ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 5, 1991 Математика

УДК 517.956

М. А. ЗИРОЯН

ЛИНЕЙНЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С ОСОБЕННОСТЬЮ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Пусть D — единичный круг $|z|<1$ на комплексной плоскости $z=x+iy$, Γ — единичная окружность. Обозначим через $B(D)$ класс функций, аналитических в области D и непрерывных в замкнутом круге $D+\Gamma$. Введем в классе $B(D)$ норму: если $\varphi(z)\in D$, то $\|\varphi\|=\max\limits_{z\in\Gamma}|\varphi(z)|$. Этим класс $B(D)$ становится банаховым пространством.

Обозначим через $B'(D)$ подпространство пространства $B(x)$, элементы которого удовлетворяют условию $\varphi(0)=0$.

В пространстве $B(D)$ рассмотрим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение высшего порядка вида:

$$z^n\varphi^{(k)}(z)+a(z)\varphi(\alpha(z))=f(z),\quad z\in D,\tag{1}$$

где $\varphi(z)$ — искомое решение, $a(z)$ и $f(z)$ — заданные функции из $B(D)$ а $\alpha(z)$ — из $B'(D)$. Предполагается также, что $|\alpha(z)|\leqslant 1$, n и k — произвольные целые, положительные числа, $a(0)\neq 0$.

Уравнение (1) при $f\equiv 0$ будем называть однородным. Уравнение (1) при $n=k=1$ и $a(z)=\mathrm{const}$ рассмотрено в работе [1]. Уравнение (1) используется для эффективного решения задач для эллиптических уравнений в классических областях (окружность, эллипс, полуплоскость). В конце приведем один пример применения уравнения (1).

§ 1. Исследование уравнения (1)

1. Рассмотрим случай, когда в уравнении (1) $n\leqslant k$ и функция $\alpha(z)$ в точке $z=0$ имеет нуль порядка l, $l\geqslant 1$, т. е. функцию $\alpha(z)$ можно представить в виде

$$\alpha(z)=z^l\alpha_1(z),\quad l\geqslant 1,\tag{2}$$

где $\alpha_1(z)$ — некоторая аналитическая функция в D, причем $\alpha_1(z)\neq 0$.

В этом параграфе линейная зависимость или независимость решений однородного уравнения (1) понимается в поле комплексных чисел.

Теорема 1. *Если $n<k$ или $n=k$ и $l>2$, то однородное уравнение* (1) *имеет $\varkappa_1$ линейно-независимых решений, а для разрешимости соответствующего неоднородного уравнения необходимо и достаточно выполнения $\varkappa_1'$ линейно-независимых условий ортогональности вида*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \tilde{C}_{ij} f^{(j)} = 0, \; j = 1, 2, \cdots, \varkappa_1', \tag{3}$$

где $\tilde{C}_{ij}$ — вполне определенные комплексные постоянные, не зависящие от $f(z)$, и $\varkappa_1$ и $\varkappa_1'$ выражаются формулами

$$\varkappa_j = \left[\frac{lk-n}{l}\right] \text{ и } \varkappa_1' \equiv \left[\frac{n(l-1)}{l}\right], \tag{4}$$

где выражение $\left[\frac{lk-n}{l}\right]$ означает целую часть $\frac{lk-n}{l}$.

Доказательство. Пусть $n < k$, $l \geqslant 1$. Представим решение $\varphi(z)$ следующем виде

$$\varphi(z) = \Psi(z) + P_{k-1}(z), \tag{5}$$

где $\Psi(z)$ — некоторая аналитическая функция в $|z| < 1$, удовлетворяющая условиям

$$\Psi^{(j)}(0) = 0, \; j = 0, 1, \cdots, k-1, \tag{6}$$

а $P_{k-1}(z)$ — полином вида

$$P_{k-1}(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{k-1} z^{k-1}, \tag{7}$$

$c_0, c_1 \cdots, c_{k-1}$ — комплнксные постоянные.

Учитывая представление $\varphi(z)$ в (5), уравнение (1) примет следующий вид

$$z^n \Psi^{(k)}(z) + a(z)\Psi(\alpha(z)) = f(z) - a(z) P_{k-1}(\alpha(z)). \tag{8}$$

Рассмотрим сначала однородное уравнение, т. е. $f(z) = 0$,

$$z^n \Psi^{(k)}(z) + a(z)\Psi(\alpha(z)) = -a(z) P_{k-1}(\alpha(z)). \tag{9}$$

Так как левая часть уравнения (9) в точке $z = 0$ имеет нуль порядка n, то его правая часть в этой точке также должна иметь ноль порядка не менее n, т. е.

$$-a(z) P_{k-1}(\alpha(z)) = z^n \Omega(z), \tag{10}$$

где $\Omega(z)$ — некоторая функция из $B(D)$. С учетом (2), выражение (10) запишем в виде

$$-c_0 a(z) - c_1 a(z) z^l \alpha_1(z) - c_2 a(z) z^{2l} \alpha_1^2(z) - \cdots - \tag{11}$$

$$-c_{k-1} a(z) z^{l(k-1)} \alpha_1^{k-1}(z) = z^n \Omega(z). \tag{11}$$

Так как $a(0) \neq 0$, то левая часть равенства (11) имеет ноль порядка не меньше n, тогда и только тогда, когда $c_j = 0$ для всех индексов j, удовлетворяющих условиям $jl < n$. Последний будет тот номер, который удовлетворяет условию

$$j_0 l < n \text{ и } (j_0 + 1) l > n. \tag{12}$$

Остальные $\varkappa_1 = k - j_0 - 1$ значения $c_{j_0+1}, c_{j_0+2}, \cdots, c_{k-1}$ выбираются произвольным образом. В силу неравенств (12) число $\varkappa_1$ определяется формулой

$$\varkappa_l = \left[\frac{lk-n}{l}\right].$$

Пусть полином $P_{k-1}(z)$ выбирается таким образом. Тогда функция $a(z)P_{k-1}(\alpha(z))$ представляется в виде (10). Подставляя (10) в (9) и разделив обе части на z^n, получим

$$\Psi^{(k)}(z) + a(z)z^{-n}\Psi(\alpha(z)) = \Omega(z). \tag{13}$$

Обозначим

$$\Psi^{(k)}(z) = \omega(z), \tag{14}$$

где $\omega(z)$ — некоторая аналитическая функция в D, тогда

$$\Phi(z) = \frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^z (z-\xi)^{k-1}\omega(\xi)\,d\xi. \tag{15}$$

Подставляя значения функций $\Psi^{(k)}(z)$ и $\Psi(z)$ (14) и (15) в (13), после некоторой перегруппировки членов, уравнение (13) приведем к виду

$$\omega(z) = \Omega(z) + K(\omega(z)), \tag{16}$$

где

$$K(\omega(z)) = a(z)z^{-n}\int\limits_0^{\alpha(z)}(\alpha(z)-\xi)^{k-1}\omega(\xi)\,d\xi.$$

Покажем, что уравнение (16) можно решить методом последовательных приближений, т. е. ряд Неймана

$$\omega(z) = \Omega(z) + K(\Omega(z)) + K^2(\Omega(z)) + \cdots + K^j(\Omega(z)) + \cdots \tag{17}$$

сходится равномерно в области D ($K^j(\Omega(z))$ — применение оператора K на $\Omega(z)$ в j-раз). Оценим значения $K^j(\Omega(z))$. Если для некоторой аналитической функции $\omega(z)$ имеет место неравенство $|\omega(z)| < c|z|^{r_0}$ то легко показать, что

$$|K(\omega(z))| \leqslant c|b|\frac{|z|^{r_0+1}}{(r_0+1)}. \tag{18}$$

В силу того, что $|\Omega(z)| < |\Omega|$, из неравенства (18) имеем

$$|K(\Omega(z))| \leqslant |\Omega||b|\cdot|z|,\quad b(z) = a(z)z^{-n}. \tag{19}$$

Для $K^2(\Omega(z))$ имеем

$$|K^2(\Omega(z))| = |K(K(\Omega(z)))| \leqslant |\Omega||b|^2\frac{|z|^2}{2!}.$$

Продолжая аналогично, получим

$$|K^j(\Omega(z))| < |\Omega||b|^j\frac{|z|^j}{j!}. \tag{20}$$

Согласно теореме Вейерштраса ряд (17) равномерно сходится в $D+\Gamma$. Следовательно функция $\omega(z)$, определяемая формулой (17), является решением уравнения (16). Причем это решение единственное, т. е.

однородное уравнение имеет ($\Omega(z) \equiv 0$) только нулевое решение. Следовательно общее решение однородного уравнения (1) определяется формулой (5), где в полиноме (7) входит $\varkappa_1$ произвольных постоянных, а $\Psi(z)$ определяется формулами (15) и (17). (Ясно, что $\Psi(z)$ удовлетворяет условиям (6)). Из вида общего решения однородного уравнения (1) непосредственно следует, что однородное уравнение (1) имеет ровно $\varkappa_1$ линейно-независимых решений.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (8). Аналогично (9) можно сказать, что для разрешимости уравнения (8) необходимо выполнения следующих условий:

$$(f(z) - a(z) P_{k-1}(\alpha(z)))^{(j)}|_{z=0} = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{21}$$

Подставляя значение $P_{k-1}(\alpha(z))$ из (6) в (21), получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов c_j ($j = 0, 1, \cdots, k-1$), для разрешимости которой необходимо и достаточно выполнения $\varkappa_1'$ линейно-независимых условий ортогональности вида (3). Пусть выполнены эти условия. Тогда из системы алгебраических уравнений определим полином $P_{k-1}(z)$, а функцию $f(z) - a(z) P_{k-1}(\alpha(z))$ представим в виде

$$f(z) - a(z) P_{k-1}(\alpha(z)) = z^n \Omega(z).$$

Аналогично однородному уравнению можно показать, что уравнение (8) относительно $\Psi(z)$ всегда разрешимо. Часть теоремы доказана, при $n < k$. Случай, когда $n < k$ и $l \geqslant 2$ доказывается аналогично.

2. Пусть в уравнении (1) $n = k$. Тогда справедлива следующая

Теорема 2. *Если в уравнении* (1) $n = k$ *и* $\alpha_0'(0) \neq 0$, *то для его однозначной разрешимости, при произвольной аналитической функции* $f(z)$, *необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

$$\gamma_j \neq 0, \quad j = k, \ k+1, \ k+2, \cdots, \tag{22}$$

где

$$\gamma_j = \begin{cases} a(0)(\alpha'(0))^j, \text{ при } j = 0, 1, \cdots, k-1, \\ 1 + a(0)\dfrac{(\alpha'(0))^j (j-k)!}{j!}, \quad j = k, \ k+1, \cdots, \ 0! = 1. \end{cases} \tag{23}$$

Доказательство. Обозначим

$$\varphi^{(k)}(z) = \Psi(z), \tag{24}$$

тогда

$$\varphi(z) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^z (z-\xi)^{k-1} \Psi(\xi)\, d\xi + P_{k-1}(z),$$

$P_{k-1}(z)$ — некоторый полином, имеющий вид (7). С учетом этих обозначений уравнение (1) примет следующий вид

$$z^k \Psi(z) + \frac{a(z)}{(k-1)!} \int_0^{\alpha(z)} (\alpha(z) - \xi)^{k-1} \Psi(\xi)\, d\xi + a(z) P_{k-1}(\alpha(z)) = f(z). \quad (25)$$

Представим аналитическую функцию $\Psi(z)$ в виде

$$\Psi(z) = q_m(z) + z^{m+1} \omega(z), \quad (26)$$

$q_m(z)$ — некоторый полином вида

$$q_m(z) = c_k + c_{k+1} z + \cdots + c_{k+m} z^m, \quad (27)$$

c_j — неизвестные комплексные постоянные ($j = k, k+1, \cdots, k+m$), $\omega(z)$ — некоторая аналитическая функция, $z \in D$, m — достаточно большое целое неотрицательное число.

Подставляя значение (26) в (25), после небольшой перегруппировки уравнение приведем к виду

$$z^{m+k+1} \omega(z) + \frac{a(z)}{(k-1)!} \int_0^{\alpha(z)} (\alpha(z) - \xi)^{k-1} \xi^{m+1} \omega(\xi)\, d\xi = \Omega(z), \quad (28)$$

где

$$\Omega(z) = f(z) - a(z) P_{k-1}(\alpha(z)) - z^k q_m(z) -$$

$$- \frac{a(z)}{(k-1)!} \int_0^{\alpha(z)} (\alpha(z) - \xi)^{k-1} q_m(\xi)\, d\xi.$$

В силу того, что $\alpha(0) = 0$, точка $z = 0$ является нулем кратности не ниже $k + m + 1$ для левой части (28), следовательно она также является нулем той же кратности и для правой части уравнения (28), т. е.

$$\frac{\Omega^{(j)}(0)}{j!} = 0, \; j = 0, 1, \cdots, k + m. \quad (29)$$

После элементарных выкладок, из этих условий получим следующую систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов c^j полиномов $P_{k-1}(z)$ и $q_m(z)$ ($j = 0, 1, \cdots, k+m$),

$$\gamma_j c_j = \frac{f^{(j)}(0)}{j!} + \Phi_j(c_0, c_1, \cdots, c_{j-1}), \; j = 0, 1, \cdots, k+m), \quad (30)$$

где коэффициенты γ_j определяются формулами (23), а $\Phi_j(c_0, c_1, \cdots, c_{j-1})$ известные линейные комбинации из $c_k (k = 0, 1, \cdots, j-1)$. $\Phi_0 = 0$. При выполнении условий $\gamma_j \neq 0$, $j = \overline{0, k+m}$, система (30) имеет единственное решение. В силу произвольности числа m, условия (22) являются необходимыми для однозначной разрешимости уравнения (1) при произвольной функции $f(z)$. Покажем, что эти условия также достаточны. Пусть выполнены (22). Тогда из системы (30) единственным образом определим полиномы $P_{k-1}(z)$ и $q_m(z)$. Учитывая условия (29), функцию $\Omega(z)$ представим в виде

$$\Omega(z) = z^{m+k+1}\,\Omega_0(z),$$

где $\Omega_0(z)$ — вполне определенная функция из $B(D)$. Подставляя это значение $\Omega(z)$ в (28) и разделив обе части (28) на z^{m+k+1}, уравнение (28) приведем к следующему виду:

$$\omega(z) = \Omega_0(z) + K(\omega(z)), \tag{31}$$

где

$$K(\omega(z)) = -\frac{\alpha(z)}{(k-1)!}z^{-k-m-1}\int_0^{\alpha(z)}(\alpha(z)-\xi)^{k-1}\xi^{m+1}\omega(\xi)\,d\xi,\ K(\omega(z))\in B(D). \tag{32}$$

Покажем, что при достаточно больших значения m имеет место следующее неравенство:

$$|K(\omega(z))| \leqslant q \max_{\xi\in D+\Gamma}|\omega(\xi)|,\ 0<q<1. \tag{33}$$

Действительно

$$|K(\omega(z))| = \left|\frac{\alpha(z)}{(k-1)!}z^{-m-k-1}\int_0^{\alpha(z)}(\alpha(z)-\xi)^{k-1}\xi^{m+1}\omega(\xi)\,d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\alpha|\,|A(z)|^{m+k+1}\frac{\max\limits_{\xi\in D+\Gamma}|\omega(\xi)|}{(k-1)!\,(m+2)},\ A(z)=\alpha(z)/z.$$

Ясно, что при достаточно больших значениях m имеет место неравенство (33). Согласно принципу сжатых отображений уравнение (31) имеет единственное решение. Следовательно, условия (22) являются также достаточными для однозначной разрешимости уравнения (1) при произвольной $f(z)$ и $n=k$. Теорема доказана.

Пусть для некоторого целого неотрицательного значения $j=j_0$ условие (22) нарушается, т. е. имеет место

$$\gamma_{j_0} = 0. \tag{34}$$

В этом случае имеет место следующая

Теорема 3. *Если $\alpha'(0)\neq 0$, $a(0)\neq 0$ и условие (22) нарушается для некоторого $j=j_0$, то однородное уравнение (1) при $n=k$ имеет одно линейно-независимое решение, а для разрешимости соответствующего неоднородного уравнения необходимо и достаточно выполнения одного условия вида*

$$\tilde{c}_0 f(0)+\tilde{c}_1 f'(0)+\cdots+c_{j_0-1}f^{(j_0-1)}(0)+f^{(j_0)}(0)=0, \tag{35}$$

где $\tilde{c}_j\,(j=\overline{0,\ j_0-1})$ вполне определенные постоянные, не зависящие от $f(z)$.

Доказательство. Пусть $\gamma_{j_0}=0$, то есть

$$1+a_0\frac{[(\alpha'(0)]^{j_0}(j_0-k)!}{j_0!}=0.$$

Согласно лемме Шварца $|\alpha'(0)| < 1$, поэтому для остальных значений $j \neq j_0$ имеет место условие (22). В этом случае уравнение (1) приводится к виду (25) и решается аналогичным образом. В системе уравнений (30) первые j_0 уравнений решаются однозначно относительно $c_0, c_1, \cdots, c_{j_0} - 1$. Подставляя эти значения в $(j_0 + 1)$-ое уравнение, получим условие разрешимости для неоднородного уравнения (1) вида (35). Значение c_{j_0} выбирается произвольным образом. Остальные значения $c_{j_0} + 1, c_{j_0} + 2, \cdots, c_{k+m}$ определяются однозначным образом из системы (30). Следовательно полином $q_m(z)$ содержит одну произвольную постоянную c_{j_0} (причем коэффициент при z^{j_0-k} равен c_{j_0}). Далее уравнение (1) приводится к виду (31) и аналогично доказывается его однозначная разрешимость относительно $\omega(z)$.

3. Рассмотрим случай, когда в уравнении (1) $n > k$ и $a(0) \neq 0$, $\alpha'(0) \neq 0$. Тогда для уравнения (1) справедлива следующая

Теорема 4. *Если $n > k$, $a(0) \neq 0$, $\alpha'(0) \neq 0$, то однородное уравнение* (1) *не имеет нетривиальных решений, а для разрешимости неоднородного уравнения* (1) *необходимы и достаточны выполнения $n - k$ условий разрешимости вида*

$$\int\limits_{|z|=1} f(t)\, \Psi_j(\zeta)\, d\zeta = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n-k, \tag{36}$$

где $\Psi_j(z)$ — некоторые линейно-независимые аналитические функции вне единичного круга и $\Psi_j(\infty) = 0$.

Доказательство. Допустим однородное уравнение (1) имеет нетривиальное решение $\varphi(z)$ и точка $z = 0$ является m-кратным нулем этого решения.

Из уравнения (1) имеем

$$a(z)\, \varphi(\alpha(z)) = -z^n \varphi^{(k)}(z). \tag{37}$$

Так как $a(0) \neq 0$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) \neq 0$, то точка $z = 0$ является m-кратным нулем левой части (37) и N-кратным нулем левой части (37), где $N \geqslant n + m - k$. Из равенства (37) следует, что $m = N$. Поэтому $m \geqslant n + m - k$ или $k \geqslant n$, которое противоречит условию теоремы. Следовательно однородное уравнение (1) имеет только тривиальное решение, т. е. $\varkappa_1 = 0$. В работе [2] доказано, что $\varkappa_1 - \varkappa_1' = k - n$. Так как $\varkappa_1 = 0$, то отсюда получим $\varkappa_1' = n - k$. В той же работе доказано, что эти условия разрешимости имеют вид (36).

§ 2. Краевые задачи со сдвигом для уравнения Лапласа в единичном круге

Пусть D — единичный круг $|z| < 1$, Γ — его граница. Рассмотрим следующую задачу:

Задача А. Найти в области D вещественное решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{38}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$\frac{\partial^n u}{\partial \nu^n} + au(\alpha(z)) = \mu(z), \ z \in \Gamma, \tag{39}$$

где $z = x + iy$, a — действительная постоянная $a \neq 0$, $\mu(z)$ — заданная вещественная функция на Γ, $\alpha(z)$ — аналитична в области D, $\alpha(z) \not\equiv 0$, $\alpha(0) = 0$ и $|\alpha(z)| < 1$ при $z \in D + \Gamma$, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ — производная по внешней нормали к Γ в точке $z \in \Gamma$. Если $\mu \equiv 0$. то задача A будет называться однородной.

Известно, что решение $u(z)$ уравнения (38) представляется в виде

$$u(z) = \mathrm{Re}\, \varphi(z), \tag{40}$$

где $\varphi(z)$ — аналитична в D и

$$\mathrm{Im}\, \varphi(0) = 0. \tag{41}$$

Причем представление (40) осуществляется единственным образом. Подставляя $u(z)$ из (40) в (39), получим

$$\mathrm{Re}\,[z^n \varphi^n(z) + a\varphi(\alpha(z))] = \mu(z), \ z \in \Gamma. \tag{42}$$

Следовательно задача А эквивалентна нахождению аналитической функции с краевым условием (41)—(42). Пусаь k_0 число линейно-независимых решений однородной задачи А, а k_0' — число условий разрешимости неоднородной задачи А. Обозначим m_0 и m_0' соответственно эти числа для задачи (41), (42).

Отметим, что здесь мы линейную независимость понимаем в поле действительных чисел, а условие разрешимости берется в виде

$$\int_\Gamma \mu(t)\,\Psi_l(t)\,ds = 0 \ \ (l = 1, 2, \cdots, k_0'),$$

где $\Psi_1(t), \cdots, \Psi_{k_0'}(t)$ — линейно-независимые вещественные функции на Γ.

В работе [3] доказано, что индекс задачи (41), (42) равен нулю, $m_0 = m_0'$. Следовательно из эквивалентности задач А и (41), (42) следует, что

$$k_0 = k_0' = m_0. \tag{43}$$

Так как $z^n \varphi^n(z) + a\varphi(z(\alpha))$ аналитична в области D, то из граничного условия (42) эта функция определяется по формуле Шварца

$$z^n \varphi^n(z) + a\varphi(\alpha(z)) = \Phi(z) + ic, \tag{44}$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(t) \frac{t + z}{t - z}\, d\theta, \ t = e^{i\theta},$$

c — произвольная действительная постоянная.

Подставляя в (43) $z=0$ и приравнивая мнимые части, получим $c=0$. Здесь мы использовали условия (41). Поэтому равенство (44) примет вид

$$z^n\varphi^n(z)+a\varphi(\alpha(z))=\Phi(z),\quad |z|<1. \tag{45}$$

Подставляя в (45) $z=0$, получим.

$$\varphi(0)=\frac{1}{a}\Phi(0). \tag{46}$$

Так как $\Phi(0)$ — вещественное число, то из (46) следует, что любое решение уравнения (45) удовлетворяют условию (41). Следовательно задача (38)--(39) эквивалентна уравнению (45) и в классе аналитических функций, которая исследована в § 1.

Пусть $\varphi_1(z), \varphi_2(z),\cdots,\varphi_{\varkappa_1}(z)$ — полная система линейно-независимых решений однородного уравнения (45) в поле комплексных чисел Тогда $\varphi_1(z),\cdots,\varphi_{\varkappa_1}(z), i\varphi_1(z),\cdots, i\varphi_{\varkappa_1}(z)$ будет полная система линейно-независимых решений в поле действительных чисел. То есть $m_0=2\varkappa_1$. Из (42) имеем

$$m_0=m_0'=2\varkappa_1. \tag{47}$$

Обозначим через l кратность нуля и функции $\alpha(z)$, т. е. $\alpha^{(j)}(0)=0$ при $j=0, 1,\cdots, l-1$, $\alpha^{(l)}(0)\neq 0$. По предположению $l\geqslant 1$, применяя теоремы 1 и 2 к уравнению (45) и имея в виду равенство(47), получим

Следствие 1. Если $l>2$, то

$$k_0=k_0'=2\left[\frac{nl-n}{l}\right].$$

Следствие 2. Если $l=1$ и

$$1+a(0)\frac{(\alpha'(0))^j(j-n)!}{j!}\neq 0,\ j=n,\ n+1,\cdots,$$

то $k_0=k_0'=0$. Если же $l=1$ и для некоторого натурального $j_0\geqslant n$ имеет место равенство

$$1+a(0)\frac{(\alpha(0))^{j_0}(j_0-n)!}{j_0!}=0,$$

то $k_0=k_0'=1$.

Пусть теперь в (39) $a\neq 0$ и $\alpha(z)\equiv 0$. Рассмотрим однородное уравнение (45)

$$z^n\varphi^n(z)+a\varphi(0)=0. \tag{48}$$

Подставляя в (47) $z=0$, получим

$$\varphi(0)=0. \tag{49}$$

Следовательно, уравнение (48) примет вид

$$z^n\varphi^n(z)=0.$$

Отсюда, имея в виду (49), получим

$$\varphi(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_{n-1} z^{n-1}, \tag{50}$$

где $c_1, \cdots, c_{n-1}$ — произвольные постоянные,

$$\varkappa_1 = n - 1, \; m_0 = m_0' = 2(n-1). \tag{51}$$

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение (45) при $\alpha(z) \equiv 0$. Подставляя $z = 0$, получим $\varphi(0) = \dfrac{\Phi(0)}{a}$. Следовательно, уравнение (45) примет вид

$$z^n \varphi^{(n)}(z)\,\Phi = (z) - \Phi(0).$$

Отсюда имеем

$$\Phi^{(j)}(0) = 0 \;\; (j = 1, 2, \cdots, n-1). \tag{52}$$

Если эти условия выполнены, то

$$\varphi^{(n)}(z) = \frac{\Phi(z) - \Phi(0)}{z^n}. \tag{53}$$

Интегрируя (51) n раз и имея в виду, что $\varphi(0) = \dfrac{\Phi(0)}{a}$, получим

$$\varphi(z) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^z (z-\xi)^{n-1}\frac{\Phi(z)-\Phi(0)}{\xi^n}\,d\xi + \frac{\Phi(0)}{a} + \sum_{l=1}^{n-1} c_l z^l, \tag{54}$$

где $c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$ — произвольные постоянные.

Пусть теперь $a = 0$, тогда уравнение (43) примет вид

$$z^n \varphi^{(n)}(z) = \Phi(z) + ic.$$

Отсюда, имея в виду условия $\operatorname{Im}\Phi(0) = 0$, получим $c = 0$,

$$m_0 = 2n + 1, \; k_0 = k_0' = 2n + 1. \tag{55}$$

Получили

Следствие 3. Если $a = 0$, то $k_0 = k_0' = 2n + 1$, если же $a \neq 0$, $\alpha(z) = 0$, то

$$k_0 = k_0' = 2n - 2.$$

Таким образом, мы установили, что число линейно-независимых решений существенно зависит от сдвига $\alpha(z)$, входящего в граничное условие (39).

Մ. Ա. ԶԻՐՈՅԱՆ. Եզակիություններով բարձր կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումները անալիտիկ ֆունկցիաների դասերում և նրանց կիրառությունը *(ամփոփում)*։

Ներկայացվող հոդվածում ուսումնասիրվում է գծային սովորական դիֆերենցիալ հավասարումները անալիտիկ ֆունկցիաների դասերում եզակիություններով և շեղումներով։ Հոդվածում տրվում է այդպիսի հավասարումների լուծման արդյունավետ մեթոդներ։ Ստացված արդյունքները կիրառվում են Լապլասի հավասարման համար շեղումներով եզրային խնդիրների լուծման համար։

M. A. ZIROIAN. ***High order linear ordinary differential equations with singularity in a class of analytic functions and their applications*** **(summary)**

In the present paper there are studied ordinary differential equations with a shift and a singularity in a class of analytic functions. The effective method of solution such equations is given. The obtained results are used for solving a boundary problem with a shift for the Laplace equation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Ирицян.* Некоторые функциональные уравнения и их применение при решении задач типа Бицадзе-Самарского, Арм. НИИТИ, № 13, Ар-86, Деп.
2. *Н. Е. Товмасян.* Некоторые уравнения в Банаховых пространствах и их применение. Известия АН Арм. ССР, серия «Математика», VIII, № 3, 1972.
3. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения Физматгиз, М., 1962.