ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մաթեմատիկա XXVI, № 5, 1991 Математика

УДК 517.95

Г. Р. ОГАНЕСЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ВЕСОВОЙ ЗАДАЧИ КОШИ И НОВАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ЭНЕРГИИ

В работах [1], [2] было предложено для сингулярных на границе уравнений в частных производных (УЧП) вместо данных Коши задавать вронскианы от Фурье-образа решения и некоторых весовых функций. Продолжая изучение этой постановки начальной задачи, в настоящей статье мы приводим обобщение известной теоремы И. Г. Петровского (см. [5], [6]) о необходимых и достаточных условиях корректности задачи Коши для системы УЧП первого порядка с коэффициентами, зависящими только от временной переменной, на случай сингулярных систем. Так как условия корректности, фигурирующие в теореме И. Г. Петровского, даны в терминах фундаментальной системы решений (ФСР) и являются труднопроверяемыми, то мы изучаем также достаточные условия единственности решения начальной задачи с заданными вронскианами, накладываемые непосредственно на коэффициенты уравнения второго порядка.

Эти условия получаются при доказательстве теоремы единственности энергетическим методом, который отличается от обычного тем, что в качестве плотности энергии мы используем сумму квадратов модулей вронскианов. Применяя полученные условия единственности к вырождающимся сингулярным уравнениям получаем условия, существенно отличающиеся от известных условий корректности вырождающихся гиперболических уравнений (см. [3], [4]). Это объясняется тем, что допускаемые нами сингулярности позволяют избавиться от точек поворота, которые возникают в регулярных слабо гиперболических уравнениях ([4]).

§ 1. Условия корректности вронскианной начальной задачи

Рассмотрим систему

$$u_t = A(t, D_x)\, u(t, x), \quad t \in]0, T[, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

где $u = colon\,(u_1, \cdots, u_m)$ — вектор-столбец, A — $m \times m$ матрица, элементами которой являются дифференциальные операторы с бесконечно дифференцируемыми на $]0, T]$ коффициентами, зависящими только от t. Допускается неограниченность этих коэффициентов при $t \to 0$.

Обозначим через $v_j(t, \xi)$ ФСР системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с параметром ξ (получаемые из (1) применением x-преобразования Фурье):

$$\partial_t v_j = A(t, \xi) v_j(t, \xi), \ t \in]0, T[, \tag{2}$$

$$v_j(T, \xi) = e_j, \ j = \overline{1, m}. \tag{2'}$$

Здесь $e_j = colon\,(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, где единица стоит на j-том месте. Пусть $\Phi(t, \xi)$ — матрицант уравнений (2), т. е. матрица, составленная из $v_j(t, \xi)$ и являющаяся решением матричной задачи Коши

$$\partial_t \Phi(t, \xi) = A(t, \xi)\Phi(t, \xi), \ t \in]0, T[, \tag{3}$$

$$\Phi(T, \xi) = I \text{ — единичная матрица.}$$

Полагая Φ обратимой матрицей на $]0, T] \times R^n$ (если след матрицы $A(t, \xi)$ равен нулю, то, в силу формулы Лиувилля, матрицу Φ можно выбрать так, чтобы ее определитель равнялся бы единице, откуда автоматически следует обратимость Φ) начальные условия для системы (1) ставим в виде

$$\lim_{t \to 0} [\Phi^{-1}(t, \xi)\, \hat{u}(t, \xi)] = \hat{\psi}(\xi), \tag{4}$$

где

$$\hat{u}(t, \xi) = \int e^{ix\xi} u(t, x)\, dx, \ x \in R^n. \tag{5}$$

Отметим, что в (4) вместо Φ можно (при некоторых условиях) использовать приближенные или асимптотические решения уравнения (3) (см. [1], [2]). Обозначим через $H^s = H^s(R^n_x)$ — пространство Соболева, $H^\infty = \bigcap H^r$. Пусть $(H^\infty)^m$ — пространство вектор-функций $g(x)$, каждая компонента которой принадлежит пространству Соболева H^∞.

Начальную задачу (1), (4) назовем корректной (хорошо поставленной), если для каждого вектора $\psi(x) \in (H^\infty)^m$ существует единственное решение $u \in C^2(]0, T], (H^\infty)^m)$ этой задачи, которое непрерывно зависит от $\psi(x)$. Последнее означает, что для каждых $\varepsilon > 0$, $l \in N$ (N — множество натуральных чисел) существуют такие числа $\delta > 0$ и $p \in N$, что если $\|\psi\|_p \leqslant \delta$, то

$$\max_{[0, T]} \|\Phi^{-1}(t, \cdot)\, \hat{u}(t, \cdot)\|_l \leqslant \varepsilon.$$

Здесь $\|\cdot\|_p$ — норма пространства Соболева $(H^p)^m$.

Теорема Петровского об условиях корректности задачи Коши для регулярной системы (1) непосредственно обобщается на случай вронскианной начальной задачи (4) для сингулярной системы (1).

Теорема 1. *Пусть* $v_j(t, \xi)$ — *решение задачи Коши* (2), (2'). *Тогда для корректности начальной задачи* (1), (4) *необходимо и достаточно, чтобы для любого фиксированного* $t \in]0, T]$ *существовали постоянные* C *и* p *(не зависящие от* $\xi \in R^n$*) такие, что*

$$|v_j(t, \xi)| < C(t)(1 + |\xi|)^p, \ j = 1, m, \ t \in]0, T[, \ \xi \in R^n, \tag{6}$$

здесь

$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}.$$

Доказательство этой теоремы почти не отличается от доказательства теоремы Петровского, поэтому оно опускается.

Если $A(t, \xi)$ — регулярная матрица (т. е. бесконечно дифференцируема на $[0, T]$ по t), то единичная матрица является приближенным решением уравнения (3) (теорема Н. Левинсона) и, выбирая $\Phi \equiv I$, из (4) мы получаем обычные данные Коши. При этом теорема 1 превращается в обычную теорему Петровского.

Отметим, что единственность решения задачи (1), (4) имеет место очевидным образом и без предположений (6).

§ 2. Условия единственности вронскианной начальной задачи

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$u_{tt} + Q(t, D_x)\, u(t, x) = 0, \ x \in R^n, \ t \in]0, T[, \tag{7}$$

где Q — дифференциальный оператор порядка m с символом $\tilde{q}(t, \xi)$ не зависящим от x и неограниченным при $t \to 0$.

Обозначим через (ψ_1, ψ_2) ФСР уравнения

$$\hat{u}_{tt} + \tilde{q}(t, \xi)\, \hat{u}(t, \xi) = 0, \tag{8}$$

получаемого из (7) применением x-преобразования Фурье.

Начальные данные для уравнения (7) будем ставить в виде

$$\lim_{t \to 0} \frac{W(u, \psi_j)}{W(\psi_1, \psi_2)} = f_j(\xi), \ j = 1, 2. \tag{9}$$

Пусть $\tilde{q}(t, \xi)$ является комплекснозначной функцией, представимой в виде

$$\tilde{q}(t, \xi) = q(t, \xi) + q_0(t, \xi) \tag{8'}$$

(в качестве q_0 можно, например, взять $i \operatorname{Im} \tilde{q}$) и удовлетворяющей условиям:

1) $q(t, \xi) \neq 0$ при $t \in]0, T]$,

2) существует ветвь корня $\sqrt{q(t, \cdot)}$ класса $C^2(]0, T])$ такая, что

$$\operatorname{Re} \sqrt{q(t, \xi)} \geqslant 0, \ t \in]0, T]), \ \xi \in R^n,$$

3) $q_0 q^{-\frac{1}{2}} + B(t, \cdot) \in L_1([0, T])$, равномерно по $\xi \in R^n$,

$$B \equiv q^{-\frac{1}{4}} \left(q^{-\frac{1}{4}}\right)_{tt},$$

4) $(\operatorname{Im} q)/\sqrt{|q| + \operatorname{Re} q} \in L_1([0, T])$, равномерно по $\xi \in R^n$,

5) для некоторого положительного числа ε справедливо неравенство $|1 - S^2| \geqslant \varepsilon$ для всех $t \in]0, T]$, $\xi \in R^n$, здесь $S = -\dfrac{1}{2}\left(q^{-\frac{1}{2}}\right)_t$.

6) $q_0 q^{-\frac{1}{2}}$, S_t, $\operatorname{Im} \sqrt{q(1 - S^2)} \in L_1([0, T])$ равномерно по $\xi \in R^n$.

Отметим, что выражение $-2\sqrt{q}\, B$ совпадает с шварцианом $\{\varphi, t\}$ от

$$\rho = \int_T^t \sqrt{q(s)}\,ds:\ -2\sqrt{q}\,B = -2\sqrt{\rho_t}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho_t}}\right)_{tt} = \frac{\rho_{ttt}}{\rho_t} - \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\rho_{tt}}{\rho_t}\right)^2 = \{\rho, t\}.$$

Из формул Кейли

$$\{\rho,\ t\} = \tau_t^2\{\rho, \tau\} + \{\tau, t\},\quad \{\rho, t\} = -\rho_t^2\{t, \rho\}$$

получаем формулу

$$2\int_0^T |B(t,\ \cdot)|\,dt = \int_0^T \left|\frac{\{\rho, t\}}{\rho_t}\right| dt = \int_{-\infty}^0 \{t,\ \rho\}\,d\rho,$$

так как $\rho(0) = -\infty$.

Если выполнены условия 1), 2), то приближенными решениями уравнения (8) являются функции Грина—Лиувилля:

$$\varphi_j(t, \xi) = q^{-\frac{1}{4}}(t,\ \xi)\exp\left\{\pm i\int_T^t G(s, \xi)\,ds\right\},\ j = 1,\ 2, \tag{10}$$

где $G = \sqrt{q(t, \xi)}$, если выполнены условия 3), 4) и $G = \sqrt{q - \dfrac{q_t^2}{16\,q^2}}$ если выполнены условия 5), 6).

Начальные условия (9) неэффективны, так как ФСР $\{\psi_j(t, \xi)\}_{j=1,2}$ уравнения (8) известна лишь в некоторых специальных случаях. Поэтому вместо (9) рассмотрим начальные условия

$$\lim_{t\to\infty}\frac{W(u,\ \varphi_j)}{W(\varphi_1,\ \varphi_2)} = f_j(\xi),\ j = 1, 2, \tag{11}$$

где $\varphi_j(t,\ \xi)$ задаются явными формулами (10).

Теорема 2. *Если выполнены условия* 1) — 4) *и существует решение задачи* (7), (11) ($G = \sqrt{q}$) *класса* $C^2(]0,\ T],\ H^2)$, *то оно единственно.*

Условия теоремы 2 упрощаются, если q — вещественный символ.

Следствие 1. Если $q(t,\ \cdot)$ — положительная функция класса $C^2(]0,\ T])$ и

$$\int_0^T\left|\frac{2\ _0 + \{\rho.\ t\}}{\sqrt{q}}\right| dt < \infty,\ \xi\in R^n,\ \rho = \int_T^t \sqrt{q(s,\ \cdot)}\ ds,, \tag{A}$$

то утверждение теоремы 2 остается справедливым.

Теорема 3. *Если выполнены условия* 1), 2), 5), 6) *и существует решение* $u\in C^2(]0,\ T],\ H^2)$ *задачи* (7), (11)$\left(G = \sqrt{q - \dfrac{q_t^2}{16\,q^2}}\right)$, *то оно единственно.*

Замечание 1. В отличие от условий теоремы 1, в которой накладывается условие (*) на ФСР уравнения (3), условия 1) - 6) теорем 2, 3 легко проверяемы, так как они накладываются на символ q.

Замечание 2. Если при $t \in]0, T]$, $\xi \in R^n$,

$$S(t, \cdot) \text{ — монотонна, } q \text{ — вещественная функция и } |S(t, \xi)| < 1, \tag{12}$$

то условия, 5), 6), 2) теоремы 3, очевидно, выполнены.

Замечание 3. Заменой

$$\omega(\tau) = \sqrt{\tau_t}\,\hat{u}(t, \cdot);\ t'(\tau), \tau'(t) \neq 0,\ t \in]0, T];\ t = 0 \to \tau = \tau_0,$$

задача (8), (11) преобразуется в задачу

$$\omega_{\tau\tau} + t_\tau^2\left(\tilde{q} + \frac{\{\tau, t\}}{2}\right)\omega(\tau) = 0,$$

$$\lim_{\tau\to\tau_0} \frac{W(\tau;\ \omega, \sqrt{t_\tau}\,\varphi_j)}{W(\tau; \sqrt{t_\tau}\,\varphi_1, \sqrt{t_\tau}\,\varphi_2)} = \lim_{t\to 0} \frac{W(t, \hat{u}, \varphi_j)}{W(t, \varphi_1, \varphi_2)}.$$

При этом условия следствия 1 принимают вид

$$t_\tau^2\left(q + \frac{\{\tau, t\}}{2}\right) > 0,\ \int_0^T \left|\frac{2q_0 + \tau_t^2\{\sigma, \tau\}}{\sqrt{\sigma_t}}\right| dt < \infty,\ \sigma = \int_T^t \sqrt{q(s) + \frac{\{\tau, s\}}{2}}\, ds. \tag{A'}$$

Теорема 4. *Если* $q(t, \cdot)$ — *вещественная функция класса* $C^2(]0, T])$, *удовлетворяющая условиям* (А) *и*

$$q \geqslant r(t) > 0,\ t \in [0, T];\ \lim_{t\to 0} |q_t q^{-\frac{3}{2}}| = 0, \tag{Б}$$

то задача (7), (11) $(G = \sqrt{q})$ *корректна.*

В качестве приложения рассмотрим некоторые уравнения, к которым применимы теоремы 2—4.

Пример 1. Рассмотрим вырождающееся и сингулярное при $t = 0$ гиперболическое уравнение

$$u_{tt} - \lambda_1^2(t)\, u_{xx} - \lambda_2^2(t)\, u_{yy} - i\sigma_1(t)\, u_x - i\sigma_2(t)\, u_y + r(t)\, u = 0, \tag{13}$$

при $t \in]0, T[$, $(x, y) \in R^2$, λ_j, σ_j, $r(t) \in C^2([0, T])$, $j = 1, 2$.

Здесь $\sigma_1 = \rho_1(t) + i\tau_1(t)$, $\sigma_2 = \rho_2(t) + i\tau_2(t)$, $r(t)$, $\lambda_j(t)$, $\rho_j(t)$, $\tau_j(t)$ — — вещественные функции.

Применяя к уравнению (13) (x, y)-преобразование Фурье, получим уравнение (8), где

$$\tilde{q} = q + q_0,\ q = \xi^2\lambda_1^2 + \eta^2\lambda_2^2 + \xi\rho_1 + \eta\rho_2 + r, \tag{14}$$

$$q_0 = i\xi\tau_1 + i\eta\tau_2.$$

Пусть выполнены следующие условия:

$$r \geqslant \frac{\rho_1^2}{2\lambda_1^2} + \frac{\rho_2^2}{2\lambda_2^2}, \tag{15}$$

$$\frac{\tau_j}{\lambda_j},\ \sqrt{\frac{\lambda_j}{r}\left(\lambda_j^{-\frac{1}{2}}\right)_{tt}},\ \frac{18\,\lambda_1\lambda_2\lambda_{1t}\lambda_{2t} - (\lambda_1^2\lambda_2^2)_{tt}}{\lambda_1^2\lambda_2^2\sqrt{r}},$$

$$\frac{9\lambda_j\lambda_{jt}r_t-(r\lambda_j^2)_{tt}+5\rho_{1t}^2-4\rho_1\rho_{1tt}}{r\sqrt{r}\,\lambda_j^2},\quad \frac{9\rho_{1t}\rho_{2t}-2(\rho_1\rho_2)_{tt}}{\lambda_1\lambda_2 r\sqrt{r}},$$

$$\frac{9\lambda_k\lambda_{kt}\rho_{jt}-(\rho_j\lambda_k^2)_{tt}}{r\lambda_1^{6-2k-j}\lambda_2^{2k+j-3}},\quad \frac{9\rho_{jt}r_t-2(r\rho_j)_{tt}}{r^2\lambda_j},$$

$$r^{-\frac{1}{4}}\left(r^{-\frac{1}{4}}\right)_{tt}\in L_1([0,\ T]), \tag{16}$$

где $k,\ j=1,\ 2$.

Следствие 2. Пусть выполнены условия (15), (16). Тогда если существует решение $u(t,\ x)\in C^1(]0,\ T],\ H^2)$ задачи (13), (11) (с весовыми функциями (10), $G=\sqrt{q}$), то оно единственно.

Следствие 3. Пусть выполнены условия (15), (16) и

$$\lim_{t\to 0}\frac{r_t}{r\sqrt{r}}=\lim_{t\to 0}\frac{\lambda_{jt}}{\lambda_j\sqrt{r}}=\lim_{t\to 0}\frac{\rho_{jt}}{r\lambda_j}=0,\ j=1,2. \tag{17}$$

Тогда задача (13), (11) (с весовыми функциями (10), $G=\sqrt{q}$) корректна.

Замечание 4. Если $\lambda_j(t)$, $\rho_j(t)$, $r(t)$ являются степенными функциями от t, т. е. имеют вид t^γ, $\gamma\in R$, то условия корректности (15), (16), (17) упрощаются и принимают вид

$$r(t)\geqslant\max\left\{t^{-2-\varepsilon},\ \frac{\rho_1^2}{2\lambda_1^2}+\frac{\rho_2^2}{2\lambda_2^4}\right\},\ \varepsilon>0, \tag{15}$$

$$\frac{\rho_j}{\lambda_j}(t)\in L_1([0,\ T]),\ j=1,2. \tag{16}$$

Пример 2. Для уравнения

$$u_{tt}+\mu^2(t)\,u_{xx}+\lambda^4 u_{xxxx}+r(t)\,u=0,\ t\in]0,\ T[,\ x\in R, \tag{18}$$

имеем

$$\bar{q}=q=\xi^4\lambda^4(t)-\xi^2\mu^2(t)+r(t). \tag{19}$$

Вводя вспомогательные функции $a_j(t)$ по формуле

$$5q_t^2-4qq_{tt}=\sum_{j=1}^{8}a_j(t)\,\xi^j, \tag{20}$$

нетрудно убедиться, что из условий

$$\mu,\ \lambda,\ r(t)\in C^2(]0,\ T]),\ r(t)\geqslant\frac{\mu^4(t)}{8\lambda^4(t)}, \tag{21}$$

$$a_j(t)\,\lambda^{-j}(t)\,r^{\frac{j}{4}-\frac{5}{2}}(t)\in L_1(]0,\ T]),\ j=\overline{1,8}, \tag{22}$$

следуют все предположения следствия 1.

Пример 3. Для уравнения

$$u_{tt}+(-1)^m\partial_x^{2m}u+\frac{a}{t^2}u=0,\ t\in]0,\ T[,\ x\in R,\ m=1,\ 2,\cdots \tag{23}$$

при $a > \frac{1}{4}$ справедлива теорема 3, так как выполнены все условия замечания 2.

Пример 4. Классическая задача Коши с начальными условиями при $t = 0$ для слабо гиперболического уравнения

$$u_{tt} - \lambda^2(t) u_{xx} = \lambda_t(t) u_x, \ t \in]0, \ T[, \ x \in R, \tag{24}$$

по теореме Петровского (см. теорему 1) корректна для любой функции $\lambda(t) \in C([0, \ T])$, например, для

$$\lambda(t) = t^2 \sin \ln t, \tag{25}$$

так как для (24) явно вычисляются решения двойственного уравнения:

$$\psi_1(t, \xi) = \exp\left(i\xi \int_0^t \lambda(s)\, ds \right), \quad \psi_2 = \psi_1(t) \int_T^t \frac{ds}{\psi^2(s)}.$$

Однако условия следствия 1 для функции (25) не выполнены.

§ 3. Доказательство теорем

Доказательство теорем 2, 3 проведем энергетическим методом, причем в качестве плотности энергии будем использовать, вместо классической формулы, выражение

$$E(t, \xi) = |u_1|^2 + |u_2|^2, \ u_j \equiv W(\hat{u}, \varphi_j), \ j = 1, 2. \tag{26}$$

Выбор этой формулы объясняется тем, что если $\{\varphi_j(t, \xi)\}$ является ФСР уравнения (8), то вронскианы $W(\hat{u}, \varphi_j)$ не зависят от времени и поэтому справедлив закон сохранения энергии:

$$\partial_t E(t, \xi) = 0, \ t \in]0, \ T[, \ \xi \in R^n \setminus 0. \tag{27}$$

Отметим, что просто вронскианы в качестве энергии брать нельзя, так как тогда не будет выполнено условие положительности энергии.

Если же $\varphi_{1,2}$ — приближенные решения уравнения (8), например, решение Грина—Лиувилля (10), то закон сохранения (27) уже не выполняется. Тем не менее, мы покажем, что приближенный закон сохранения, справедливый в этом случае, все же позволяет доказать, при некоторых условиях на q единственность решения задачи (7), (11).

Замечание 5. Для волнового уравнения $u_{tt} = \Delta u$, где Δ— оператор Лапласа по пространственным переменным $x \in R^n$, имеем

$$\varphi_1 = \frac{i}{\sqrt{2|\xi|}} \exp(it|\xi|), \ \varphi_2 = \frac{i}{\sqrt{2|\xi|}} \exp(-it|\xi|), \ \xi \in R^n \setminus 0,$$

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = 1, \ W(\varphi_{1,2}, \hat{u}) = \varphi_{1,2}(\hat{u}_t \mp i|\xi|\hat{u}),$$

и наше определение (26) плотности энергии

$$E = |W(\varphi_1, \hat{u})|^2 + |W(\varphi_2, \hat{u})|^2 = \frac{1}{|\xi|}(|\hat{u}_t|^2 + |\xi \hat{u}|^2)$$

совпадает с классическим.

Доказательство теоремы 2. Из обозначений (26) имеем

$$\hat{u} = \frac{\varphi_1 u_2 - \varphi_2 u_1}{W(\varphi_1, \varphi_2)}, \quad \hat{u}_t = \frac{\varphi_{1t} u_2 - \varphi_{2t} u_1}{W(\varphi_1, \varphi_2)}, \tag{28}$$

поэтому функции $u_{1,2}$ удовлетворяют системе уравнений

$$u_{1t} = \left(\frac{\varphi_{1tt}}{\varphi_1} + \bar{q}\right) \frac{\varphi_1 \varphi_2}{W(\varphi_1, \varphi_2)} \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} u_2 - u_1\right), \tag{29}$$

$$u_{2t} = \left(\frac{\varphi_{2tt}}{\varphi_2} + \bar{q}\right) \frac{\varphi_1 \varphi_2}{W(\varphi_2, \varphi_1)} \left(u_2 - \frac{\varphi_2}{\varphi_1} u_1\right).$$

Если в качестве $\varphi_{1,2}$ выбрать функции (10), то

$$\frac{\partial_t^2 \varphi_{1,2}}{\varphi_{1,2}} = -G^2 \pm \frac{iq}{2G}\left(\frac{G^2}{q}\right)_t - \frac{\sqrt{q}}{4}\left(\frac{q_t}{q^{3/2}}\right)_t - \frac{q_t^2}{16 q^2}. \tag{30}$$

Выбрав, далее, $G = \sqrt{q}$, получим из (29) ($W(\varphi_1, \varphi_2) = 2i$) систему

$$u_{1t} = \frac{B}{2i}\left(u_2 \frac{\varphi_1}{\varphi_2} - u_1\right), \quad u_{2t} = \frac{B}{2i}\left(u_2 - \frac{\varphi_2}{\varphi_1} u_1\right). \tag{31}$$

Из условия 4) теоремы 2:

$$\operatorname{Im} \sqrt{q} = \frac{\operatorname{Im} q}{\sqrt{2(|q| + \operatorname{Re} q)}} \in L_1[0, T]$$

следует, что

$$\left|\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right|, \left|\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right| < \text{const}, \ t \in]0, T], \ \xi \in R^n, \tag{32}$$

поэтому умножая уравнения (31) на $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$, соответственно, и прибавляя к ним комплексно сопряженные выражения, получаем некоторые соотношения, оценивая которые, получаем оценку

$$\partial_t E(t, \xi) \leqslant c|B(t, \xi)| \cdot E(t, \xi). \tag{33}$$

Применяя к этому неравенству лемму Гронуолла получаем основную энергетическую оценку

$$E(t, \xi) \leqslant cE(0, \xi), \ t \in]0, T], \ \xi \in R^n, \tag{34}$$

из которой и следует теорема 2.

Доказательство теоремы 3. Выбрав в формуле (10)

$$G = \sqrt{q(1 - S^2)}, \ S = \frac{q_t}{4q\sqrt{q}}, \tag{35}$$

из (30) получаем

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{2iG}{\sqrt{q}} = 2i\sqrt{1 - S^2},$$

$$\left(\frac{1}{\varphi_{1,2}}\partial_t^2\varphi_{1,2}+\bar{q}\right)\varphi_1\varphi_2=\frac{q_0}{\sqrt{q}}-S_t\left(1\pm\frac{iS}{\sqrt{1-S^2}}\right).$$

Отсюда и из системы (29) получаем систему уравнений

$$u_{1t}=K_1(t,\cdot)\left(u_1-\frac{\varphi_1}{\varphi_2}u_2\right),\quad u_{2t}=K_2(t,\cdot)\left(u_1\frac{\varphi_1}{\varphi_2}-u_2\right),$$

$$K_{1,2}=\frac{1}{2i\sqrt{1-S^2}}\left[\frac{q_0}{\sqrt{q}}-S_t\left(1\pm\frac{iS}{\sqrt{1-S^2}}\right)\right]. \tag{36}$$

Отметим, что из условия 5) теоремы 3 следует, что

$$\left|\frac{S}{\sqrt{1-S^2}}\right|\mathrm{const},\ t\in]0,\ T],\ \xi\in R^n. \tag{37'}$$

Далее из условия 6) теоремы 3

$$\mathrm{Im}\sqrt{q-\frac{q_t^2}{16q^2}}\in L_1[0,\ T],\ \xi\in R^n,$$

следуют (ввиду (10)) неравенства (32).

Как и при доказательстве теоремы 2 из системы (36) получаем оценку

$$\partial_t E\leqslant K(t,\cdot)E(t,\cdot),\ K(t,\cdot)=|K_1(t)|+|K_2(t)|. \tag{38}$$

Из условия теоремы 3 и (37) следует, что $K(t)\in L_1[0,\ T]$, поэтому применяя к (38) лемму Гронуолла, получаем оценку (34) и вместе с ней утверждение теоремы 3.

Доказательство теоремы 4. Для доказательства теоремы достаточно, в силу теоремы 1, проверить выполнение условий (6) для ФСР $\{\psi_j\}_{j=1,2}$ уравнения (8) и эквивалентность начальных условий (9) и (11).

Из условий (А), (Б) по теореме о ВКБ оценках (см. [7]) следует существование таких линейно независимых решений $\psi_{1,2}(t,\xi)$ уравнения (8), что

$$\partial_t^k\psi_j(t,\xi)=(1+\varepsilon_{kj}(t))\,\partial_t^k\varphi_j(t,\xi), \tag{39}$$

$$\lim_{t\to0}\varepsilon_{kj}(t)=0,\ k=0,1,\ j=1,2, \tag{39'}$$

где $\varphi_{1,2}(t,\xi)$ — функции (10) с $G=\sqrt{q}$.

Отсюда следует, что условия Петровского (6) для $\psi_{1,2}$ выполнены, так как они выполнены для функций (10).

Из (39) и легко проверяемых неравенств

$$|\varphi_k\varphi_j^{-1}(t)|<\mathrm{const},\ k,j=1,2, \tag{40}$$

непосредственным вычислением доказывается соотношение

$$\lim_{t\to0}\frac{W(\hat{u},\varphi_j)}{W(\varphi_1,\varphi_2)}=\frac{W(\hat{u},\psi_j)}{W(\psi_1,\psi_2)},$$

из которого следует эквивалентность начальных условий (6) и (9).

Доказательство следствия 2. Пусть выполнено неравенство (15), тогда выделением полных квадратов доказывается оценка

$$q \geqslant \max\left\{\frac{r(t)}{2},\ \frac{\xi^2\lambda_1^2+\eta^2\lambda_2^2}{2}\right\}, \tag{41}$$

откуда следует выполнение условий положительности q следствия 1.

Если

$$\frac{\tau_j(t)}{\lambda_j(t)} \in L_1([0,\ T]), \tag{42}$$

то

$$\left|\frac{q_0}{\sqrt{q}}\right| \leqslant \frac{|\xi\tau_1+\eta\tau_2|}{\sqrt{\xi^2\lambda_1^2+\eta^2\lambda_2^2}} \leqslant \sqrt{2}\left(\left|\frac{\tau_1}{\lambda_1}\right|+\left|\frac{\tau_2}{\lambda_2}\right|\right) \in L_1([0.\ T]). \tag{43}$$

Так как $q(t,\ \xi,\ \eta)$ — многочлен второго порядка по ξ и η, то можно ввести вспомогательные функции $a_{ij}(t)$ по формуле:

$$5q_t^2-4qq_{tt}=\sum a_{ij}\xi^i\eta^j,\quad 0 \leqslant i+j \leqslant 4. \tag{44}$$

Если эти функции удовлетворяют условиям

$$\lambda_1^{-i}\lambda_2^{-j}r^{\frac{i+j-5}{2}}a_{ij}(t) \in L_1(0,\ T],\ 0 \leqslant i,j \leqslant 4, \tag{45}$$

то

$$\frac{\{\rho,\ t\}}{\sqrt{q}} = \frac{5q_t^2-4qq_{tt}}{16q^{5/2}} \in L_1([0,\ T]), \tag{46}$$

т. е. условие (А) следствия 1 также выполнено. Действительно, условие (46) следует из оценки

$$\left|\frac{5q_t^2-4qq_{tt}}{16q^{5/2}}\right| \leqslant c\sum\frac{a_{ij}}{|\xi\lambda_1|^i\cdot|\eta\lambda_2|^j r^{\frac{5-i-j}{2}}}.$$

Из тождества (44) для функции a_{ij} получаем следующие выражения

$$a_{40}=4\lambda_1^2(5\lambda_{1t}^2-(\lambda_1^2)_{tt})=16\lambda_1^{9/2}(\lambda^{-\frac{1}{2}})_{tt},$$

$$a_{22}=4\,[18\lambda_1\lambda_{1t}\lambda_2\lambda_{2t}-(\lambda_1^2\lambda_2^2)_{tt}],$$

$$a_{04}=16\lambda_2^{9/2}(\lambda_2^{-\frac{1}{2}})_{tt},\quad a_{30}=4\,[9\lambda_1\lambda_{1t}\rho_{1t}-(\rho_1\lambda_1^2)_{tt}],$$

$$a_{03}=4\,[9\lambda_2\lambda_{2t}\rho_{2t}-(\rho_2\lambda_2^2)_{tt}],$$

$$a_{21}=4\,(9\lambda_1\lambda_{1t}\rho_{2t}-(\rho_2\lambda_1^2)_{tt}],\quad a_{12}=4\,[9\lambda_2\lambda_{2t}\rho_{1t}-\rho_1\lambda_2^2)_{tt}],$$

$$a_{20}=4\,[9\lambda_1\lambda_{1t}r_t-(r\lambda_1^2)_{tt}]+16\rho_1^{\frac{9}{4}}(\rho_1^{-\frac{1}{4}})_{tt},$$

$$a_{11}=2\,[9\rho_{1t}\rho_{2t}-(2\rho_1\rho_2)_{tt}],$$

$$a_{02}=4\,[9\lambda_2\lambda_{2t}r_t-(r\lambda_2^2)_{tt}]+16\rho_2^{\frac{9}{4}}(\rho_1^{-\frac{1}{4}})_{tt},$$

$$a_{10} = 2[9\rho_{1t} r_t - 2(r\rho_1)_{tt}],$$

$$a_{01} = 2[9\rho_{2t} r_t - 2(r\rho_2)_{tt}],$$

$$a_0 = 5r_t^2 - 4rr_{tt} = 16r^{\frac{9}{4}}(r^{-\frac{1}{4}})_{tt}, \tag{47}$$

а остальные $a_{ij}(t)$ равны нулю.

Из формул (47) следует, что из условий (15), (16) следствия 2 вытекают предположения (41), (42), (45). Выше мы уже доказали, что из предположений (41), (42), (45) вытекают все условия следствия 1.

Таким образом, следствие 2 доказано.

Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Կոշու կշռային խնդրի լուծման միակության մասին և նոր բանաձև էներգիայի համար (*ամփոփում*)

Սինգուլյար մասնակի ածանցյալներով հավասարումների համար գտնված են նոր պայմաններ, որոնք ապահովում են Կոշու կշռային խնդրի միակությունը Սոբոլևի տարածություններում։ Բերվում է նաև Պետրովսկու թեորեմի (Կոշու խնդրի կոռեկտության անհրաժեշտ և բավարար պայմանների մասին) ընդհանրացումը սինգուլյար համակարգերի համար։

G. R. OGANESIAN. *Uniqueness for weighted Cauchy problem and new formula for energy* (summary)

In the paper is annonced generalization of Petrovsky theorem about necessary and sufficient conditions of Cauchy problem for the case of singular systems.

There are found the new conditions of uniqueness for the singular second order partial differential equations with given Wronskians. The uniqueness is proved by energy method. By energy is used the sum of modules of wronskians of Fourier transformation of solution and certain weighted functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Р. Оганесян*. О начальной и смешанной задачах с заданными вронскианами для сингулярных гиперболических уравнений второго порядка, Изв. АН Армении, «Математика», 1987, 22, № 4, 337—357.
2. *Г. Р. Оганесян*. Начальная задача для некоторых сингулярных гиперболических уравнений и ВКБ-система ее решений, Диф. уравнения, 1989, 25, № 6, 1062—1064.
3. *А. Б. Нерсесян, Г. Р. Оганесян*. О задаче Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Армении, «Математика», 1974, 9, № 2, 149—165.
4. *К. А. Ягджян*. Необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши с кратными характеристиками, Изв. АН Армении, «Математика», 1985, 20. 20, № 1, 3—25.
5. *И. Г. Петровский*. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия, М., Наука, 1986, 500 с.
6. *С. Мизохата*. Теория уравнений с частными производными, М., Мир, 1977, 504 с.
7. *М. В. Федорюк*. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Наука, 1983, 352 с.