ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

XXVI № 5, 1991

УДК 517. 53

Р. А. АВЕТИСЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ПРОСТЫХ ДРОБЕЙ В ОБЛАСТЯХ С ЛИПШИЦЕВОЙ ГРАНИЦЕЙ

Введение

Вопрос о разложении аналитических функций в ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\zeta_k - z}$$

с определенными ограничениями на последовательность полюсов ζ_k и коэффициентов A_k изучался в ряде работ. Д. Вольф [1] доказал следующую теорему.

Теорема. *Пусть G — ограниченная жорданова область, и пусть f аналитична в замкнутой области. Тогда f может быть разложена в G в ряд вида*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\zeta_k - z}, \; \zeta_k \overline{\in} \overline{G}, \tag{1}$$

где $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < +\infty$.

В дальнейшем в работах [2]—[14] получены различные обобщения и уточнения теоремы Д. Вольфа (подробный обзор этих работ см. [7], [14]). В настоящей статье рассматривается вопрос о представлении аналитических внутри и непрерывных в замыкании липшицевой области G функций f рядами вида (1) с оценкой скорости сходимости ряда (1) к функции f в равномерной норме в $\overline{G}$. В качестве следствия полученных оценок разности между f и некоторой последовательностью частичных сумм ряда (1) функции f мы покажем (следствие 2), что величина наилучшего разномерного приближения функции f рациональными функциями степени не выше n имеет порядок $O\left(\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)\right)$, где $\omega(\delta, f)$ — модуль непрерывности f в G. Как известно в случае равномерного приближения полиномами эта оценка не имеет места ([15], [16], стр. 478). Отметим также связанные с теоремами 1, 3 результаты работ [17], [18] о наилучших приближениях рациональными функциями в комплексной области.

Чтобы сформулировать результаты настоящей статьи введем некоторые обозначения. Как обычно под липшицевой областью мы будем понимать ограниченную жорданову область G с липшицевой границей γ, то есть γ удовлетворяет следующему условию: если $z_1, z_2 \in \gamma$, то длина $s(z_1, z_2)$ кратчайшей из дуг, соединяющих точки z_1, z_2 на γ, удовлетворяет следующему условию

$$s(z_1, z_2) < A|z_1 - z_2|, \tag{2}$$

где $A \geqslant 1$ — не зависит от z_1 и z_2.

Если G — область в C, то через $A(\overline{G})$ мы будем обозначать множество функций, аналитических в G и непрерывных в $\overline{G}$. Напомним, что для $f \in A(\overline{G})$ модуль непрерывности f в $\overline{G}$ это величина

$$\omega(\delta, f) = \max_{|z_1 - z_2| < \delta} |f(z_1) - f(z_2)|, \quad z_1, z_2 \in \overline{G}, \ \delta > 0.$$

Для ряда вида (1) положим

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{\zeta_k - z}.$$

Теорема 1. *Пусть G — липшицевая область и $f \in A(\overline{G})$. Тогда f можно сопоставить ряд вида* (1), *выбор полюсов которого не зависит от f такой, что*

$$|f(z) - S_n(z)| < c_1 \log n\, \omega\left(\frac{1}{n}, f\right), \text{ при } z \in \overline{G}, \ n = 1, 2, \cdots, \tag{3}$$

$$|A_k| < c_2\, \omega\left(\frac{1}{k}, f\right)/k, \quad k = 1, 2, \cdots \tag{4}$$

$$|f(z) - S_{n_k}(z)| < c_3\, \omega(10^{-k}, f), \text{ при } z \in \overline{G}, \ k = 1, 2 \cdots, \tag{5}$$

где $n_k \leqslant q(10^k - 1)$, $q = q(G)$ — зависит только от G, c_i, $i = 1, 2, 3$ постоянные, не зависящие от n, k и z.

Непосредственно из теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Пусть G — липшицевая область и $f \in A(\overline{G})$. Если*

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta, f) \cdot \log \frac{1}{\delta} = 0, \tag{6}$$

то f представляется в $\overline{G}$ в виде ряда (1) *и имеют место неравенства* (3)—(5).

Если наложить на $\omega(\delta, f)$ более сильное чем (6) условие

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta, f)}{\delta} d\delta < +\infty \tag{7}$$

и не требовать выполнения условий (3)—(5), то может быть доказана

Теорема 2. *Пусть G — липшицевая область, $f \in A(\overline{G})$ и f удовлетворяет* (7). *Тогда f можно представить в $\overline{G}$ в виде ряда* (1), *сходящегося абсолютно-равномерно в $\overline{G}$.*

Очевидно, что следствие 1 и теорема 2 являются обобщением теоремы Д. Вольфа в случае липшицевых областей. В определенном смысле точность условий (6)—(7) показана в [7].

Из теоремы 1 получаем также оценку наилучшего равномерного приближения рациональными функциьми функций $f \in A(\overline{G})$ для липшицевых областей G.

Следствие 2. *Пусть G — липшицевая область и $f \in A(\overline{G})$. Существуют рациональные функции $r_n(z)$ вида*

$$r_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^n}{\zeta_k^n - z}, \quad \zeta_k^n \in \overline{G}$$

такие, что

$$|f(z) - r_n(z)| \leqslant c_4 \omega\left(\frac{1}{n}, f\right), \text{ при } z \in \overline{G},\ n = 1, 2 \cdots,$$

$$|A_k^n| \leqslant c_5 \omega\left(\frac{1}{k}, f\right)/k,\ k = 1, 2 \cdots n,$$

где c_4 и c_5 не зависят от n, k и z.

Для некоторых классов функций из $A(\overline{G})$ можно получить обращение теоремы 1. Для этого введем рациональные функции

$$R_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^n}{\zeta_k - z}, \tag{7'}$$

где $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность точек, построенная в теореме 1. Обозначим через $\mathrm{Lip}_\alpha(\overline{G})$, $0 < \alpha < 1$ множество функций из $A(\overline{G})$, таких, что

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant K|z_1 - z_2|^\alpha,\ z_1, z_2 \in \overline{G}.$$

Теорема 3. *Пусть G — липшицевая область. Функция $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\overline{G})$ $0 < \alpha < 1$ тогда и только тогда, когда существуют R_n вида (7′) такие, что*

$$|f(z) - R_n(z)| \leqslant c_6 n^{-\alpha},\ n = 1, 2 \cdots \text{ при } z \in \overline{G},$$

$$|A_k^n| \leqslant c_7 k^{-(1+\alpha)},\ k = 1, 2 \cdots n,$$

где c_6 и c_7 не зависят от n и z.

Результаты настоящей статьи доложены на Международной конференции по теории приближений (Киев, 1983) и анонсированы в тезисах этой конференции [21].

§ 1. Основные леммы

Доказательство теоремы 1 основывается на нескольких леммах. Для того чтобы сформулировать их нам понадобятся некоторые дополнительные обозначения (определения).

1. Если $z_1, z_2 \in \gamma = \partial G$, то через (z_1, z_2) будем обозначать кратчайшую из дуг, соединяющих z_1 и z_2 на γ, а ее длину будем обозначать через $s(z_1, z_2)$.

2. Если $E, F \subset \mathbf{C}$, то положим

$$\rho(E, F) = \inf_{z \in E} \inf_{\zeta \in F} |\zeta - z|,$$

$$E_\delta = \{z \in \mathbf{C} : \rho(z, E) \leqslant \delta\}.$$

3. Нам понадобятся специальные жордановые кривые γ_ε и τ_ε, аппроксимирующие кривую $\gamma=\partial G$. Для простоты изложения всюду в дальнейшем будем считать, что $L=$ дл. $\gamma\geqslant 1$. Обозначим через $z(s)$ натуральное уравнение кривой γ, $s\in[0, L]$. Возьмем $\varepsilon\in(0, 1]$ и числа $s_k\in[0, L]$ такие, что $0=s_1<s_2<\cdots<s_n=L$, $\varepsilon/2\leqslant s_{k+1}-s_k\leqslant\varepsilon$, $k=1, 2,\cdots, n-1$, где $n\leqslant 2L/\varepsilon$. Положим $z_k=z(s_k)$ и вокруг каждой точки z_k возьмем круг $D(z_k, 2\varepsilon)=\{z\in\mathbf{C}:|z-z_k|\leqslant 2\varepsilon\}$. Ясно, что из множества $\partial\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} D(z_k, 2\varepsilon)\right)$ можно выделить жордановые кривые γ_ε и τ_ε такие, что G лежит внутри γ_ε, $\tau_\varepsilon\subset G$ и верны неравенства

$$\varepsilon/2\leqslant\rho(\gamma_\varepsilon, \gamma)\leqslant 2\varepsilon,\quad \varepsilon/2\leqslant\rho(\tau_\varepsilon, \gamma)\leqslant 2\varepsilon, \tag{8}$$

$$s(\gamma_\varepsilon),\ s(\tau_\varepsilon)\leqslant 8\pi L. \tag{9}$$

4. *Для непрерывной в* $\mathbf{C}$ функции φ положим

$$g_\varepsilon(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\varepsilon}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{10}$$

5. Определим теперь рациональные функции, участвующие в формулировке леммы 1. Для этого возьмем на кривой γ_ε точки $\zeta_1,\cdots,\zeta_{m+1}$, расположенные на γ_ε в порядке возрастания индекса при заданном направлении обхода такие, что $s(\zeta_k, \zeta_{k+1})\leqslant 8\pi L/m$, $k=1, 2,\cdots, m$, где $m\geqslant 64\pi L/\varepsilon$, $\zeta_1=\zeta_{m+1}$. Положим для g_ε определенной по формуле (9)

$$r_m(g_\varepsilon, z)=\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k}{\zeta_k-z},\quad A_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\zeta_k, \zeta_{k+1})}\varphi(\zeta)\,d\zeta. \tag{11}$$

Докажем теперь лемму 1, являющуюся обобщением леммы 1 из [3] (см. также [7]).

Лемма 1. *Пусть G — липшицевая область,* $\varepsilon\in(0, 1]$ *и функции g_ε и r_m определены по формулам* (10), (11). *Тогда*

$$|g_\varepsilon(z)-r_m(g_\varepsilon, z)|\leqslant\frac{a_1}{m\cdot\varepsilon}\cdot\max_{\zeta\in\gamma_\varepsilon}|\varphi(\zeta)|,\ \text{при}\ z\in G_{\varepsilon/4}, \tag{12}$$

где a_1 зависит только от G.

Доказательство. Заметим, что при $\zeta\in(\zeta_k, \zeta_{k+1})$ имеет место неравенство

$$|\zeta_k-z|\geqslant|\zeta-z|-|\zeta_k-\zeta|\geqslant 2^{-1}|\zeta-z|.$$

Следовательно по определению g_ε и r_m имеем при $z\in G_{\varepsilon/4}$

$$|g_\varepsilon(z)-r_m(g_\varepsilon, z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{(\zeta_k, \zeta_{k+1})}\frac{|\varphi(\zeta)|\,|\zeta_k-\zeta|}{|\zeta_k-z|\,|\zeta-z|}|d\zeta|\leqslant$$

$$<\frac{4L}{m}\cdot\max_{\zeta\in\gamma_\varepsilon}|\varphi(\zeta)|\int\limits_{\gamma_\varepsilon}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^2}.$$

Оценим последний интеграл. Обозначим через z_l, $l=l(z)$ одну из ближайших к точке z точек множества $\{z_k\}_{k=1}^n$, участвовавших в построении кривой γ_ε. Пусть z_j, $j=j(z)$ та из точек z_k, что $s(z_l, z_j) \leqslant L/2$, $s(z_l, z_j+1) \leqslant (2)$ (при $j=n$ полагаем $z_{n+1}=z_1$). Представим γ_ε в виде $\gamma_\varepsilon=\gamma_\varepsilon^1 \cup \gamma_\varepsilon^2$, где

$$\gamma_\varepsilon^1=\gamma_\varepsilon \cap \Big(\bigcup_{z_k \in (z_l, z_j)} \partial D(z_k, 2\varepsilon)\Big), \quad \gamma_\varepsilon^2=\gamma_\varepsilon \cap \Big(\bigcup_{z_k \in (z_l, z_{j+1})} \partial D(z_k, 2\varepsilon)\Big).$$

Оценим сначала интеграл по γ_ε^1. Для этого перенумеруем в направлении от z_l к z_j точки z_k, лежащие на дуге (z_k, z_j), полагая $z_1'=z_l \cdots$ $\cdots z_r'=z_j$ $r=r(z)$. Разобъем точки z_k' на две группы: $T_1=\{z_k'\}_{k=1}^{[10A]}$ и $T_2=\{z_k'\}_{k=[10A]+1}^{r}$, где A — число из неравенства (2), а знак $[a]$ — обозначает целую часть положительного числа a. Кривую γ_ε^1 также разобьем на две части

$$\Gamma_1=\gamma_\varepsilon^1 \cap \Big(\bigcup_{z_k' \in T_1} \partial D(z_k', 2\varepsilon)\Big), \quad \Gamma_2=\gamma_\varepsilon^1 \cap \Big(\bigcup_{z_k' \in T_2} \partial D(z_k', 2\varepsilon)\Big).$$

Заметим, что имеют место неравенства

$$s(\Gamma_1) \leqslant 40\pi\varepsilon A, \ |\zeta-z| \geqslant \varepsilon/4, \ \text{при } \zeta \in \Gamma_1, \ z \in G_{\varepsilon/4},$$

$$|\zeta-z| \geqslant \varepsilon(k-8A)/2A, \ \text{при } \zeta \in \partial D(z_k', 2\varepsilon), \ z_k' \in T_2, \ z \in G_{\varepsilon/4}.$$

Из этих неравенств получаем

$$\int_{\gamma_\varepsilon^1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-z^2|}=\int_{\Gamma_1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^2}+\int_{\Gamma_2} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^2} \leqslant \frac{640\pi A}{\varepsilon}+\sum_{k=[10A]+1}^{r} \times$$

$$\times \int_{\partial D(z_k', 2\varepsilon)} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^2} \leqslant \frac{640\pi A}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=[10A]+1}^{r} \frac{16\pi A^2}{(k-8A)^2} \leqslant \frac{700\pi A}{\varepsilon}.$$

Легко видеть, что интеграл по γ_ε^2 оценивается аналогичным образом. Поэтому лемма 1 доказана.

Для доказательства леммы 2 нам понадобится частный случай леммы 1 работы [19].

Лемма А ([19)]. Пусть G — липшицевая область. Тогда для любых $z \in \partial G$ и $\delta>0$ существует точка $\zeta=\zeta(z)$ такая, что

$$|\zeta-z| \leqslant C\delta, \ \rho(\zeta, G>\delta,$$

где $C>1$ зависит только от G.

С помощью леммы А определим теперь рациональную функцию, участвующую в формулировке леммы 2. Для этого положим

$$\psi_\varepsilon(z)=\frac{1}{\pi} \iint_{D_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\, d\xi d\eta, \ \zeta=\xi+i\eta, \tag{13}$$

где φ — непрерывная в C функция, D_ε — кольцевая область, образованная кривыми γ_ε и τ_ε, аппроксимирующими кривую γ. Далее положим при $k=1$, $\sigma_1 = D(z_1, 2\varepsilon)\cap D_\varepsilon$, при $k=2,\cdots,n$ положим $\sigma_k = (D(z_k, 2\varepsilon)\setminus\bigcup_{l=1}^{k-1}\sigma_l)\cap D_\varepsilon$, где z_k — точки, участвовавшие в построении кривых γ_ε, γ_ε. Очевидно, что $\sigma_i\cap\sigma_j=\varnothing$ при $i\neq j$ и $D_\varepsilon=\bigcup_{k=1}^{n}\sigma_k$. По лемме А для любой точки $z_k\in\gamma$ существует точка $W_k\in C\setminus G$ такая, что

$$|W_k - z_k|\leqslant 3C\varepsilon,\ \rho(W_k\, G)\geqslant 3\varepsilon,\ k=1, 2,\cdots, n,\ n\leqslant 2L/\varepsilon. \tag{14}$$

Определим теперь рациональную функцию $t_n(\psi_\varepsilon, z)$ по формуле

$$t_n(\psi_\varepsilon, z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{W_k - z},\ \text{ где } B_k=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\sigma_k}\varphi(\zeta)\,d\xi\,d\eta. \tag{15}$$

Лемма 2. *Пусть G — липшицевая область, $\varepsilon\in(0, 1]$ и функции t_n и ψ_ε определены по формулам* (13), (15), *тогда*

$$|\psi_\varepsilon(z)-t_n(\psi_\varepsilon, z)|\leqslant a_2\cdot\varepsilon\max_{\zeta\in\overline{D}_\varepsilon}|\varphi(\zeta)|,\ \text{ при } z\in\overline{D}_\varepsilon, \tag{16}$$

где a_2 зависит только от G.

Доказательство. Возьмем точку $z\in\overline{D}_\varepsilon$ и зафиксируем ее. Введем те же обозначения, что и в лемме 1, т. е. пусть z_l, $l=l(z)$ точка из $\{z\}_{k=1}^{n}$, ближайшая к z, а точки z_j и z_{j+1}, $j=j(z)$ таковы, что $s(z_l, z_j)\leqslant L/2$, и $s(z_l, z_{j+1})<L/2)$ (при $j=n$ полагаем $z_{n+1}=z_1$). Вновь перенумеруем в направлении от z_l к z_j точки z_k, лежащие на (z_l, z_j) и обозначим их через $\{z_k'\}_{k=1}^{r_1}$, $r_1=r_1(z)$. Перенумеруем также в направлении от z_l к z_{j+1} точки z_k, лежащие на (z_l, z_{j+1}) причем на этот раз не включая в их число точку z_k, и обозначим их через $\{z_k''\}_{k=1}^{r_2}$, $r_2=r_2(z)$ Соответствующие точкам z_k' и z_k'' полюсы и множества из $\{W_k\}_{k=1}^{n}$ и $\{\sigma_k\}_{k=1}^{n}$ обозначим соответственно через σ_k', σ_k'' и W_k', W_k''. Заметим, что из определения кривой γ и условий (14) при всех k имеют место неравенства

$$|\zeta - z|\geqslant\varepsilon(k-8A)/2A \text{ при } \zeta\in\sigma_k',\ \sigma_k'', \tag{17}$$

$$\min(|W_k'-z|,\ |W_k''-z|)\geqslant\varepsilon(k-10AC)/2A. \tag{18}$$

Учитывая наши обозначения и (18), (17) получаем

$$|\psi_\varepsilon(z)-t_n(\psi_\varepsilon, z)|\leqslant\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{[12AC]}\iint\limits_{\sigma_k'}\left(\frac{1}{|\zeta-z|}+\frac{1}{|W_k'-z|}\right)|\varphi(\zeta)|\,d\xi d\eta+$$

$$\sum_{k=[12AC]+1}^{r_1}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\sigma_k'}\frac{|\zeta-W_k'|\,|\varphi(\zeta)|}{|\zeta-z|\,|W_k'-z|}d\xi d\eta+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{[12AC]}\iint\limits_{\sigma_k''}(\qquad)\,d\xi d\eta+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=[12AC]+1}^{r_2}\iint\limits_{\sigma_k''}(\qquad)\,d\xi d\eta,$$

где в интегралах по множествам $\sigma_k^{\cdot}$ стоят те же величины, что и в интегралах по σ_k'. Оценим интегралы по σ_k', учитывая (17), (18), (14)

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{[12AC]}\iint_{\sigma_k'}\left(\frac{1}{|\zeta-z|}+\frac{1}{|W_k'-z|}\right)|\varphi(\zeta)|\,d\xi\,d\eta\leqslant 48\,AC\cdot\varepsilon\max_{\zeta\in\overline{D}_\varepsilon}|\varphi(\zeta)|,$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=[12AC]+1}^{r_1}\iint_{\sigma_k'}\frac{|W_k'-\zeta|\,|\varphi(\zeta)|}{|\zeta-z|\,|W_k'-z|}\,d\xi\,d\eta\leqslant\max_{\zeta\in\overline{D}_\varepsilon}|\varphi(\zeta)|\sum_{k=[12AC]+1}^{r_1}\times$$

$$\times\frac{80\,A^2C\cdot\varepsilon}{(k-8A)(k-10AC)}\leqslant 8\,A\cdot\varepsilon\cdot\max_{\zeta\in\overline{D}_\varepsilon}|\varphi(\zeta)|.$$

Легко заметить, что суммы, содержащие интегралы по σ_k', оцениваются аналогичным образом, поэтому лемму 2 можно считать доказанной.

§ 2. Доказательство теорем 1—3

Доказательство теоремы 1 основывается на методах Д. Вольфа [1] и С. Н. Мергеляна [15]. В силу (2) функцию f можно считать продолженной на всю плоскость $\mathbf{C}$ так, чтобы модуль непрерывности продолженной функции $\tilde{f}$ удовлетворял бы условию $\omega(\delta,\tilde{f})\leqslant c\,\omega(\delta,f)$ (см. [20], стр. 206). Продолжим f таким образом и сохраним за ее продолжением обозначение f. Положим для краткости $\omega(\delta,f)=\omega(\delta)$ и заметим, что $\omega(\delta)$ будет удовлетворять условию:

$$\omega(k\cdot\delta)\leqslant k\,\omega(\delta),\quad k=1,\ 2\cdots. \tag{19}$$

Усредним теперь функцию f по известной формуле

$$f_\delta(z)=\frac{1}{\pi\delta^2}\iint_{|\zeta-z|<\delta}f(\zeta)\,d\xi\,d\eta.$$

Напомним свойства $f_\delta(z)$ (см. [16], стр. 341)

1.

$$|f(z)-f_\delta(z)|\leqslant\omega(\delta)\ \text{при}\ z\in\mathbf{C}, \tag{20}$$

$$\sup_{z\in\mathbf{C}}|f_\delta(z)|\leqslant\sup_{z\in\mathbf{C}}|f(z)|. \tag{21}$$

2. Функция $f_\delta(z)$ является непрерывно-дифференцируемой в $\mathbf{C}$ и выполнены условия

$$\frac{\partial f_\delta(z)}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2\pi i\delta}\int_{|\zeta-z|=\delta}f(\zeta)\,d\zeta\ \text{при}\ z\in\mathbf{C},$$

$$\left|\frac{\partial f_\delta(z)}{\partial z}\right|\leqslant\frac{\omega(\delta)}{\delta}\qquad\text{при}\ z\in\mathbf{C}. \tag{22}$$

3. Если f — аналитична в δ-окрестности $D(z,\delta)=\{z\in\mathbf{C}: |\zeta-z|<\delta\}$ точки z, то

$$f_\delta(z)=f(z). \tag{23}$$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1. Положим $\varepsilon_k = 10^{-k}$, $k = 0, 1, 2\cdots$ и предположим сначала, что

$$|f(z)| \leqslant \omega(\varepsilon_1) \text{ при } z \in C. \tag{24}$$

По формуле Коши

$$f_{\varepsilon_1}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\varepsilon_1}} \frac{f_{\varepsilon_1}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_{\varepsilon_1}} \frac{\partial f_{\varepsilon_1}}{\partial \bar\zeta}\, \frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z} = g_{\varepsilon_1}(z) + \psi_{\varepsilon_1}(z) \text{ при } z \in D_{\varepsilon_1}.$$

Учитывая (24), по лемме 1, беря $m = m_1 = \varepsilon_2^{-1} \times [3 a_1 + 64\pi L]$, будем иметь, что существует рациональная функция r_{m_1} вида (11) такая, что

$$|g_{\varepsilon_1}(z) - r_{m_1}(g_{\varepsilon_1}, z)| \leqslant \frac{a_1}{m_1 \cdot \varepsilon_1} \max_{\zeta \in \gamma_{\varepsilon_1}} |\varphi(\zeta)| \leqslant \omega(\varepsilon_2) \text{ при } z \in G_{\varepsilon_1/4}.$$

По лемме 2 имеем, что существует рациональная функция $t_{n_1}(\psi_{\varepsilon_1}, z)$ $n_1 \leqslant 2L/\varepsilon_1$ такая, что

$$|\psi_{\varepsilon_1}(z) - t_{n_1}(\psi_{\varepsilon_1}, z)| \leqslant 10\, a_2 \omega(\varepsilon_2) \text{ при } z \in D_{\varepsilon_1}.$$

Из последних двух неравенств получаем

$$|f_{\varepsilon_1}(z) - (r_{m_1}(g_{\varepsilon_1}, z) + t_{n_1}(\psi_{\varepsilon_1}, z))| \leqslant (1 + 10\, a_2)\, \omega(\varepsilon_2) \text{ при } z \in D_{\varepsilon_1}. \tag{25}$$

Предположим, что построены рациональные функции r_{m_j} и t_{n_j} типа (11) и (15) $j = 1, 2, \cdots, k-1$, $k \geqslant 2$ такие, что

$$\left| f_{\varepsilon_{j+1}}(z) - \sum_{l=1}^{j} (r_{m_l}(g_{\varepsilon_l}, z) + t_{n_l}(\psi_{\varepsilon_l}, z)) \right| \leqslant (1 + 10\, a_2)\, \omega(\varepsilon_{j+1})$$

$$\text{при } z \in D_{\varepsilon_{j+1}}, \tag{26}$$

$$n_j + m_j \leqslant \varepsilon_{j+1}^{-1} \cdot 15\, a_2 (3\, a_1 + 66\, \pi L) \tag{27}$$

и покажем как построить функции r_{m_k}, t_{n_k} типа (11), (15) такие, что неравенства (26), (27) верны и при $j = k$. Положим

$$f^1(z) = f_{\varepsilon_2}(z),$$

$$f^j(z) = f_{\varepsilon_{j+1}}(z) - \sum_{l=1}^{j-1} (r_{m_l}(g_{\varepsilon_l}, z) + t_{n_l}(\psi_{\varepsilon_l}, z)),\ j = 2, 3, \cdots, k.$$

Учитывая (26) имеем

$$|f^k(z)| \leqslant 3 + 10\, a_2)\, \omega(\varepsilon_k) \text{ при } z \in D_{\varepsilon_k}. \tag{28}$$

По формуле Коши

$$f^k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\varepsilon_k}} \frac{f^k(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_{\varepsilon_k}} \frac{\partial f_{\varepsilon_{k+1}}(\zeta)}{\partial \bar\zeta}\, \frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z} =$$

$$= g_{\varepsilon_k}(z) + \psi_{\varepsilon_k}(z) \text{ при } z \in D_{\varepsilon_k}.$$

Применим лемму 1 к функции g_{ε_k}, беря

$$m = m_k = \varepsilon_{k+1}^{-1} \cdot [15\, a_2] \cdot [3\, a_1 + 64\, \pi L]. \tag{29}$$

Учитывая выбор m_k, (28) и (19) мы получаем, что существует рациональная функция $r_{m_k}(g_{\varepsilon_k}, z)$ вида (11) такая, что

$$|g_{\varepsilon_k}(z) - r_{m_k}(g_{\varepsilon_k}, z)| < \frac{a_1}{m_k \cdot \varepsilon_k} \cdot \max_{\zeta \in \gamma_k} |f^k(\zeta)| \leqslant \omega(\varepsilon_{k+1}) \text{ при } z \in G_{\varepsilon_k/4}. \quad (30)$$

По лемме 2 существует t_{n_k} вида (15) такая что

$$|\psi_{\varepsilon_k}(z) - t_{n_k}(\psi_{\varepsilon_k}, z)| \leqslant 10\, a_2 \omega(\varepsilon_{k+1}),\ n_k \leqslant 2L/\delta_k \text{ при } z \in D_{\varepsilon_k}. \quad (31)$$

Учитывая (29)—(31) мы получаем, что утверждения (26), (27) верны и при $j = k$. Следовательно, учитывая, что они верны и при $j = 1$ (неравенство 25) мы получаем, что при всех $k \geqslant 1$ существуют рациональные функции r_{m_k} и t_{n_k}, такие, что

$$\left| f(z) - \sum_{j=1}^{k} \left(r_{m_j}(g_{\varepsilon_j}, z) + t_{n_j}(\psi_{\varepsilon_j}, z) \right) \right| \leqslant (4 + 10\, a_2)\, \omega(\varepsilon_{k+1}) \text{ при } z \in \overline{G}. \quad (32)$$

Проверим, что полученный таким образом для функции f ряд вида (1) удовлетворяет условиям (3)—(5). Условие (5) очевидно следует из (27) и (32). Проверим (3) и (4). Пусть ζ_i^k и W_i^k — полюсы, а A_i^k и B_i^k — коэффициенты соответственно функций r_{m_k} и t_{n_k}. Пусть $l_0 = 0$, $l_k = \sum_{i=1}^{k} (m_i + n_i)$, $k \geqslant 1$. Положим $\zeta_j = \zeta_{j-l_{k-1}}^k$ при $l_{k-1} < j \leqslant l_k - n_k$, где $k \geqslant 1$, а при $l_k - n_k < j \leqslant l_k$ положим $\zeta_j = W_{j-l_k+n_k}^k$. Точно также перенумеруем и коэффициенты A_i^k и B_i^k. Пусть $l_{k-1} < j < l_k - n_k$ тогда из (28)

$$|A_j| - |A_{j-l_{k-1}}^k| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Delta_{j-l_{k-1}}^k} |f^k(\zeta)|\, |d\zeta| < c_2\, \omega\left(\frac{1}{j}\right)/j,$$

где $\Delta_i^k = (\zeta_i^k, \zeta_{i+1}^k)$, c_2 не зависит от j. При $l_k - n_k < j \leqslant l_k$ имеем

$$|A_j| = |B_{j-l_k+n_k}| < \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\sigma_{j-l_k+n_k}^k} |\bar\partial f_{\varepsilon_{k+1}}(\zeta)|\, d\xi\, d\eta \leqslant c_2 \omega\left(\frac{1}{j}\right)/j.$$

Из последних двух неравенств получаем условие (4). Проверим условие (1). Пусть $l_{k-1} < n \leqslant l_k$, учитывая (31) и последние неравенства имеем

$$|f(z) - S_n(z)| < (4 + 10\, a_2)\, \omega(\varepsilon_{k+1}) + \sum_{j=l_{k-1}+1}^{l_k} \frac{|A_j|}{|\zeta_j - z|} <$$

$$< c_1 \log n \cdot \omega\left(\frac{1}{n}\right), \text{ при } z \in \overline{G},$$

где последняя сумма оценивается так же как аналогичные суммы в леммах 1, 2, а c_1 не зависит от n и z.

Итак, мы доказали теорему 1 при условии (24). В общем случае достаточно рассмотреть функцию $f_1(z) = \omega(\varepsilon_1) f(z)/2M$, где $M = \max\limits_{z\in C} |f(z)|$.

Теоерма 1 доказана.

Замечание 1. Очевидно, что теорема 1 верна и для конечносвязанных областей, ограниченных жордановыми липшицевыми кривыми и для множеств, состоящих из конечного числа липшицевых кривых, имеющих конечное число точек пересечения с ненулевыми углами.

Доказательство теоремы 2 повторяет доказательство теоремы 1 с той лишь разницей, что вместо последовательности $\varepsilon_k = 10^{-k}$ нужно взять последовательность $\varepsilon_k' = 10^{-10^k}$.

Доказательство теоремы 3—из теоремы 1 и рассуждениями, аналогичным доказательству теоремы 2 работы [7].

В заключение автор благодарит Н. У. Аракеляна за ценные обсуждения настоящей работы.

Институт математики
АН Республики Армении

Поступила 10.I.1991

Ռ. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ. Անալիտիկ ֆունկցիաները լիպշիցյան տիրույթներում պարզ կոտորակների շարքով ներկայացնելու մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում ապացուցվում է, որ լիպշիցյան տիրույթում անալիտիկ ֆունկցիաներին կարելի է համապատասխանեցնել որոշակի պարզ կոտորակների շարք և գնահատել այդ շարքի զուգամիտության արագությունը համապատասխան ֆունկցիային։

R. A. AVETISIAN. *On representation of analytical finctions in Lipshits domain asa series of simple fractions* (summary)

The paper proves that a series of simple fractions can be corresponded to analytical function in Liphits domain and the speed of convergence of the series to corresponding function can be estimated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Wolff.* Sur les series $\sum\limits_1^{\infty} A_k/(z-\alpha_k)$, C. R. Acad. Sci., 173, 1921, 1327—1328.
2. *A. Denjoy.* Sur les series de fractions rationelles, Bull. Soc. Math., France, 52. 1924, 418—434.
3. *А. А. Гончар,* О примерах неединственности аналитических функций. Вестн. Моск. ун-та, Матем., механ., 1964, № 1, 37—43.
4. *А. А. Гончар.* О квазианалитическом продолжении аналитических функций через жорданову дугу, ДАН СССР, 166, № 5, 1966, 1028—1031.
5. *Т. А. Леонтьева.* Представление функций, аналитических в замкнутой области, рядами рациональных функций, Мат. заметки, 4, № 3, 1968, 191—200.
6. *Т. А. Леонтьева.* О представлении функций в единичном круге рядами простых дробей, Мат. сб., 84 (16), № 2, 1971, 313—326.
7. *Р. Аб. Аветисян.* О представлении аналитических функций рядами простых дробей в замкнутом круге, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XVI, № 1, 1981, 31—43.

8. *Ю. Ф. Коробейник.* К вопросу о разложении аналитических функций в ряды по рациональным функциям, Мат. заметки, 31, № 5, 1982, 723—737.

9. *L. Rubel, A. Shields.* The space of bounded analytic functions on a region, Ann. Inst. Fourier, 16, № 1, 1966, 235—277.

10. *L. Brown, A. Shields, K. Zeller.* On absolutely convergent exponential sums, Trans. Amer. Math. Soc., 1960, 96, № 1, 162—183.

11. *K. Hoffman, H. Rossi.* Extensions of positive weak *—continuous functions, Duke Math. J., 34, № 3, 1967, 453—466.

12. *В. П. Хавин.* Пространства H^∞ и L^1_0/H^1_0, Записки научн. семин. ЛОМИ, т. 39, 1974, 120—143.

13. *Н. К. Никольский.* Современное состояние проблемы спектрального анализа—синтеза, Сб. Теория операторов в функциональных пространствах, изд. «Наука», 1977, 240—282.

14. *Р. А. Аветисян.* О представлении аналитических функций рядами простых дробей, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XXVI, № 1, 1991.

15. *С. Н. Мергелян.* Равномерное приближение функций комплексного переменного, УМН, 7, № 2, 1952, 31—122.

16. *В. К. Дзядык.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, Изд. «Наука», 1977.

17. *В. В. Пеллер.* Рациональная аппроксимация и гладкость функций, Зап. науч. семин. ЛОМИ, т. 107, 1982, 150—159.

18. *А. А. Пекарский.* Наилучшие рациональные приближения в комплексной области, Труды Матем. инст. АН СССР, т. 190, 1989, 222—233.

19. *В. В. Андриевский.* Апроксимационная характеристика классов функций на континуумах комплексной плоскости, Мат. сб., 1984, № 1, 125, 70—87.

20. *И. Стейн.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, Изд. «Мир», 1973.

21. *Р. А. Аветисян.* О представлении функций рядами простых дробей, Международная конф. по теории приближения функций. Тезисы докладов, Киев, 1983.