ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 5, 1991 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.218.5

Г. С. СУКИАСЯН

О СГУЩАЕМЫХ ПРОЦЕССАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Операция сгущения точечных процессов является обращением известной операции их независимого прореживания с постоянной вероятностью p выбрасывания каждой точки (см. [1], [2]). Операция сгущения зависит от параметра $c > 1$ (коэффициента сгущения). В отличие от операции прореживания, которая определена для всех $0 < p < 1$ и для всех точечных процессов, операция сгущения возможна не всегда. Представляет интерес задача о нахождении наибольшего коэффициента сгущения для данного точечного процесса. На эту тему имеется мало публикаций. В [2], [3] рассматривался вопрос бесконечной сгущаемости процессов восстановления. В [4] дан общий критерий 2-сгущаемости в терминах распределения Пальма, получены условия 2-сгущаемости гиббсовских процессов с парным потенциалом.

В [4], в качестве примера, рассматривалось одно семейство P_a гиббсовских процессов восстановления на прямой. В замечании Г. С. Сукиасяна к [4] приведено независимое доказательство 2-сгущаемости процессов из P_a, основанное на свойствах знакочередующихся рядов. Настоящая заметка является развитием этого замечания. Здесь найдено наибольшее значение $c(a)$ коэффициента сгущения для процессов из P_a.

Определение (см. [4]). Случайный точечный процесс P^* в R_n называется c-сгущаемым, $c > 1$, если P^* можно получить из какого-нибудь точечного процесса P операцией независимого $1/c$-прореживания.

Под независимым q-прореживанием, $0 < q \leqslant 1$ понимаем такое случайное преобразование

$$\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}^*$$

реализаций точечного процесса, для которого $\mathfrak{M}^* \subseteq \mathfrak{M}$ и для разных точек x, y из $\mathfrak{M}$ события $x \in \mathfrak{M}^*$ и $y \in \mathfrak{M}^*$ независимы и их вероятности равны q.

Пусть P — стационарный точечный процесс восстановления на прямой, и пусть у P существует плотность распределения $r(u)$ расстояния между соседними точками, называемая в дальнейшем определяющей плотностью. При независимом q-прореживании процеееа P получается (см. [4]) вновь стационарный процесс восстановления P^* со следующей определяющей плотностью:

$$r^*(u) = q\sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} r^{(k)}(u),$$

где $p = 1 - q$, $r^{(k)}$ — k-тая свертка плотности $r(u)$.

Перейдя к преобразованиям Лапласа

$$L(w) = \int e^{-wu} r(u)\,du, \quad L^*(w) = \int e^{-wu} r^*(u)\,du,$$

получим

$$L^* = q\sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} L^k = \frac{qL}{1-pL}.$$

Отсюда

$$L(w) = \frac{L^*(w)}{q+pL^*(w)} = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{\infty} (L^*)^k\left(-\frac{p}{q}\right)^{k-1}, \tag{1}$$

то соответствует следующему соотношению между плотностями:

$$r(u) = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{p}{q}\right)^{k-1} r^{*(k)}(u). \tag{2}$$

Итак, если процесс восстановления P^* является $1/q$-сгущаемым, то знакочередующийся ряд (2) обязательно имеет свойства плотности распределения:

а) $r(u) \geqslant 0$,

б) $\int r(u)\,du = 1$.

Теперь пусть дан процесс восстановления P^* с определяющей плотностью $r^*(u)$ и пусть ряд (2) имеет свойства а) и б). В силу единственности преобразования Лапласа нетрудно убедиться, что после q-прореживания процесса восстановления с определяющей плотностью $r(u)$ получается процесс P^*. Отсюда следует

Утверждение 1. Для того, чтобы процесс восстановления P^* с определяющей плотностью $r^*(u)$ был $1/q$-сгущаемым, необходимо и достаточно, чтобы ряд (2) имел свойства а) и б).

Рассмотрим теперь на прямой т. н. процесс непересекающихся невзаимодействующих интервалов единичной длины (см. [5]). Его можно эквивалентно определить, как процесс восстановления P^* с определяющей плотностью, равной

$$r^*(u) = \begin{cases} 0, & u \leqslant 1 \\ \alpha e^{-\alpha(u-1)} & u > 1, \end{cases} \tag{3}$$

где α — положительный параметр.

Соответствующая свертка имеет вид

$$r^{*(k)}(u) = (u-k)_+^{k-1}\frac{\alpha^k}{(k-1)!}e^{-\alpha(u-k)}, \quad k = 2, 3, \cdots,$$

здесь

$$(x)_+ = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Наша цель — выяснить для каких α и q процесс P^* является $1/q$-сгущаемым, Из (2) и (3) имеем

$$r(u) = \frac{\alpha}{q} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{p}{q} \alpha \right)^{k-1} (u-k)_+^{k-1} \frac{e^{-\alpha(u-k)}}{(k-1)!} =$$

$$= \frac{1}{q} \alpha e^{\alpha} e^{-\alpha u} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{p}{q} \alpha e^{\alpha} \right)^{k} (u-k-1)_+^{k} (k!)^{-1}, \quad u > 1. \tag{4}$$

Оказывается, что ряды, фигурирующие в (4), возникают при решении дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (см. [4]). Непосредственной подстановкой легко убедиться, что решением уравнения

$$\begin{gathered} \frac{dF(t)}{dt} = -bF(t-1), \quad t > 1, \\ F(t) = 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{gathered} \tag{5}$$

является знакочередующийся ряд

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-b)^n}{n!} (t-n)_+^n.$$

В силу (4) отсюда следует

$$r(u) = \frac{1}{p} e^{-\alpha u} f\left(u, \frac{p}{q} \alpha e^{\alpha}\right), \tag{6}$$

где

$$f(t, b) = -\frac{dF(t)}{dt} = \begin{cases} bF(t-1), & t > 1 \\ 0, & t < 1. \end{cases}$$

Лемма 1. (см. [6]): *Уравнение (5) имеет неотрицательное решение тогда и только тогда, когда* $b < e^{-1}$.

Из леммы 1 и равенства (6) заключаем

Утверждение 2. *Ряд* (2), *составленный для плотности* (3), *неотрицателен тогда и только тогда, когда выполнено неравенство*

$$p\alpha e^{\alpha} < q e^{-1}. \tag{7}$$

Отметим, что если $b < e^{-1}$, то $f(t, b)$ как функция от t является плотностью распределения. Точечный процесс восстановления с определяющей плотностью равной f рассматривался в [4] и [7].

Рассмотрим теперь условие б). Так как $r^*(u)$ является плотностью распределения, то $L^*(0) = 1$. В силу (1), для выполнения условия б) достаточно, чтобы область аналитичности функции $L(w)$ включала бы мнимую ось (т. е. чтобы можно было в (1) подставить $w = 0$). Для этого достаточно, чтобы знаменатель $q + pL^*(w)$ имел нули только в левой полуплоскости.

В нашем случае, когда $r^*(u)$ задается по (3), имеем

$$L^*(w) = \frac{\alpha e^{-w}}{\alpha + w}.$$

С помощью (1) находим

$$L(w)=\frac{\alpha e^{-w}}{q(w+\alpha)+pe^{-w}\alpha}.$$

Приравнивая знаменатель нулю и обозначая $w=x+iy$, получаем

$$\begin{cases} q(x+\alpha)+\alpha pe^{-x}\cos y=0,\\ qy-\alpha pe^{-x}\sin y=0.\end{cases}$$

Найдем при каких α все решения этой системы удовлетворяют условию $x<0$. Если $y=0$, то из первого уравнения для всех $\alpha>0$ имеем

$$x=-\alpha-\alpha\frac{p}{q}e^{-x}<0.$$

Пусть $y\neq 0$. Из второго уравнения системы получаем $x=\ln\left(\frac{p\alpha}{q}\frac{\sin y}{y}\right)$.

Условие $x<0$ выполнено, если

$$\frac{p\alpha}{q}\frac{\sin y}{y}<1.$$

Но для всех $y\neq 0$ имеет место $y^{-1}\sin y<1$. Следовательно, для выполнения условия б) достаточно, чтобы $\alpha pq^{-1}<1$. Но если справедливо (7), то

$$\alpha pq^{-1}<e^{-\alpha-1}<1,$$

т. е. (7) является достаточным условием как для неотрицательности $r(u)$, так и для равенства единице интеграла $\int r(u)\,du$. Итак, мы получили

Утверждение 3. *Пусть P -процесс восстановления с определяющей плотностью, задаваемой по формуле* (3). *Точечный процесс P^* является $1/q$-сгущаемым тогда и только тогда, когда выполнено неравенство* (7).

Институт математики АН Армении Поступило 7.II.1991

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. В. Амбарцумян, И. Мекке, Д. Штойян*, Введение в стохастическую геометрию, М. Наука, 1989.
2. *P. J. Daley, D. Vere-Jones.* An Introduction to the Theory of Point Processes. Springer Verlag, 1988.
3. *D. J. Daley.* On a class of renewal functions. Proc. Cambridge Philos. Soc., 61, 1965, 519—525.
4. *R. V. Ambartzumian.* On condensable point processes (in press).
5. *Р. В. Амбарцумян, Г. С. Сукиасян.* О внутреннем описании процессов непересекающихся невзаимодействующих шаров, Изв АН Ар.ССР, Математика, 18, № 3, 1983, 206—215.
6. *А. Д. Мышкис.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, М., Наука, 1972.
7. *R. V. Ambartzumian, H. S. Sukiasian.* Inclusion-exclusion and point processes, Acta Applic. Math., 22, 1991, 15—31.