ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 5, 1991 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.53

А. М. ДЖРБАШЯН, Г. В. МИКАЕЛЯН

О ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ТИПА БЛЯШКЕ

В статье для произведений типа Бляшке в полуплоскости, введенных авторами [1], а также для произведений типа Бляшке М. М. Джрбашяна [2, 3] в единичном круге, образца 1945 года, установлены полные аналоги известного результата Фростмана [4] о граничных свойствах произведения Бляшке с „редкими" нулями. Результаты статьи в основном аналогичны результатами работы [5] одного из авторов, где в частности исследуются иные, родственные произведения типа Бляшке для полуплоскости и для круга. Однако, структурные особенности исследуемых здесь произведений приводят к более полным результатам.

1. Пусть последовательность чисел $\{w_k\}=\{u_k+iv_k\}$ из нижней полуплоскости $G^{(-)}=\{w: \operatorname{Im} w<0\}$ подчинена условию

$$\sum_k |v_k|^{1+\alpha}<+\infty \tag{1}$$

при заданном $\alpha\,(-1<\alpha<+\infty)$. Тогда произведение типа Бляшке для полуплоскости

$$B_\alpha(w, \{w_k\})\equiv\prod_k b_\alpha(w, w_k)|_{\alpha=0}=\prod_k \frac{w-w_k}{w-\overline{w}_k}, \tag{2}$$

$$b_\alpha(w, w_k)\equiv\exp\left\{-\int\limits_0^{2|v_k|}\frac{\tau^\alpha\, d\tau}{[\tau+i(w-w_k)]^{1+\alpha}}\right\} \tag{3}$$

есть аналитическая в $G^{(-)}$ функция с нулями $\{w_k\}$ [1].

Если $\{z_k\}$ $(z_k\neq 0,\ k\geqslant 1)$ — последовательность чисел из единичного круга $|z|<1$, подчиненная условию

$$\sum_k (1-|z_k|)^{1+\alpha}<+\infty \tag{4}$$

при заданном $\alpha\,(-1<\alpha<+\infty)$, то произведение типа Бляшке для круга

$$\pi_\alpha(z, \{z_k\})\equiv\prod_k a_\alpha(z, z_k)|_{\alpha=0}\equiv\prod_k \frac{z_k-z}{1-\overline{z}_k z}\cdot\frac{\overline{z}_k}{|z_k|}, \tag{5}$$

$$a_\alpha(z, z_k)\equiv\exp\left\{-\int\limits_{|z_k|^2}^{1}\frac{(1-\tau)^\alpha}{(1-z\tau/z_k)^{1+\alpha}}\frac{d\tau}{\tau}\right\} \tag{6}$$

есть аналитическая в $|z|<1$ функция с нулями $\{z_k\}$ [2, 3].

Замечание. Примененная запись (5)—(6) произведения типа Бляшке для круга отличается от введенной М. М. Джрбашяном [2, 3] тем, что α заменено здесь в целях удобства изложения на $\alpha-1$. Кроме того, при $-1<\alpha<0$ приведенное произведение для круга является специальным случаем более общего произведения, введенного Р. С. Галояном [6] по аналогии с произведениями М. М. Джрбашяна, введенными в [2, 3], а также в более поздних работах. Отметим также, что при выполнении условия (4) произведение π_α принадлежит классу N_α М. М. Джрбашяна [7, гл. IX] функций обобщенно-ограниченного вида в круге, каково бы ни было α $(-1<\alpha<+\infty)$ [6].

Что же касается произведения B_α $(-1<\alpha<+\infty)$ для полуплоскости, то при выполнении условия его сходимости (1) оказывается, что оно принадлежит классу $N_\alpha\{G^{(-)}\}(-1<\alpha<0)$ [5], а также другим классам функций обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости, исследованным в работе [8].

2. Основными результатами статьи являются приводимые ниже две теоремы и лемма. Прежде чем их сформулировать, отметим, что как здесь, так и всюду ниже емкость множества на конечной оси $(-\infty, +\infty)$ будем понимать в смысле, рассмотренном в работе [8].

Теорема 1. 1°. *Пусть* $\gamma\,(0<\gamma<1)$ *и* $\alpha\,(\gamma-1\leqslant\alpha<+\infty)$ — *любые числа, а последовательность* $\{w_k\}\subset G^{(-)}$ *подчинена условию*

$$\sum_k |\operatorname{Im} w_k|^\gamma<+\infty. \tag{7}$$

Тогда функция $B_\alpha(w, \{w_k\})$ *обладает ненулевыми, конечными угловыми граничными значениями во всех точках* $u\in(-\infty, +\infty)$, *кроме, быть может, множества нулевой* γ-*емкости.*

2°. *Пусть* $\alpha\,(0\leqslant\alpha<+\infty)$ *любое и последовательность* $\{w_k\}\subset G^{(-)}$ *подчинена условию*

$$\sum_k |\operatorname{Im} w_k|<+\infty. \tag{8}$$

Тогда функция $B_\alpha(w, \{w_k\})$ *обладает ненулевыми, конечными угловыми граничными значениями почти во всех точках* $u\in(-\infty, +\infty)$.

Теорема 2. 1°. *Пусть* $\gamma\,(0<\gamma<1)$ *и* $\alpha\,(\gamma-1\leqslant\alpha<+\infty)$ — *любые числа, а последовательность из единичного круга* $\{z_k\}$ $(z_k\neq0,\ k\geqslant1)$ *подчинена условию*

$$\sum (1-|z_k|)^\gamma<+\infty. \tag{9}$$

Тогда функция $\pi_\alpha(z, \{z_k\})$ *обладает ненулевыми, конечными угловыми граничными значениями во всех точках единичной окружности* $|z|=1$, *кроме, быть может, множества нулевой* γ-*емкости в смысле Фростмана* [4].

2°. *Пусть* $\alpha\,(0\leqslant\alpha<+\infty)$ *любое и последовательность из единичного круга* $\{z_k\}$ $(z_k\neq0,\ k\geqslant1)$ *подчинена условию Бляшке*

$$\sum_k (1-|z_k|)<+\infty. \tag{10}$$

Тогда функция $\pi_\alpha(z, \{z_k\})$ обладает ненулевыми, конечными угловыми граничными значениями почти во всех точках окружности $|z| = 1$.

Замечание. В случае $\alpha = 0$ утверждения 1° теорем 1 и 2 по существу совпадают с отмеченным выше хорошо известным результатом Фростмана [4]. Утверждения же 2° этих теорем в случае $\alpha = 0$ переходят в общеизвестное граничное свойство произведения Бляшке.

В статье установлена также нижеприводимая лемма, неравенства которой представляют самостоятельный интерес.

Лемма. *Если $\alpha_1, \alpha_2\ (-1 < \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant 0)$ любые числа. Тогда:*

1°. *Если последовательность $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ подчинена условию (7) с $\gamma = 1 + \alpha_1$, то*

$$|B_{\alpha_1}(w, \{w_k\})| < |B_{\alpha_2}(w, \{w_k\})| \quad w \in G^{(-)}. \tag{11}$$

Если же эта последовательность подчинена условию (8), то при любом $\alpha \in [0, 1]$

$$|B_\alpha(w, \{w_k\})| \geqslant |B_0(w, \{w_k\})|, \quad w \in G^{(-)}. \tag{12}$$

2°. *Если последовательность $\{z_k\}$ из $|z| < 1$ подчинена условию (9) с $\gamma = 1 + \alpha_1$, то*

$$|\pi_{\alpha_1}(z, \{z_k\})| \leqslant |\pi_{\alpha_2}(z, \{z_k\})|, \quad |z| < 1. \tag{13}$$

Если же эта последовательность подчинена условию (10), то при любом $\alpha \in [0, 1]$

$$|\pi_\alpha(z, \{z_k\})| \geqslant |\pi_0(z, \{z_k\})|, \quad |z| < 1. \tag{14}$$

Замечание. Для частного случая, когда $\alpha_2 = 0$, в работе [6] содержится оценка, более тонкая, чем (13).

3. Доказательство теоремы 1. 1°. Пусть выполнено условие (7) с каким-либо $\gamma\ (0 < \gamma < 1)$ и пусть сначала $\gamma - 1 \leqslant \alpha < \gamma$. В этом случае вполне аналогично лемме 5 из [5] можно показать, что

$$B_\alpha(w, \{w_k\}) \in N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}, \tag{15}$$

где $N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$ — класс функций, исследованный в [5].

Покажем, что включение (15) верно и в случае произвольного $\alpha \geqslant \gamma$. С этой целью выберем натуральное $m > 1$ так, чтобы $\gamma - 1 \leqslant \alpha - m < \gamma$ и воспользуемся рекуррентной формулой из [1]:

$$B_\alpha(w, \{w_k\}) = B_{\alpha-m}(w, \{w_k\})\, K_\alpha(w), \quad w \in G^{(-)}, \tag{16}$$

$$K_\alpha(w) \equiv \exp\left\{ \sum_k \sum_{n=0}^{m-1} \frac{2^{\alpha-n}}{\alpha - n} \frac{|v_k|^{\alpha-n}}{[i(w - \overline{w}_k)]^{\alpha-n}} \right\}. \tag{17}$$

Здесь, очевидно, $B_{\alpha-m} \in N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$, а K_α — аналитическая в $G^{(-)}$ функция без нулей. Поэтому, ввиду мультипликативности класса $N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$ достаточно показать, что $K_\alpha \in N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$. Для этого представим K_α в виде

$$K_\alpha(w) = \sum_{n=0}^{m-1} K_\alpha^n(w), \tag{18}$$

где

$$K_\alpha^n(w) \equiv \exp\left\{\frac{2^{\alpha-n}}{\alpha-n}\sum_k \frac{|v_k|^{\alpha-n}}{[i(w-\overline{w}_k)]^{\alpha-n}}\right\} (0 \leqslant n \leqslant m-1) \tag{19}$$

— аналитическая в $G^{(-)}$ функция без нулей.

Если $\alpha-\gamma$ есть число не целое, то ясно, что $m-1<\alpha-\gamma$. Поэтому, ввиду используемого авторами [1, 8] определения оператора Вейля и в силу формулы (29) из [5], получим, что при любом $n\,(0 \leqslant n \leqslant m-1)$

$$W^{-(\gamma-1)} \log K_\alpha^n(w) = 2^{\alpha-n}\frac{\Gamma(1+\alpha-n-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-n)}\sum_k \frac{|v_k|^{\alpha-n}}{[i(w-\overline{w}_k)]^{1+\alpha-n-\gamma}}.$$

Далее, воспользовавшись оценкой (21) из [5], получим, что при любых $n\,(0 \leqslant n \leqslant m-1)$ и $v<0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-(\gamma-1)} \log K_\alpha^n(u+iv)|\, du \leqslant$$

$$\leqslant 2^{[3(1+\alpha-n)-\gamma]/2}\frac{\Gamma(\alpha-n-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-n)}\sum_k |v_k|^\gamma < +\infty.$$

Опираясь на лемму 1.5 работы [8] легко проверить наличие остальных условий принадлежности K_α^n $(0 \leqslant n \leqslant m-1)$ классу $\mathrm{N}_{\gamma-1}^m$ типа В. И. Крылова, введенному в той же работе. Однако, как следует из определения класса $N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$ [5] и теоремы 4.3 работы [8], $\mathrm{N}_{\gamma-1}^m \subset$ $\subset N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$. Поэтому $K_\alpha^n \in N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$ $(0 \leqslant n \leqslant m-1)$, и, ввиду (18), $K_\alpha \in N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$.

Пусть теперь $\alpha-\gamma$ — целое число. Тогда будем полагать, что в представлениях (16)—(19) $m=\alpha-\gamma+1$. При этом легко проверить, так как это сделано выше, что для всех $n \leqslant m-2$ имеем $K_\alpha^n \subset \mathrm{N}_{\gamma-1}^m$. Если же $n=m-1=\alpha-\gamma$, то ясно, что

$$W^{-(\gamma-1)} \log K_\alpha^n(w) = \frac{2^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)}\sum_k \frac{|v_k|^\gamma}{i(w-\overline{w}_k)},$$

причем, это аналитическая в $G^{(-)}$ функция со значениями в правой полуплоскости. Поэтому с применением результатов работы [9] приходим к представлению

$$K_\alpha^{\alpha-\gamma}(w) = \exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{[i(w-t)]^\gamma}\right\},$$

где $\sigma(t)$ — функция, подчиненная условиям, поставленным в определении класса $N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$ [5]. Тем самым, $K_\alpha^n \in N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$ при всех $n\,(0 \leqslant n \leqslant m-1=\alpha-\gamma)$, и $K_\alpha \in N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$ уже при всех $\alpha \geqslant \gamma-1$.

Нужное утверждение вытекает из включения (15) и теоремы 1 из [5].

2°. Докажем, что при выполнении условия (8) функция $B_\alpha(w, \{w_k\})$ принадлежит классу N^m В. И. Крылова [10], каково бы не было $\alpha > 0$. Тогда нужное утверждение будет следовать из общеизвестных граничных свойств функций ограниченного вида, поскольку таковы функции класса N^m.

Пользуясь представлением (2)—(3) функции B_α и оценкой (21) из [5] легко получить, что при любых $\alpha > 0$ и $v < 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\log B_\alpha(u + iv, \{w_k\})| \, du \leqslant \frac{2^{(3+\alpha, 1)/2}}{\alpha} \sum_k \int_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha d\tau}{(|v| + |v_k| + \tau)^\alpha} <$$

$$< 2^{(5+\alpha)/2} [\alpha(1 + \alpha)]^{-1} \sum_k |v_k| < +\infty.$$

Замечание. Методами, аналогичными примененным, можно показать, что при выполнении условия (7) с каких-либо $\gamma > 0$ функция $B_\alpha(w, \{w_k\}) (\alpha \leqslant \gamma - 1)$ принадлежит классу $N^m_{\gamma-1}$ типа В. И. Крылова из [8].

4. Доказательство теорема 2. 1°. Пусть выполнено условие (9) с каким-либо $\gamma (0 < \gamma < 1)$. Тогда, вполне аналогично лемме 8 из [5], можно показать, что при $\gamma - 1 < \alpha \leqslant \gamma$ имеем

$$\pi_\alpha(z, \{z_k\}) \in N_{\gamma-1}, \tag{20}$$

где $N_{\gamma-1}$ — класс функций обобщенно-ограниченного вида в круге [7, гл. IX]. С целью доказать, что включение (20) верно при любом $\alpha \geqslant \gamma$, выберем натуральное $m \geqslant 1$ так, чтобы $\gamma - 1 \leqslant \alpha - m < \gamma$ и воспользуемся рекуррентной формулой из [3]:

$$\pi_\alpha(z, \{z_k\}) = \pi_{\alpha-m}(z, \{z_k\}) L_\alpha(z), \tag{21}$$

$$L_\alpha(z) \equiv \exp\left\{ \sum_k \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{\alpha - n} \left(\frac{1 - |z_k|^2}{1 - \bar{z}_k z} \right)^{\alpha-n} \right\}. \tag{22}$$

Здесь, очевидно, $\pi_{\alpha-m} \in N_{\gamma-1}$, а L_α — аналитическая в $|z| < 1$ функция без нулей. Ввиду мультипликативности класса $N_{\gamma-1}$, для доказательства включения (20) с любым $\alpha \geqslant \gamma$ достаточно показать, что $L_\alpha \in N_{\gamma-1} (\alpha \geqslant \gamma)$. Для этого представим L_α в виде

$$L_\alpha(z) = \prod_{n=0}^{m-1} L_\alpha^n(z), \tag{23}$$

$$L_\alpha^n(z) \equiv \exp\left\{ \frac{1}{\alpha - n} \sum_k \left(\frac{1 - |z_k|^2}{1 - \bar{z}_k z} \right)^{\alpha-n} \right\} (0 \leqslant n \leqslant m - 1), \tag{24}$$

где L_α^n — аналитические в $|z| < 1$ функции без нулей. В силу формулы (1.22) из гл. IX [7] при $z = re^{i\varphi} (0 \leqslant r < 1)$ и любом $(0 \leqslant n \leqslant m - 1)$

$$r^{1-\gamma} D^{-(\gamma-1)} (1 - \bar{z}_k re^{i\varphi})^{-(\alpha-n)} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} + r^{1-\gamma} D^{-\gamma} \frac{d}{dr} (1 - \bar{z}_k re^{i\varphi})^{-(\alpha-n)} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\left[1-(\alpha-n)\,\bar z_k re^{i\varphi}\int_0^1 \frac{(1-t)^{\gamma-1}\,dt}{(1-\bar z_k re^{i\varphi}\,t)^{\alpha-n+1}}\right]. \tag{25}$$

Поэтому, ввиду оценки, установленной в лемме 7 в [5], получим, что при любых $re^{i\varphi}$ $(0\leqslant r<1)$ и n $(0\leqslant n\leqslant m-1)$

$$|r^{1-\gamma}D^{-(\gamma-1)}(1-\bar z_k re^{i\varphi})^{-(\alpha-n)}|\leqslant M|1-\bar z_k re^{i\varphi}|^{-(1+\alpha-n-\gamma)}, \tag{26}$$

где $M>0$ — постоянная, зависящая лишь от α, γ и n.

Предположив теперь, что $\alpha-\gamma$ число не целое, будем иметь, что $\alpha-n-\gamma>0$ при $0\leqslant n\leqslant m-1$. Поэтому, ввиду (26), обозначив $\min\limits_k|z_k|=\rho_0\ (\rho_0>0)$, при любых $r\in(1/2,\ 1)$ и n $(0\leqslant n\leqslant m-1)$ получим

$$\int_{-\pi}^{\pi}|r^{1-\gamma}D^{-(\gamma-1)}\log L_\alpha^n(re^{i\varphi})|\,d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{\alpha-n}\sum_k(1-|z_k|^2)^{\alpha-n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{|1-|z_k|re^{i\varphi}|^{1+\alpha-n-\gamma}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{\alpha-n}\,2^{(5+\alpha-n-\gamma)/2}\sum_k(1-|z_k|^2)^{\alpha-n}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\left(1-|z_k|r+\frac{4}{\pi}\sqrt{|z_k|}\,r\theta\right)^{1+\alpha-n-\gamma}}<$$

$$<M\frac{2^{3(\alpha-n)/2+1-\gamma/2}}{(\alpha-n)(\alpha-n-\gamma)}\,\frac{\pi}{\sqrt{\rho_0}}\sum_k(1-|z_k|)^{\gamma}<+\infty.$$

Тем самым, функции L_α^n $(0\leqslant n\leqslant m-1)$, а в виду (23)—(24) и функции L_α, принадлежат классу $N_{\gamma-1}$.

Пусть теперь $\alpha-\gamma$—целое число. Тогда включения $L_\alpha^n\in N_{\gamma-1}$ $(0\leqslant n\leqslant m-2)$ доказываются так, как выше. Для доказательства же включения $L_\alpha^{m-1}\equiv L_\alpha^{\alpha-\gamma}\in N_{\gamma-1}$ заметим, что в силу (24) и (25)

$$r^{1-\gamma}D^{-(\gamma-1)}\log L_\alpha^{\alpha-\gamma}(re^{i\varphi})=\frac{1}{\Gamma(1+\gamma)}\sum_k(1-|z_k|^2)\left[2-\frac{1}{1-\bar z_k re^{i\varphi}}\right],$$

$$r^{1-\gamma}D^{-(\gamma-1)}\log|L_\alpha^{\alpha-\gamma}(re^{i\varphi})|<\frac{2^{1+\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)}\sum_k(1-|z_k|)^{\gamma}.$$

Последнее неравенство обеспечивает нужное включение. Поэтому $L_\alpha\in N_{\gamma-1}$ при всех $\alpha\geqslant\gamma$, и включение (20) справедливо при любом $\alpha\geqslant\gamma-1$. Теперь требуемое утверждение теоремы непосредственно следует из результата М. М. Джрбашяна и В. С. Захаряна [11, 12] о том, что любая ненулевая функция класса $N_{\gamma-1}$ $(0<\gamma<1)$ обладает ненулевыми, конечными угловыми граничными значениями во всех точках единичной окружности, кроме, быть может, множества нулевой γ-емкости.

2°. Пусть выполнено условие Бляшке (10). Покажем, что функция $\pi_\alpha(z,\ |z_k|)$ $(\alpha>0)$ в этом случае ограниченного вида в $|z|<1$.

Тогда нужное утверждение будет очевидно. Намеченной цели можно добиться путем применения рекуррентной формулы (20)—(21) и соответствующих оценок. Однако, проще воспользоваться имеющим место при любых z ($|z|<1$) и $\alpha>-1$ представлением

$$\pi_\alpha(z, |z_k|) = \\ = \prod_k a_0(z, z_k) \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\Gamma(1+\alpha)}{n\Gamma(1+n)\Gamma(1+\alpha-n)}([a_0(z, z_k)]^n - 1\right\}, \quad (27)$$

являющимся очевидным следствием формулы (1) работы [13]. Запишем правую часть этого представления в виде дроби с числителем, состоящим из $\pi_0(z, |z_k|)$ и произведения экспоненциальных факторов, включающим в себя только слагаемые суммы с положительными коэффициентами. К знаменателю дроби отнесем произведение экспоненциальных факторов со слагаемыми суммы с отрицательными коэффициентами. Тогда числитель и знаменатель дроби — аналитические и ограниченные в $|z|<1$ функции.

Замечание. Методами, аналогичными примененным, можно показать, что при выполнении условия (9) с каким-либо $\gamma>0$ функция $\pi_\alpha(z, |z_k|)$ принадлежит классу $N_{\gamma-1}$ М. М. Джрбашяна. Отметим еще, что способ доказательства утверждения 2° последней теоремы без существенных изменений мог быть применен также для утверждения 2° теоремы 1.

5. Перейдем наконец к доказательству леммы. С этой целью мы опять воспользуемся результатами работы [13], применение которых, в отличие от пути доказательства неравенства (15) работы [5], приводит здесь к более полным результатам.

Отметим сначала же, что из формулы (3) работы [13] вытекает точно такое же, как (27), представление для произведения B, в полуплоскости. Притом, если $-1<\alpha_1<\alpha_2<0$, то очевидно, что

$$(-1)^n\left[\frac{\Gamma(1+\alpha_1)}{\Gamma(1+\alpha_1-n)} - \frac{\Gamma(1+\alpha_2)}{\Gamma(1+\alpha_2-n)}\right] =$$

$$= (-1)^n[\alpha_1(\alpha_1-1)\cdots(\alpha_1-n+1) - \alpha_2(\alpha_2-1)\cdots(\alpha_2-n+1)] > 0$$

для любого $n\geqslant 1$. Однако, при любых $n\geqslant 1$, $w, \zeta\in G^{(-)}$, и $z, s\in\{z: |z|<1\}$ имеем также $\mathrm{Re}[b_0(w, \zeta)]^n - 1 \leqslant 0$, $\mathrm{Re}[a_0(z, s)]^n - 1\leqslant 0$. Отсюда следуют неравенства (11) и (13) леммы. Неравенства (12) и (14) доказываются аналогично.

Институт математики АН Армении,
Ереванский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян.* Построение и основные свойства одного семейства функций типа Бляшке для полуплоскости, Изв АН АрмССР Математика, XV, № 6, 1980, 461—474.

2. *М. М. Джрбашян.* О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций. ДАН АрмССР, т. 3, № 1. 1945, 3—9.

3. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций. Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН АрмССР, вып. 2, 1948, 3—55.

4. *O. Frostman.* Sur les produits de Blaschke, Fysiogr. Söldsk Lund, föhr., 12, № 15, 1939, 1—14.

5. *А. М. Джрбашян.* О граничных свойствах функций обобщенно-ограниченного вида, Изв АН Армении, Математика, XXVI, № 3, 1991, 87—209.

6. *Р. С. Галоян.* Предельные и асимптотические свойства некоторых классов функций, аналитических в круге. Дис. на соискание уч. степ. к. ф.-м. н., Ереван, 1975.

7. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Наука, 1966.

8. *А. М. Джрбашян.* Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для мероморфных в полуплоскости функций, Изв. АН АрмССР, Математика, XXI, № 3, 1986, 213—279.

9. *А. М. Джрбашян.* Теоремы типа Герглотца-Рисса, Мат. заметки, т. 45, вып. 4, 1989, 19—26.

10. *В. И. Крылов.* О функциях, регулярных в полуплоскости, Мат. сб., т. 6(48), № 1, 1939, 95—138.

11. *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян.* Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН СССР, т. 34, № 6, 1970, 1262—1339.

12. *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян.* Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН АрмССР, Математика, т. VI, № 2—3, 1971, 182—194.

13. *Г. В. Микаелян.* Об одном семействе произведений типа Бляшке-Джрбашяна, Изв. АН Армении, Математика, (в печати).