ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 5, 1991 Математика

УДК 517.53

Г. А. БАРСЕГЯН, В. И. БЕЛЫЙ

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ФУНКЦИЙ, ОБРАТНЫХ К МЕРОМОРФНЫМ, НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

При рассмотрении приближений возможно простыми агрегатами функций $z = F(w)$, аналитических на римановой поверхности R, интуитивно напрашивается следующий подход.

Риманова поверхность R разбивается на листы, и на каждом из листов функция $F(w)$ приближается, например, обычными полиномами. Мы не знаем результатов, относящихся к такой постановке (хотя она близка к классической) и, видимо, дело здесь в том, что вообще говоря, разбиение наперед заданной римановой поверхности на листы задача необозримая, требующая детального знания этой поверхности. Заметим, что если на R имеется особенность w_0, алгебраическая или трансцендентная, то $\overline{\lim\limits_{w\to w_0}} |F'(w)| = \infty$, так что приближение полиномом невозможно на всем листе, имеющем в качестве граничного элемента эту особенность w_0. Поэтому, если хотим приблизить $F(w)$ полиномами, придется из R выбросить некоторые окрестности ее особенностей.

Учитывая эти особенности, поставим задачу следующим образом: выделить из R по возможности малое число однолистных областей (листов) так, чтобы суммарная площадь этих листов была бы близка к площади всей поверхности R, и на каждом из листов приблизить $F(w)$ полиномом $p_N(w)$ степени N, где N по возможности мало. При этом малость N указывает на то, что функция $F(w)$ относительно просто устроена на листе, на котором осуществляется приближение полиномом $p_N(w)$.

Рассмотрим эту задачу для функций $F(w)$, обратных к мероморфным в C функциям $w(z)$, для которых имеем достаточно информации о проведении указанных выше листов (см. [1]). Напомним, что характеристика Л. Альфорса

$$A(r) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|z|<r} \frac{|w'|^2\, d\sigma}{(1+|w|^2)^2}$$

указывает среднее число листов римановой поверхности $F_r = \{w(z) : |z| \leqslant r\}$, являющейся w-образом круга $|z| \leqslant r$, и что $\pi A(r)$ — сферическая площадь поверхности F_r.

Следующие два результата, описывающие наиболее интересные крайние случаи, являются непосредственными следствиями общей теоремы 3.

Теорема 1. *Пусть* $w(z)$ — *мероморфная в* C *функция,* $\varepsilon > 0$. *Тогда из римановой поверхности* F_r *для каждого* r *можно выделить* $A(r)$ *таких однолистных областей* $D_i(r)$, $i = 1, 2, \cdots, [A(r)]$, *что*

$$\left\{\sum_{i=1}^{[A(r)]} S(D_i(r)/\pi A(r)\right\} \to 1, \quad r \to \infty, \quad r \bar{\in} E, \tag{1}$$

где $S(X)$ — *сферическая площадь* X, E — *некоторое множество конечной логарифмической меры; и*

$$|F(w) - p_N^{(i)}(w)| < \varepsilon, \quad w \in D_i(r), \quad i = 1, 2, \cdots, [A(r)], \tag{2}$$

где $p_N^{(i)}(w)$ — *полиномы степени* N, *где* $N = N(r) = o(r^2)$.

Теорема 2. *Если нижний порядок функции* $w(z)$ *в теореме* 1 *больше двух, то теорема* 1 *справедлива, если в ней неравенство* (2) *заменить следующим:*

$$|F(w) - p^{(i)}| < \varepsilon, \quad w \in D_i(r), \quad i = 1, 2, \cdots, [A(r)], \tag{3}$$

где $p^{(i)}$ — *постоянные,* $i = 1, 2, \cdots, A(r)$.

Теоремы 1 и 2 показывают, что на F_r можно выделить $[A(r)]$ „листов", сумма сферических площадей которых „почти" совпадают со сферической площадью всей поверхности F_r и на каждом листе $F(w)$ приближается полиномом степени $N = o(r^2)$ (приближается постоянной) Отметим, что число выделяемых листов $(=[A(r)])$ — оптимальное, в силу определения $A(r)$ — „среднего числа листов". В общем случае имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть* $\psi(r)$ — *произвольная монотонная функция, стремящаяся к* $+\infty$ *при* $r \to \infty$. *Тогда в теореме* 1 *в качестве* $N = N(r)$ *можно взять*: 1) *либо целое число не меньшее*

$$\max\left\{\psi(r), \frac{\psi(r) r^2}{\varepsilon^2 A(r)}\right\},$$

либо 0 — *в зависимости от* i; 2) *либо целое число, определяемое из условия*

$$\frac{N+1}{\ln(N+2)} > \frac{\psi^2(r) r^2}{\varepsilon A(r)}$$

либо 0 — *в зависимости от* i.

Отметим, что первая часть теоремы 3 дает лучшую оценку N при $A(r)$, имеющих „медленный" рост; из нее с учетом того, что $\psi(r)$ может иметь произвольно медленный рост, следует теорема 1. Вторая часть теоремы 3 дает лучшую оценку, когда $A(r)$ имеет „быстрый рост"; из нее следует теорема 2.

Перейдем к доказательству теоремы 3. Мы существенно опираемся на результаты и конструкцию доказательства следующего утверждения ([1], теоремы 1, 2); мы приводим менее точный вариант, являющийся непосредственным следствием этого утверждения.

Теорема А. *Пусть* $w(z)$ — *мероморфная в* C *функция,* $\varphi(r)$ — *монотонная функция, стремящаяся к* $+\infty$ *при* $r \to \infty$. *Тогда для* *любого* r *в круге* $|z| \leq r$ *можно выделить* $\Phi(r)$ *областей* $E_i(r)$, $i=1, 2, \cdots, \Phi(r)$ *таких, что*

I. $w(z)$ — *однолистна в* $\overline{E_i(r)}$, $i=1, 2, \cdots, \Phi(r)$; $C \setminus \{w(E_i(r))\}$ *состоит из некоторого числа* $k_i = k_i(r)$ *односвязных областей* Δ_j^i, $j=1, 2, \cdots, k_i(r)$, *сферический диаметр каждого из которых стремится к нулю при* $r \to \infty$;

II. $\Phi(r) = A(r) + o[A(r)]$, $r \to \infty$, $r \notin E$,

где E — *некоторое множество конечной логарифмической меры*;

III. $\sum_{i=1}^{\Phi(r)} k_i(r) \leq 4A(r) + o[A(r)]$, $r \to \infty$, $r \overline{\in} E$;

IV. $\operatorname{diam}(E_i(r)) \leq \varphi(r)\, r / A^{\frac{1}{2}}(r)$, $i=1, 2, \cdots, \Phi(r)$.

Кстати, теорема 2 может быть легко выведена непосредственно из теоремы А. Нам понадобятся конструкции областей $w(E_i(r))$, которые уже приведены в [1], и некоторые их метрические соотношения. Сохраняя за описываемыми конструкциями те же обозначения, что и в [1], будем указывать лишь те свойства, которые нам понадобятся. Области у нас конструируются на римановой сфере S, и мы пользуемся полярными координатами в трехмерном пространстве — (φ, θ, ρ), где φ — угол в горизонтальной плоскости, θ — угол в вертикальной плоскости, ρ — модуль точки.

В дальнейшем у нас n — четное число ($n > 100$). Определим $\Gamma(k) = \Gamma(k, t) = \{\varphi(t), \theta(t), \rho(t)\}$ как кривые (на сфере) со следующими параметрическими представлениями:

$$\varphi(t) = \varphi(k, t) = 2\pi t + \frac{\pi k}{n^5-1}; \quad \theta(t) = \theta(k, t) = \frac{\pi t}{2n};$$

$$\rho(t) = \frac{1}{2}; \quad t \in [-(n-5), n+5], \ k = 0, 1, \cdots, n^5-1;$$

$D(r, a)$ — множество точек сферы, отстоящих от точки a (на сфере на сферическом расстоянии r.

Пусть $\Gamma^*(k) = \Gamma(k) \setminus \left\{ D\left(\frac{9}{n}, \infty\right) \cup D\left(\frac{9}{n}, 0\right) \right\}$, $k=0, 1, \cdots, n^5-1$. Среди этих кривых в [1] выделяются две кривые $\Gamma^*(2m_0-2)$ и $\Gamma^*(2m_0-1)$, удовлетворяющие определенным соотношениям. Через Γ' и Γ'' обозначаются соответственно кривые $\Gamma^*\left(2m_0 - 2 + \frac{1}{3}\right)$ и $\Gamma^*\left(2m_0 - 2 + \frac{2}{3}\right)$. Кривые $\Gamma^*(2m_0-2)$, $\Gamma^*(2m_0-1)$, $\partial D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$, $\partial D\left(\frac{9}{n}, 0\right)$ разбивают сферу S на четыре области. Обозначим $\dot{B}_0(n, 1)$ ту из них, которая содержит кривые Γ' и Γ''. Область $\dot{B}_0(n, 1)$, разбивается кривыми Γ' и Γ'' на три „подобные“ области, среднюю из которых, т. е. ту из них, граничными дугами которой являются кривые Γ' и Γ'', обозначим через $B_0(n, 1)$.

Очевидно, выполняется следующее свойство: 1) сферическое расстояние между кривыми Γ' и Γ'' не меньше величины $\frac{\pi}{6n^6}$.

Обозначим $C = A \sqcup B$ множество внутренних точек замыкания множества $A \cup B$; $B_0^*(n) = S \setminus \{B_0(n, 1) \sqcup D\left(\frac{9}{n}, \infty\right) \sqcup D\left(\frac{9}{n}, 0\right)$. Из области $B_0^*(n)$ выделяются области $\tilde{B}_m(n)$, ограничиваемые дугами больших окружностей сферы (проходящих через точку ∞ на сфере) и дугами кривых Γ' и Γ'' Число m меняется от $-\tau^{**}$ до τ^*, о величинах которых будет сказано дальше. Нам понадобятся следующие свойства. Свойство 2): длины каждой дуги $\partial\tilde{B}_m(n) \cap \Gamma''$ равна $\frac{1}{3n^6}$. Свойство 3): часть d_m^* кривой Γ'', заключенная между $\partial\tilde{B}_m(n) \cap \Gamma''$ и $\partial\tilde{B}_{m+1} \cap \Gamma''$, имеет длину не больше $3/n$ и не меньше $1/n$. Свойство 4): сферическое расстояние от точки ∞ (0) на сфере до $\tilde{B}_{\tau^*}(n)$ $(\tilde{B}_{-\tau^{**}}(n))$ не больше $\frac{10}{n}$ *. Обозначим через $\bar{B}_m(n)$, $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^* - 1$ среднею из трех областей, составляющих множество $B_0^*(n) \setminus \{\tilde{B}_m(n) \cup \tilde{B}_{m+1}(n)\}$, т. е. область, соседнюю как с $\tilde{B}(n)$ так и $\tilde{B}_{m+1}(n)$. Пусть M_{τ^*}—та из двух дуг большой окружности сферы, являющихся граничными для области $\bar{B}_{\tau^*}(n)$, которая не является граничной для области $D_{\tau^*-1}(n)$. Проведя сечение области $B_0(n, 1)$ линией, являющейся продолжением M_{τ^*} (в сторону точки ∞ на сфере) от точки на $\partial B_{\tau^*} \cap \Gamma''$ до кривой Γ'', рассечем область $B_0(n, 1)$ на две области. Обозначим $B(n, 2$ ту из этих двух областей, граница которой не имеет общих точек с границей области $D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$. Проделаем ту же процедуру с заменой τ^* на $-\tau^{**}$ и заменой ∞ на 0. В качестве аналога области $B_0(n, 2)$ получим некоторую область $B_0(n, 3)$. Обозначим $B_0(n) = B_0(n, 2) \cap B_0(n, 3)$; $D(\infty)$, $D(0)$ — ту из двух „улиткообразных" областей, составляющих множество $S \setminus \{B_0(n) \sqcup \tilde{B}_{\tau^*}(n) \sqcup D_{-\tau^{**}}(n) \sqcup \cdots \sqcup \sqcup D_{\tau^*-1}\}$, которая содержит точку ∞ (точку 0).

Заметим, что (свойство 5)) площадь каждого из множеств D_∞, $D(0)$, D_m, $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^* - 1$ не больше чем $\pi\left(\frac{11}{n}\right)^2$, (здесь не учли свойство 3)).

Пусть $\varphi(r)$ та же, что в теореме А. Выберем в качестве $n = n(r)$ ближайшее к $\varphi(r)$ четное число $n > \varphi(r)$. При $r > r_0$ очевидно выполняется наше предположение $n > 100$.

---

* Мы не определяли значений чисел $-\tau^{**}$ и τ^* (см. их определение в [1]), однако нам важно в их определении лишь выполнение свойства 4) и того, что описанное ниже продолжение M_{τ^*} достигает линии Γ'.

Из доказательства теоремы А ([1], теорема 1) следует, что $\overline{w(E_i(r))}$ содержит в себе множество $D_i^*(r) = [S \setminus \partial B_0(n(r)) \cap \Gamma'] \setminus K$, где K — совокупность $k_i(r)$ областей Δ_j^i типа $D(\infty)$, $D(0)$, D_m, $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^* - 1$, где все линии и области зависят от $n(r)$, а $k_i(r)$ то же, что в теореме А.

Пусть $D_i^{**}(r) = D_i^*(r) \setminus D'(\infty)$, где $D'(\infty)$ — соединение $D(\infty)$ с непосредственно примыкающей к $D(\infty)$ частью области $B_0(n)$ (это часть, отсекаемая от $B_0(n)$ продолжением M_{-0} в сторону, противоположную к ∞ на сфере). Отобразим эту область $D_i^{**}(r)$ стереографически на плоскость. Сохраняя для плоскости те же обозначения, что и на сфере, заметим, что наименьшая „толщина" области $B_0(n)$ (на плоскости) достигается у точки 0. Из свойства 1), пользуясь формулой сферического расстояния между двумя точками, находим, что расстояние (на плоскости) между двумя линиями Γ' и Γ'' больше, чем $c_1/\varphi^6(r)$, $c_1 = \text{const} > 0$. Из тех же соображений получаем, что минимальная длина $\partial \bar{B}_m(n) \cap \Gamma''$ достигается при $m = -\tau^{**}$ и оценивается снизу через $c_2/\varphi^6(r)$ (см. свойство 2)). Заметим, что в силу свойства 2) область $D_i^{**}(r)$ лежит в $\{w: |w| \leqslant c_3\varphi(r)\}$, $c_3 = \text{const} < \infty$.

Очертим внутри области $D_i^{**}(r)$, около ее границы, полоски ширины $c_4/\varphi^7(r)$, $c_4 = \min(c_1, c_2)$. Если отнять от $D_i^{**}(r)$ эту полоску, получим область $D_i'(r)$. Проделав ту же процедуру с $D_i'(r)$, то есть, отняв от нее полоску ширины $c_4/\varphi^7(r)$, примыкающую к границе $D_i'(r)$, получим искомую область $D_i(r) \subset D_i'(r)$.

Нам понадобятся следующие очевидные из построений свойства этих областей. Для каждого i: I. $D_i(r)$, $D_i'(r)$ — односвязны. II. Расстояние δ от $D_i(r)$ до $D_i'(r)$ не меньше $c_4/\varphi^7(r)$. III. $D'(r)$ лежит в круге радиуса $d = c_3\varphi^2(r)$. Функция $F(w)$ аналитична в области $D_i'(r)$.

Заметим, что сферическая площадь $S(D_i(r))$ есть $\{\pi$ (т. е. площадь всей сферы) отнять [сферические площади описанных выше двух полосок, плюс сферическая площадь $D(\infty)$, плюс суммарная сферическая площадь $k(r)$ штук областей типа $D(\infty)$, $D(0)$, D_m; $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^* - 1]\}$. „Ширина" полосок не больше $2c_4/\varphi^7(r)$; „длина", складывающаяся из длин частей граничных кривых областей $B_0(n)$, $\tilde{B}_m(n)$, $D(\infty)$, $D(0)$, легко видеть, не превосходит $c_5\varphi^2(r)$, $c_5 = \text{const} < \infty$. Таким образом, площадь полосок не больше $4c_4c_5/\varphi^5(r)$. Учитывая еще свойство 5), получим

$$0 \leqslant \Phi(r)\pi - \sum_{i=1}^{\Phi(r)} S(D_i(r)) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4c_4c_5}{\varphi^5(r)}\Phi(r) + \frac{\sum_{i=1}^{\Phi(r)} (k_i(r)+1)\pi(11)^2}{\varphi^2(r)}. \tag{5}$$

Перейдем к оценкам степеней полиномов, приближающих на $D_l(r)$ функцию $F(w)$.

Пусть G — односвязная область; $\Phi(z)$ — конформное отображение $\Omega = C\overline{G} = C \setminus \overline{G}$ на $\Omega' = \{w: |w| > 1\}$ с нормировкой $\Phi(\infty) = \infty$, $\lim\limits_{z\to\infty} \Phi(z)/z = \frac{1}{c} > 0$, где $c = \operatorname{cap} \overline{G}$ — конформная емкость $\overline{G}$; $L_{1+\tilde{u}}$ — прообраз окружности $|w| = 1 + \tilde{u}$, $\tilde{u} > 0$, в z-плоскости; $G_{1+\tilde{u}}$ — область, ограничиваемая кривой $L_{1+\tilde{u}}$. Мы будем пользоваться следующими теоремами В и С (см. [2], стр. 139, теорема 2, соотношение 2), стр. 142, теорема 3, соотношение 1)).

Теорема В. *Пусть G — замкнутая односвязная область со связным дополнением, $f(z)$ — функция, регулярная в $G_{1+\tilde{u}}$, причем*

$$|f(z)| < M \text{ при } z \in L_{1+\tilde{u}}.$$

Тогда существует полином $p_N(z)$ такой, что

$$|f(z) - p_N(z)| \leqslant M \left[2\sqrt{e}\frac{1+\tilde{u}}{\tilde{u}} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{(N+1)(1+\tilde{u})^2}{(1+\tilde{u})^2 - 1} + \frac{(1+\tilde{u})^2}{(1+\tilde{u})^2 - 1} \ln(N+2) \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left(\frac{1}{1+\tilde{u}} \right)^{N+1}, \tag{6}$$

при $z \in \overline{G}$, $N+1 > (\sqrt{1+\tilde{u}} - 1)^{-1}$.

Теорема С. *В условиях теоремы* В *выполняется неравенство*

$$|f(z) - p_N(z)| \leqslant M \frac{1+\tilde{u}}{\tilde{u}} \left[\sqrt{N+1} (\ln(N+2) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\ln \frac{(1+\tilde{u})^2}{(1+\tilde{u})^2 - 1}} + \sqrt{e} \right] \left(\frac{1}{1+\tilde{u}} \right)^{N+1} \text{ при } z \in \overline{G}. \tag{7}$$

Теоремы В и С изложены после пересчета порядка линий уровня в соответствии с замечанием 1 на стр. 128 книги [2].

В нашей ситуации мы знаем лишь область G, и чтобы воспользоваться этими теоремами, нам нужно найти некоторое $\tilde{u} > 0$, при котором $f(z)$ окажется регулярной в области $G_{1+\tilde{u}}$.

Пусть $f(z)$ регулярна в области $G(\delta)$ с жордановой границей, которая содержит $\overline{G}$ и такая, что расстояние $\rho(\partial G(\delta), \partial G) > \delta > 0$. Кривая $\tilde{L} = \partial G(\delta)$ перейдет в $\tilde{L}'$ во внешности единичного круга.

Пусть кратчайшее расстояние между $|w|=1$ и $\bar{L}'$ реализуется на радиальном отрезке $\overline{w_1 w_2}$, $|w_1|=1$, $|w_2|=1+u$. Тогда прообраз окружности $|w|=1+u$ в плоскости z есть линия уровня L_{1+u} порядка $1+u$ для $\bar{G}$, полностью принадлежащая $G(\delta)\setminus G$, причем максимальная (по u).

Если мы оценим снизу величину u по метрическим данным δ и $d=\operatorname{diam}\bar{G}$, то в области $G_{1+\tilde{u}}$, $0<\tilde{u}=\tilde{u}(\delta, d)<u$, функция $f(z)$ окажется регулярной.

Пусть $z_1=\Phi^{-1}(w_1)$; $z_2=\Phi^{-1}(w_2)$; D_R — круг с центром в точке $z_1\in L$, содержащий $\bar{G}$; $m(z_1, z_2, \partial D_R)$ — модуль семейства кривых, отделяющих в $D_R\setminus G$ точки z_1 и z_2 от ∂D_R;

$$\mu_\infty(z_1, z_2, \Omega)\overset{\mathrm{def}}{=}\lim_{R\to\infty}\left[m(z_1, z_2, \partial D_R)-\frac{1}{2\pi}\ln R\right] \tag{8}$$

— приведенный относительно ∞ модуль семейства кривых, отделяющих в Ω точки z_1 и z_2 от ∞ (см. [3]).

Как установлено в [4], см. также [5], справедливо точное соотношение

$$\frac{u}{1+u}=2\sqrt{\frac{1}{c}}\,e^{-\pi\mu_\infty(z_1, z_2, \Omega)}. \tag{9}$$

Для того, чтобы выбрать $\tilde{u}$, оценим сверху величину $\mu_\infty(z_1, z_2, \Omega)$, основываясь на том, что всякая отделяющая точки z_1 и z_2 от ∞ кривая, замыкающаяся на границу $L=\partial G$, должна иметь длину $\geqslant 2\delta$.

Воспользуемся тем, что (см. [3])

$$m(z_1, z_2, \partial D_R)=\inf_{\rho\in P_L} A(\rho)\leqslant A(\rho^*)=\iint_C[\rho^*(z)]\,dx\,dy$$

согласно L-определению модуля, где ρ^* — любая допустимая в L-определении модуля функции. Возьмем в качестве ρ^* функцию

$$\rho^*(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\delta}, & z\in\{\{z:|z-z_1|\leqslant d+2\delta<R\}\setminus\bar{G}\};\\[2ex] \dfrac{1}{2\pi|z-z_1|}, & z\in\{\{z:d+2\delta\leqslant|z-z_1|\leqslant R\}\setminus\bar{G}\};\\[2ex] 0 \text{ вне } D_R \text{ и в области } \bar{G}.\end{cases}$$

Эта функция допустима в L-определении модуля, так как для каждой отделяющей кривой γ легко проверить, что выполняется

$$\int_\gamma\rho^*(z)\,|dz|\geqslant 1.$$

Тогда

$$m(z_1, z_2, \partial D_R) \leqslant A(\rho^*) \leqslant \iint\limits_{|z-z_1|<d+2\delta} \frac{1}{4\delta^2}\, dx dy +$$

$$+ \iint\limits_{d+2\delta < |z-z_1| < R} \frac{1}{4\pi^2 |z-z_1|^2}\, dx dy = \frac{\pi(d+2\delta)^2}{4\delta^2} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{d+2\delta}^{R} \frac{dt}{t} = \frac{\pi(d+2\delta)^2}{4\delta^2} + \frac{1}{4\pi} \ln \frac{R}{d+2\delta} <$$

$$< \frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 + \frac{1}{2\pi} \ln R.$$

Отсюда, учитывая (8), имеем

$$\mu_0(z_1, z_2, \Omega) < \frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2. \tag{10}$$

Для конформной емкости c известна оценка $\frac{d}{4} \leqslant c \leqslant d$, так что из (9) и (10) получим

$$u > 2\sqrt{\frac{1}{c}}\, e^{-2\pi\mu_0(z_1, z_2, \Omega)} > 2\sqrt{d^{-1}}\, e^{-\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2}. \tag{11}$$

Итак, $\tilde{u}$ можно взять равным величине $2\sqrt{d^{-1}}\, e^{-\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2}$. Применим теперь теорему Б к нашей функции $F(w)$ в $D_l(r)$ (которая выполняет роль области G в теореме В). Роль области $G_{1+\tilde{u}}$ выполняет некоторая область $D_{l,\,1+\tilde{u}}(r)$, которая определяется через $D_l(r)$ и $D_l'(r)$ точно так же, как определяется $G_{1+\tilde{u}}$ через G и $G(\delta)$.

Учитывая свойства II и III областей $D_l(r)$, $D_l'(r)$ для величины $\tilde{u}$, имеем в нашем случае

$$\tilde{u} = 2\sqrt{d^{-1}}\, e^{-\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2} = \sqrt{c_3}\,\varphi(r)\, e^{-\frac{\pi^2}{2}\varphi^{18}(r)\left(\frac{c_3}{c_4}\right)^2} =$$

$$= c_6\varphi(r)\, e^{-c_7\varphi(r)}, \quad c_6,\ c_7 = \text{const} > 0. \tag{12}$$

Пусть w_l — произвольная точка из $D_l(r)$, $i = 1, 2, \cdots, \Phi(r)$. Запишем теорему В для функции $F(w) - F(w_l)$, регулярной в области $D_{l,\,1+\tilde{u}}(r)$, взяв при этом

$$N + 1 > \frac{3}{\tilde{u}} > \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{u}} - 1}. \tag{13}$$

После некоторых упрощений, учитывая, что $\tilde{u}$ мало и $(1+\tilde{u})^{N+1} > > 1 + (N+1)\tilde{u}$, имеем при $w \in \overline{D_i(r)}$

$$|F(w) - F(w_i) - p_N^i(w)| < M_i\Bigg[2\sqrt{e}\left(1 + \frac{1}{\tilde{u}}\right) +$$

$$+\left(\frac{N+1}{\left(1-\frac{1}{1+\tilde{u}}\right)^2} + \frac{\left(1+\tilde{u}\right)^2}{\left[\left(1+\tilde{u}\right)^2-1\right]^2}\ln(N+2)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1+\tilde{u}}\right)^{N+1} <$$

$$< \frac{2M_i}{\tilde{u}}\left(\left(\sqrt{e} + \sqrt{N+1+\ln(N+2)}\right)\right)\left(\frac{1}{1+\tilde{u}}\right)^{N+1} < \tag{14}$$

$$< \frac{4eM_i\sqrt{N+1}}{\tilde{u}\left(1+(N+1)\tilde{u}\right)} < \frac{4eM_i}{\tilde{u}^2\sqrt{N+1}}.$$

Из теоремы А, учитывая что $D_i(r) \subset w(\overline{E_i(r)})$, имеем оценку

$$M_i = \sup_{w \in D_i(r)} |F(w) - F_i| \leqslant \frac{\varphi(r)\, r}{A^{1/2}(r)},$$

так что из (12) и (14) получаем

$$|F(w) - F(w_i) - p_N^i(w)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4e}{c_6^2}\,\frac{e^{2c_1\varphi^{18}(r)}}{\varphi(r)}\cdot\frac{r}{\sqrt{A(r)}\sqrt{N+1}}. \tag{15}$$

Для функции $\psi(r)$ из теоремы 1, выберем $\varphi(r)$ (в теореме А) так, чтобы последнее соотношение равнялось бы $\frac{\sqrt{\psi(r)}\, r}{\sqrt{A(r)}\sqrt{N}}$; условие (13) в этом случае будет заведомо выполняться при

$$N = N(r) > \psi(r),\ r > r_0.$$

Отсюда и из (15) для заданного $\varepsilon > 0$ получим, что для любого целого $N > \max\left\{\psi(r),\ \frac{\psi(r)\, r^2}{\varepsilon^2 A(r)}\right\}$ можно указать такой полином $P_N^{(i)}(w)$, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{gathered}|F(w) - F(w_i) - p_N^{(i)}(w)| = |F(w) - P_N^{(i)}(w)| < \varepsilon,\\ w \in D_i(r),\ i = 1, 2, \cdots, \Phi(r),\end{gathered} \tag{16}$$

где $P_N^{(i)} = p_N^{(i)} + F(w_i)$ — полином степени N.

В случае, если ожидается, что степень N полинома может быть меньше указанного числа, вместо теоремы В воспользуемся теоремой С, в которой N уже не ограничивается снизу.

Используя схему вывода неравенства (14) в теореме В, из теоремы С получим (очень грубо) следующую оценку:

$$|F(w)-F(w_l)-P_N^{(l)}(w)|<\frac{6eM_1\sqrt{\pi\,(2l(\bar u))}}{\bar u^2}\cdot\frac{\sqrt{\ln(N+2)}}{\sqrt{N+1}}<$$

$$<\frac{\sqrt{\psi(r)}}{\sqrt{A(r)}}\cdot\frac{\sqrt{\ln(N+2)}}{\sqrt{N+1}}.$$

Здесь мы учли определение $\psi(r)$. Теперь ясно, что при N, определяющемся из условия

$$\frac{N+1}{\ln(N+2)}<\frac{\psi(r)\,r^2}{\varepsilon^2 A(r)},$$

имеем оценку (16). В этом варианте при быстром росте $A(r)$ величина N может быть уже малой или даже равной нулю.

Таким образом, мы выделяли из F_r $\Phi(r)$ штук областей $D_i(r)$, $i=1,\cdots,\Phi(r)$, в каждой из которых $F(w)$ равномерно приближается полиномом с указанной в теореме 3 степенью. Теперь, если $\Phi(r)\geqslant[A(r)]$, выбросим из областей $D_i(r)$, $i=1,2,\cdots,\Phi(r)$ области с номерами $i\geqslant[A(r)]+1$. Для оставшихся областей $D_i(r)$, $i=1,2,\cdots,[A(r)]$, учитывая оценки величин $\Phi(r)$, $\sum_{i=1}^{\Phi(r)}k_i(r)$, приведенные в теореме A, из неравенства (5) легко выведем соотношение (1) теоремы 1. Тем самым теорема 3 доказана при $\Phi(r)\geqslant[A(r)]$. Если же $\Phi(r)<[A(r)]$, то добавим к областям $D_i(r)$, $i=1,2,\cdots,\Phi(r)$), $[A(r)]-\Phi(r)$ штук областей из $F_r\setminus\sum_{i=1}^{\Phi(r)}D_i(r)\,(\neq\varnothing)$, сумма площадей которых меньше 1 и таких, что в каждой из этих областей функция $F(w)$ равномерно приближается постоянной. Ясно, что (1) выполняется и для этой новой совокупности областей $D_i(r)$, где i уже изменяется от 1 до $[A(r)]$ и что для $w\in D_i(r)$ степень N определяется согласно теореме 3.

Институт математики
АН Армении

Поступила 10.VII.1989

Գ. Ա. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ, Վ. Ի. ԲԵԼԻՅ. Մերոմորֆ ֆունկցիաներին հակադարձ ֆունկցիաների բազմանդամային մոտարկումների մասին Ռիմանի մակերևույթի վրա: *(ամփոփում)*

Ներկա հոդվածում հետազոտվում են մերոմորֆ ֆունկցիաներին հակադարձ R Ռիմանյան մակերևույթի վրա դիտարկվող F(w) ֆունկցիաների բազմանդամային մոտավորությունները։ R-ից անջատվում է փոքր թվով միաթերթ տիրույթներ, որոնց գումարային մակերեսը լինի մոտիկ R-ի ամբողջ մակերեսին։ Ամեն մի R-ի թերթի վրա իրագործվում է F(w) ֆունկցիայի մոտարկումը $p_N(w)$ N աստիճանի բազմանդամով ընդ որում N-ի փոքրությունը վկայում է F(w) ֆունկցիայի համեմատական կառուցվածքի մասին։

G. A. BARSEGIAN, V. I. BELIY. *On polynomial approximation of functions which are inverse to the meromorphic functions on the Rimann surface* (summary)

In this paper the problem of approximation of functions $F(w)$ on the Riemann surfaces R which are inverse to the meromorphic functions is solved. We extract from R the possible small number of univalent domains such that their total area

is "close" to the area of the whole surface R. On each sheet of Riemann surfaces we appoximate $F(w)$ by polinomials $p_N(w)$ of N degree with the smallest N. The smallness of N shows that $F(w)$ has rather simple construction on each sheet where the approxeimation is carried out.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. А. Барсегян.* Свойство близости a-точек мероморфных функций и структура однолистных областей римановых поверхностей. Изв. АН АрмССР, сер. матем.; часть I: 1985, т. 20, № 5, 375—400; часть II: 1985, т. 20, № 6, 407—425.
2. *В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.—Л., 1964, «Наука», 438 с.
3. *В. И. Белый.* Конформные отображения и приближение функций в областях с квазиконформной границей. Матем. сб., 1977, т. 102 (144), № 3, 331—361.
4. *В. И. Белый.* Метод конформных инвариантов в теории приближения функций комплексного переменного. Автореф. докт. диссерт., Киев, 1978, 22 с.
5. *V. I. Bely* Development of the method of conformal invariants and quasiconformal quasi-invariants from the vievpoint of application to problems of polynomial approximation. Approximation and functional spaces, Proc. of Intern. Conf. held in Gdansk, Aug. 27—31, 1979, 1981, North—Holland Publ. Comp., Amsterdam, N. Y., Oxford, PWN—Polish Sc. Puliishers, 102—121.