f(t)$ почти всюду на Γ ; это будем записывать так:

$$G^+ \ni z \xrightarrow[\leftarrow]{\text{lim}} t f(z) = f(t), \quad t \in \Gamma \text{ п. в.}$$

С другой стороны, в силу второго из условий (4.4) и леммы 2.4 $g(t) = f(t) B^-(t)$, $t \in \Gamma$ п. в. — это граничная функция представителя $g(z)$ класса $E_p(G^-)$, причем $g(\infty) = 0$. Поэтому

$$G^- \ni z \xrightarrow[\rightarrow]{\text{lim}} t g(z) = f(t) B^-(t), \quad t \in \Gamma \text{ п. в.},$$

и поскольку $|B^-(t)| = 1$, $t \in \Gamma$ п. в., то

$$G^- \ni z \xrightarrow[\leftarrow]{\text{lim}} t \{g(z) / B^-(z)\} = f(t), \quad t \in \Gamma \text{ п. в.},$$

причем очевидно, что функция $g(z) / B^-(z)$ голоморфна в G^- . Таким образом, каждая функция $f(z) \in E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$ принадлежит классу $E_p(G^+)$, допускает мероморфное псевдопродолжение $f(z)$ в область G^- в том смысле, что

$$G^+ \ni z \xrightarrow{\text{lim}} t f(z) = f(t) = G^- \ni z \xrightarrow{\text{lim}} t f(z), t \in \Gamma \text{ п. в.}, \quad (4.10)$$

причем функция $f(z) B^-(z)$, $z \in G^-$, принадлежит классу $E_p(G^-)$ и обращается в нуль при $z = \infty$. Легко видеть, что, наоборот, если функция $f(z)$ удовлетворяет указанным условиям, то она принадлежит классу $E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$ (см. (1.5) и теорему Б). Следовательно, можно дать следующее эквивалентное определение класса $E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$.

Определение 4.1. Пусть $1 < p < \infty$ и Γ — карлесоновская кривая, последовательность $\{z_n\}_0^\infty \subset G^-$ удовлетворяет условию (4.1). Тогда $E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$ — это класс функций $f(z)$, определенных на множестве $\overline{C}/A(f)$, где $A(f) \subset \Gamma$ — зависящее от $f(z)$ множество нулевой лебеговой меры, и удовлетворяющих следующим условиям:

- а) $f(z) \in E_p(G^+)$; б) $f(z) B^-(z) \in E_p(G^-)$ и $f(\infty) B^-(\infty) = 0$;
в) выполняются соотношения (4.10).

Отметим, что такие классы функций рассматривались впервые в работах [1—4].

Лемма 4.3. Пусть $1 < p < \infty$, Γ — карлесоновская кривая и последовательность $\{z_n\}_0^\infty \subset G^-$ удовлетворяет условию (4.1). Пусть $\Delta \subset \overline{G^-}$ — замыкание множества точек последовательности $\{z_n\}_0^\infty$. Тогда

1°. Каждая функция $f(z) \in E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$ допускает аналитическое продолжение в область $\overline{C}/\Delta$.

2°. Если последовательность $\{f_k(z)\}_1^\infty \subset E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$ сходится по норме $|\cdot|; \Gamma|_p$, то она сходится равномерно на любом компакте $K \subset \overline{C}/\Delta$.

Доказательство этого предложения опускаем, так как оно аналогично доказательству теоремы 3.4 из работы [26].

§ 5. Базисные разложения в ряды по системам Фабера — Джрбашяна

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 5.1. Пусть $1 < p < \infty$, Γ — карлесоновская кривая и $\{z_n\}_0^\infty \subset G^-$ — произвольная последовательность. Тогда:

1°. При условии

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\Phi(z_n)|^{-1}) = \infty \quad (5.1)$$

система функций $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ является базисом (при $p = 2$ — базисом Рисса) пространства $E_p(G^+)$, и любая функция $f(z) \in E_p(G^+)$ разлагается в ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) M_n^{(1/p)}(z) \quad (5.2)$$

$$\left(c_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(t) \chi_n^{(1/p)}(t) dt \right),$$

сходящийся (при $p=2$ безусловно) к $f(z)$ по норме $\|\cdot\|_p$; $\Gamma|_p$ и равномерно на любом компакте $K \subset G^+$.

2°. При условии

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\Phi(z_n)|^{-1}) < \infty \tag{5.3}$$

система функций $M_n^{(1/p)}(z)|_0^{\infty}$ является базисом (при $p=2$ — базисом Рисса) пространства $E_p(G^+; \{z_n\}_0^{\infty})$, и любая функция $f(z) \in E_p(G^+; \{z_n\}_0^{\infty})$ разлагается в ряд (5.2), $\sum$ сходящийся (при $p=2$ безусловно) к $f(z)$ по норме $\|\cdot\|_p$; $\Gamma|_p$ и равномерно на любом компакте $K \subset \overline{G}/\Lambda$, где Λ — замыкание множества точек последовательности $\{z_n\}_0^{\infty}$.

Доказательство. С каждой функцией $g(t) \in L_p(\Gamma)$ ассоциируем ряд

$$g(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n(g) M_n^{(1/p)}(t) \left(c_n(g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(t) \chi_n^{(1/p)}(t) dt \right) \tag{5.4}$$

и определим последовательности линейных операторов $\{S_k(z; g)\}_0^{\infty}$, положив

$$S_k(z; g) = \sum_{n=0}^k c_n(g) M_n^{(1/p)}(z). \tag{5.5}$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 5.1. Пусть $1 < p < \infty$ и Γ — карлесоновская кривая. Тогда для любой функции $g(t) \in L_p(\Gamma)$ справедливы оценки

$$\|S_k(t; g); \Gamma\|_p < B \|g; \Gamma\|_p \quad (k=0, 1, 2, \dots), \tag{5.6}$$

где константа $B (> 0)$ не зависит от k и $g(t)$.

Доказательство. Положим

$$F(w) = g[\psi(w)] [\psi'(w)]^{1/p}, \quad |w| = 1, \tag{5.7}$$

и заметим, что

$$\int_{|w|=1} |F(w)|^p |dw| = \|g; \Gamma\|_p^p. \tag{5.8}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} c_n(g) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(t) \overline{\varphi_n([\Phi(t)])} [\Phi'(t)]^{-1/p} [\Phi(t)]^{-1} \Phi'(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} F(w) \overline{\varphi_n(w)} w^{-1} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{|w|=1} F(w) \overline{\varphi_n(w)} |dw|, \end{aligned}$$

то есть

$$c_n(g) = c_n^*(F), \quad \text{где } c_n^*(F) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} F(w) \overline{\varphi_n(w)} |dw|. \tag{5.9}$$

Таким образом, в силу леммы 3.1

$$S_k(z; g) = \frac{1}{2\pi i} \int \left\{ \sum_{n=0}^k c_n^*(F) \varphi_n[\Phi(t)] [\Phi'(t)]^{1/p} \right\} \frac{dt}{t-z}, \quad z \in G^+. \quad (5.10)$$

Отсюда на основании леммы 2.3 и теоремы Д заключаем, что

$$\|S_k(t; g): \Gamma|_p < A \left\| \sum_{n=0}^k c_n^*(F) \varphi_n[\Phi(t)] [\Phi'(t)]^{1/p}; \Gamma \right\|_p, \quad (5.11)$$

где константа $A (> 0)$ не зависит от k и $g(t)$. Однако

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{n=0}^k c_n^*(F) \varphi_n[\Phi(t)] [\Phi'(t)]^{1/p}; \Gamma \right\|_p^p = \\ & = \int_{|\omega|=1} \left| \sum_{n=0}^k c_n^*(F) \varphi_n(\omega) \right|^p |d\omega|, \end{aligned}$$

поэтому (5.11) можно переписать в виде

$$\|S_k(t; g): \Gamma|_p < A \left\{ \int_{|\omega|=1} |S_k^*(\omega; F)|^p |d\omega| \right\}^{1/p}, \quad (5.12)$$

где

$$S_k^*(\omega; F) = \sum_{n=0}^k c_n^*(F) \varphi_n(\omega). \quad (5.13)$$

Теперь воспользуемся следующей формулой М. М. Джрбашяна [3] для представления ядра Коши: для любых значений ω и z

$$\frac{1}{1-\bar{\omega}z} = \sum_{n=0}^k \overline{\varphi_n(\omega)} \varphi_n(z) + \frac{B_{k+1}(\bar{\omega}) B_{k+1}(z)}{1-\bar{\omega}z} \quad (k \geq 0), \quad (5.14)$$

где

$$B_{k+1}(z) = \prod_{n=0}^k \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \frac{|a_n|}{a_n}. \quad (5.15)$$

Положив $z_n = 1/\overline{\Phi(z_n)}$, из (5.14) получим при $|z| < 1$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\omega|=1} \frac{F(\omega)}{1-\bar{\omega}z} |d\omega| = S_k^*(z; F) + \frac{B_{k+1}(z)}{2\pi} \int_{|\omega|=1} \frac{F(\omega) \overline{B_{k+1}(\omega)}}{1-\bar{\omega}z} |d\omega|.$$

Отсюда в силу известного результата М. Рисса о проектировании из $L_p(|\omega|=1)$ в H_p^+ (см., напр., [22], с. 117) приходим к оценке

$$\int_{|\omega|=1} |S_k^*(\omega; F)|^p |d\omega| \leq c \int_{|\omega|=1} |F(\omega)|^p |d\omega|, \quad (5.16)$$

где константа $c (> 0)$ не зависит от k и $F(\omega)$. Наконец, из (5.8), (5.12) и (5.16) вытекает (5.6).

Нам понадобится еще одна лемма.

Лемма 5.2. Пусть Γ — карлесоновская кривая. Если $\mu_0, \dots, \mu_k$ ($k \geq 0$) — произвольные комплексные числа и

$$Q_k(z) = \sum_{n=0}^k \mu_n M_n^{(1/2)}(z), \quad (5.17)$$

то имеют место оценки

$$2\pi \sum_{n=0}^k |\mu_n|^2 < |Q_k; \Gamma|_2^2 < B \sum_{n=0}^k |\mu_n|^2, \quad (5.18)$$

где константа $B (> 0)$ не зависит от $\mu_0, \dots, \mu_k$.

Доказательство. Положим

$$P_n(w) = Q_k[\psi(w)] [\psi'(w)]^{1/2}, \quad |w| = 1, \quad (5.19)$$

и заметим, что в силу (5.7)–(5.9) будем иметь

$$\int_{|w|=1} |P_k(w)|^2 |dw| = |Q_k; \Gamma|_2^2, \quad (5.20)$$

$$\mu_n = c_n^*(P_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{|w|=1} P_k(w) \overline{\varphi_n(w)} |dw| \quad (n = 0, \dots, k). \quad (5.21)$$

Однако из ортонормированности системы $\{\varphi_n(w)\}_0^\infty$ (см. (0.2)) и неравенства Бесселя следует, что

$$\sum_{n=0}^k |c_n^*(P_k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|w|=1} |P_k(w)|^2 |dw|,$$

откуда на основании (5.20) и (5.21) получаем первую из оценок (5.18). Далее заметим, что ввиду (5.5), (5.13), (5.21) и леммы 3.3

$$S_k(z; Q_k) = Q_k(z), \quad S_k^*(w; P_k) = \sum_{n=0}^k \mu_n \varphi_n(w), \quad (5.22)$$

а поскольку в силу равенства Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|w|=1} |P_k(w)|^2 |dw| = \sum_{n=0}^k |\mu_n|^2,$$

то в рассматриваемом случае из (5.12) и (5.16) получаем

$$|S_k(t; Q_k); \Gamma|_2 \leq B \sum_{n=0}^k |\mu_n|.$$

Отсюда и из (5.22) вытекает вторая из оценок (5.18). Лемма доказана.

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 5.1. Имеем:

а) в силу теоремы 4.1 и леммы 3.3 при условии (5.1) система $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ полна и минимальна в пространстве $E_p(G^+)$, а при условии (5.3) эта система полна и минимальна в пространстве $E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$; б) в силу леммы 5.1 как при условии (5.1), так и при условии (5.3) выполняются оценки (5.6). Отсюда на основании известного результата о базисах и банаховых пространствах (см., напр., [25], с. 19) заключаем, что при условии (5.1) система $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ является базисом пространства $E_p(G^+)$, а при условии (5.3) эта система является базисом пространства $E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$.

С другой стороны, при $p = 2$ имеем следующее: а) при условии (5.1) система $\{M_n^{(1/2)}(z)\}_0^\infty$ полна в гильбертовом пространстве $E_2(G^+)$, а при условии (5.3) эта система полна в гильбертовом пространстве $E_2(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$; б) в силу леммы 5.2 как при условии (5.1), так и при условии (5.3) имеют место оценки (5.18). Отсюда на основании другого известного результата — о базисах Рисса в гильбертовых пространствах (см., напр., [27], с. 374) — получаем соответствующие утверждения о базисных свойствах системы $\{M_n^{(1/2)}(z)\}_0^\infty$.

Из вышедоказанного и леммы 3.3 следует, что при условии (5.1) любая функция $f(z) \in E_p(G^+)$, а при условии (5.3) — любая функция $f(z) \in E_p(G^+; \{z_n\}_0^\infty)$ разлагается в ряд (5.2), сходящийся (при $p = 2$ безусловно) к $f(z)$ по норме $\|\cdot\|_p$. Наконец, отсюда и из следствия (2.1) и леммы 4.3 вытекают утверждения о природе сходимости ряда (5.2) соответственно на компактах $K \subset G^+$ (при условии (5.1)) и на компактах $K \subset \bar{C}/\Lambda$ (при условии (5.3)).

Институт математики
АН Армении

Поступила 12.XII.1991

Կ. Հ. Ղազարյան, Վ. Մ. Մարտրոսյան. Յարբեր-Ջրբաշյանի ռացիոնալ ֆունկցիաների համակարգերի բազիսայնության հարցերը Վ. Ի. Սմիռնովի տարածություններում և դրանց ենթատարածություններում (ամփոփում)

Հիմնական արդյունքը կայանում է նրանում, որ եթե Γ -ն ժորդանյան կարևորման կոր է $1 < p < \infty$, ապա Յարբեր-Ջրբաշյանի $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ ռացիոնալ ֆունկցիաների համակարգը հանդիսանում է բազիս ($p=2$ դեպքում Ռիսի բազիս) իր փակույթում $L_p(\Gamma)$ մետրիկայում

K. H. KAZARIAN, V. M. MARTIROSIAN. *The problems of basistty of the Faber-Djrbashian's rational functions systems in the V. I. Smirnov spaces and their subspaces (summary)*

The main result is that if Γ is the jordan's and carleson's curve and if $1 < p < \infty$, the Faber-Djrbashian's system of rational functions $\{M_n^{(1/p)}(z)\}_0^\infty$ is the basis (when $p=2$ the Riesz basis) in his closure in $L_p(\Gamma)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. М. Джрбашян. О разложимости аналитических функций в ряд по рациональным функциям с заданным множеством полюсов. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 1957, 10, 21—29.
2. М. М. Джрбашян. Разложение по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, ДАН СССР, 1962, 143, 17—20.
3. М. М. Джрбашян. Разложения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН АрмССР, Математика, 1967, 2, 3—51.
4. Г. Ц. Тумаркин. Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 1961, 14, 9—31.
5. Г. Ц. Тумаркин. Приближение аналитических в односвязной области функций, представимых интегралом типа Коши, последовательностями рациональных дробей с полюсами заданной таблицей, Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 1989, 170, вып. 17, 254—273.

6. Г. С. Кочарян. Об одном обобщении рядов Лорана и Фурье, Изв. АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 1958, 11, 3—14.
7. Г. С. Кочарян. О приближении рациональными функциями в комплексной области, Изв. АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 1958, 11, 53—77.
8. А. М. Лукацкий. О разложении в ряды по системе рациональных функций, М. М. Джрбашяна, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 1973, 8, 102—122.
9. А. М. Лукацкий. О системе рациональных функций М. М. Джрбашяна для произвольного континуума, Сиб. матем. ж., 1974, 15, 208—221.
10. П. К. Суетин. Ряды по многочленам Фабера, М., Наука, 1984.
11. T. Takenaka. On the orthogonal functions and a new formula of interpolation, Japanese Journal of Math, 1925, 2, 129—145.
12. E. Malmquist. Sur la détermination d'une classe de fonctions analytiques par leurs valeurs dans un ensemble donné de points, Comptes rendus du sixième congrès des mathématiciens Scandinaves, Kopenhagen, 1925, 253—259.
13. Дж. Уолш. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области М., ИИЛ, 1961.
14. G. David. L'intégrale de Cauchy sur les courbes rectifiables, Prepublications Univ Paris—Sud., Dept. Math., 1982, 82105, 21 pp.
15. Г. М. Айрапетян. О базисе рациональных функций в подпространствах классов E_p ($1 < p < \infty$), Изв. АН Арм.ССР, Математика, 1974, 9, № 2, 171—184.
16. V. Smirnov. Sur la théorie des polynômes orthogonaux à une variable complexe, Journal de la Société Phys—Math. de Leningrad, 1928, 2, 155—179.
17. V. Smirnov. Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problèmes qui s'y rattachent, Изв. АН СССР, 1932, 7, 337—372.
18. М. В. Келдыш. Об одном классе экстремальных полиномов, ДАН СССР, 1936, 4, 163—166.
9. Н. И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., Гостехиздат, 1950.
20. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., Наука, 1966.
21. С. Я. Хавинсон. Факторизация аналитических функций в конечносвязных областях, М., Изд. МИСИ, 1981.
22. Дж. Гарнетт. Ограниченные аналитические функции, М., Мир, 1984.
23. A. P. Calderón, S. P. Calderón, E. Fabes, M. Jaffard, N. M. Riviere. Applications of integrals Cauchy on Lipschitz curves, Bull. Amer. Math. Soc., 1978, 84, 281—290.
24. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. Линейные операторы (общая теория), М., ИИЛ, 1962.
25. Б. С. Кашиш, А. А. Саакян. Ортогональные ряды, М., Наука, 1984.
26. В. М. Мартыросян. О замыкании и базисности некоторых систем рациональных функций, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 1987, 22, № 6, 585—606.
27. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., Наука, 1965.