ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, №5, 1991 Математика

УДК 517.956.22

В. В. АСАТРЯН

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

§ 1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим эллиптическое уравнение высшего порядка с комплексными постоянными коэффициентами в односвязной конечной области D, содержащей начало координат, с гладкой границей Γ в комплексной плоскости $z = x + iy$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\partial^n u(x, y)}{\partial y^{n-k}\partial x^k} = 0. \tag{1}$$

Краевые задачи для уравнения (1) исследованы многими авторами. В работах [1]—[3] доказано, в частности, что задачи Дирихле и Неймана являются фредгольмовыми в конечных и бесконечных областях, если уравнение (1) правильно эллиптическое. Однако там же показано, что в случае неправильной эллиптичности уравнения (1) указанные задачи не являются даже нетеровыми. Цель данной работы — указать аналог задачи Дирихле для неправильно эллиптического уравнения (1).

Пусть корни характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^{n-k} = 0 \tag{2}$$

простые, причем $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ имеют положительные, а $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \cdots, \lambda_n$— отрицательные мнимые части. Не ограничивая общности можно считать, что $p \geqslant q$, где $q = n - p$. Для определенности предположим, что $q \geqslant 1$.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим краевые условия ($u = u_1 + iu_2$):

$$\left.\frac{\partial^\nu u(t)}{\partial \vec{n}^\nu}\right|_\Gamma = f_\nu(t), \quad \nu = 0, 1, \cdots, q-1, \tag{3}$$

$$\left.\left[\alpha_\nu(t)\frac{\partial^\nu u_1(t)}{\partial \vec{n}^\nu} + \beta_\nu(t)\frac{\partial^\nu u_2(t)}{\partial \vec{n}^\nu}\right]\right|_\Gamma = f_\nu(t), \quad \nu = q, q+1, \cdots, p-1, \tag{4}$$

где $f_\nu(t) \in H^{(n-1-\nu)}(\Gamma)$, $\nu = 0, 1, \cdots, p-1$ ($f_0, f_1, \cdots, f_{q-1}$ — комплекснозначные, а $f_q, f_{q+1}, \cdots, f_{p-1}$ — действительные функции), $\alpha_\nu(t), \beta_\nu(t)$, $\nu = q, q+1, \cdots, p-1$ — действительные функции из класса $H^{(n-1-\nu)}(\Gamma)$, причем $\alpha_\nu(t) + i\beta_\nu(t) \neq 0$, $\vec{n}$ — внутренняя нормаль к Γ.

Решение краевой задачи (1), (3), (4) отыскивается в классе комплекснозначных функций $u(x, y) \in H^{n-1}(D+\Gamma)$.

Основные результаты статьи можно оформить в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Если корни характеристического уравнения* (2) *простые, то краевая задача* (1), (3), (4) *нетерова в классе функций* $H^{(n-1)}(D+\Gamma)$. *Индекс краевой задачи вычисляется по формуле*

$$\varkappa = (p-q)^2 - 2l,$$

где

$$l = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=q}^{p-1} \Delta_\Gamma \arg(\alpha_j(t) - i\beta_j(t)),$$

а $\Delta_\Gamma \arg(\alpha_j(t) - i\beta_j(t))$ — *приращение аргумента* $\alpha_j(t) - i\beta_j(t)$, *когда переменная* t *один раз обходит контур* Γ *по положительному направлению.*

§ 2. Доказательство теоремы 1

Обозначим через D_j, Γ_j соответственно образы D и Γ при отображении $z_j = x + \lambda_j y$, $j = 1, 2, \cdots, n$, t, t_0 и t_j, t_{j0} являются соответственно аффиксами точек на Γ и Γ_j, а s, s_0 — соответственно дуговые абсциссы точек t, t_0 на Γ.

Известно [1], что общее решение уравнения (1) в случае простых корней характеристического уравнения (2) имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(z_j) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x + \lambda_j y), \tag{5}$$

где $\varphi_j(z)$, $j = 1, 2, \cdots, n$ — произвольные аналитические в D_j функции. Легко показать, что производные $\varphi_j^{(n-1)}(z)$ выражаются линейно через производные $u(x, y)$ $(n-1)$-го порядка. Поэтому $\varphi_j(z)$ также принадлежит классу $H^{(n-1)}(D_j + \Gamma_j)$, $j = 1, 2, \cdots, n$.

Представим $\varphi_j(z)$ в виде

$$\varphi_j(z) = \sum_{k=0}^{n-2} c_{jk} z^k + z^{n-1} \psi_j(z), \quad j = 1, 2, \cdots, n, \tag{6}$$

где $\psi_j(z)$ — аналитическая в D_j функция. Поскольку

$$\varphi_j(z) \in H^{(n-1)}(D_j + \Gamma_j), \text{ то } \psi_j(z) \in H^{(n-1)}(D_j + \Gamma_j).$$

Подставляя значения $\varphi_j(z)$ из (6) в (5), получим

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{n} z_j^{n-1} \psi_j(z_j) + P_{n-2}(x, y). \tag{7}$$

где $P_{n-2}(x, y)$ — полином порядка не выше $n-2$.

Очевидно, что $u(x, y)$, определенная формулой (7), является решением уравнения (1) при произвольном $P_{n-2}(x, y)$. Следовательно, общее решение уравнения (1) можно представить в виде (7). Имеет места следующая

Лемма 1. *В представлении* (7) *функции* $\psi_j(z_j)$, $j=1,2,\cdots,n$ *и* $P_{n-2}(x, y)$ единственным образом определяются через $u(x, y)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что из $u(x, y)\equiv 0$ следует, что $\psi_j(z_j)=0$, $j=1, 2,\cdots, n$ и $P_{n-2}(x, y)\equiv 0$.

Пусть $u(x, y)\equiv 0$. Беря всевозможные $(n-1)$-ые производные функции $u(x, y)$ и (7), получим

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k \Phi_j^{(n-1)}(x+\lambda_j y)=0, \ (x, y)\in D, \ k=0, 1,\cdots, n-1, \tag{8}$$

где $\Phi_j(z)=z^{n-1}\psi_j(z)$. Так как определитель системы (8) отличен от нуля, то будем иметь:

$$\Phi_j^{(n-1)}(x+\lambda_j y)\equiv 0, \ j=1, 2,\cdots, n,$$

т. е.

$$z^{n-1}\psi_j(z)=R_j(z), \ j=1, 2,\cdots, n, \ z\in D_j, \tag{9}$$

где $R_j(z)$ — многочлен порядка не выше $n-2$.

Из (9) видно, что многочлен $R_j(z)$ имеет в точке $z=0$ ноль порядка $n-1$, что возможно только при $R_j(z)\equiv 0$. Но тогда из (9) следует, что $\psi_j(z)\equiv 0$, $j=1, 2,\cdots, \cdots, n$. Подставляя $\psi_j(z)$, $j=1, 2,\cdots, n$ в (7) и имея в виду, что $u(x, y)\equiv 0$, получим $P_{n-2}(x, y)\equiv 0$.

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Поскольку $\psi_j(z)\in H^{(n-1)}(D_j+\Gamma_j)$, то можно пользоваться представлением И. Н. Векуа [4] аналитической функции с граничными значениями из класса $H^{(n-1)}(\Gamma_j)$:

$$\psi_j(z_j)=\int_\Gamma \mu_j(t)\left[\left(1-\frac{z_j}{t_j}\right)^{n-2}\ln\left(1-\frac{z_j}{t_j}\right)+1\right]ds+ic_j, \ j=1, 2,\cdots, n, \tag{10}$$

где $\mu_j(t)$ — действительная функция из класса $H(\Gamma)$, c_j — действительная постоянная. Здесь берется та непрерывная ветвь логарифмической функции, которая обращается в 0 при $z_j=0$, $\mu_j(t)$ и c_j однозначно определяются через $\psi_j(z_j)$.

Подставляя $\psi_j(z_j)$ из (10) в (7), получим следующее выражение для общего решения уравнения (1)

$$u(x, y)=\sum_{j=1}^{n} z_j^{n-1}\int_\Gamma \mu_j(t)\left[\left(1-\frac{z_j}{t_j}\right)^{n-2}\ln\left(1-\frac{z_j}{t_j}\right)+1\right]ds+P_{n-1}(x, y), \tag{11}$$

где

$$P_{n-1}(x, y)=P_{n-2}(x, y)+i\sum_{j=1}^{n} c_j z_j^{n-1}.$$

Пусть $t_0=\xi_0+i\eta_0$ — некоторая точка на Γ, а θ есть угол между внутренней нормалью $\vec{n}$ в точке t_0 и положительным направлением оси $0x$. Для произвольной точки $z\in D$ на нормали $\vec{n}$ будем иметь $z-t_0=\rho e^{i\theta}$, где $\rho=|z-t_0|$, т. е. $x=\xi_0+\rho\cos\theta$, $y=\eta_0+\rho\sin\theta$. Из (7) получим

$$u(x, y) = u(\xi_0 + \rho\cos\theta, \ \eta_0 + \rho\sin\theta) = P_{n-2}(\xi_0 + \rho\cos\theta, \ \eta_0 + \rho\sin\theta) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} [\xi_0 + \lambda_j\eta_0 + \rho(\cos\theta + \lambda_j\sin\theta)]^{n-1} \cdot \psi_j(\xi_0 + \lambda_j\eta_0 + \rho(\cos\theta + \lambda_j\sin\theta)).$$

Для нормальной производной $u(x, y)$ в точках нормали $\vec{n}$ будем иметь:

$$\frac{\partial^\nu u(x, y)}{\partial \vec{n}^\nu} = \frac{\partial^\nu u(\xi_0 + \rho\cos\theta, \ \eta_0 + \rho\sin\theta)}{\partial\rho^\nu} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{\nu} c_\nu^k (n-1)\cdots(n-k)(\cos\theta + \lambda_j\sin\theta)^\nu [\xi_0 + \lambda_j\eta_0 + \rho(\cos\theta +$$

$$+ \lambda_j\sin\theta)]^{n-1-k} \times \psi_j^{(\nu-k)}(\xi_0 + \lambda_j\eta_0 + \rho(\cos\theta + \lambda_j\sin\theta)) +$$

$$+ \frac{\partial^\nu}{\partial\rho^\nu}[P_{n-2}(\xi_0 + \rho\cos\theta, \ \eta_0 + \rho\sin\theta)].$$

Потребовав, чтобы $u(x, y)$ из (7) удовлетворяла краевым условиям (3), (4), получим следующую систему интегральных уравнений относительно $\mu_1(t), \ \mu_2(t), \cdots, \ \mu_n(t)$:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{\nu} c_\nu^k (n-1)\cdots(n-k) \ (\cos\theta + \lambda_j\sin\theta)^\nu \ t_{j0}^{n-1-k} \cdot \psi_j^{(\nu-k)}(t_{j0}) +$$

$$+ P_{n-2}^{(\nu)}(\xi_0, \ \eta_0) = f_\nu(t_0), \ \nu = 0, \ 1, \cdots, \ q-1, \tag{12}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\zeta_\nu(t_0)\left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{\nu} c_\nu^k (n-1)\cdots(n-k)(\cos\theta + \lambda_j\sin\theta)^\nu \ t_{j0}^{n-1-k} \ \psi_j^{(\nu-k)}(t_{j0}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + P_{n-2}^{(\nu)}(\xi_0, \eta_0)\right]\right\} = f_\nu(t_0), \ \nu = q, \ q+1, \cdots, \ p-1, \tag{13}$$

где

$$t_{j0} = \xi_0 + \lambda_j\eta_0, \ \zeta_\nu(t_0) = \alpha_\nu(t_0) - i\beta_\nu(t_0).$$

$$\psi_j^{(l)}(z) = (-1)^l (n-2)\cdots(n-1-l) \times$$

$$\times \int_\Gamma \frac{\mu_j(t)\left(1 - \dfrac{z}{t_j}\right)^{n-2-l}\left[\ln\left(1 - \dfrac{z}{t_j}\right) + \dfrac{1}{n-2} + \cdots + \dfrac{1}{n-1-l}\right]}{t_j^l} ds,$$

$$z \in D_j,$$

$$\psi_j^{(l)}(t_{j0}) = \lim_{\substack{z \to t_{j0} \\ z \in D_j}} \psi_j^{(l)}(z), \ l = 0, \ 1, \cdots, \ n-2,$$

$$P_{n-2}^{(\nu)}(\xi_0, \eta_0) = \frac{\partial^\nu}{\partial\rho^\nu}[P_{n-2}(\xi_0 + \rho\cos\theta, \ \eta_0 + \rho\sin\theta)]|_{\rho=0}.$$

Из вышеприведенных рассуждений следует, что система интегральных уравнений (12), (13) эквивалентна краевой задаче (1), (3), (4).

Пусть

$$\omega(x, y) = \int_\Gamma \ln\left(1 - \frac{x + \lambda_j y}{t_j}\right) \mu(t)\, dt, \quad (\xi_0, \eta_0) \in \Gamma, \quad t_{j0} = \xi_0 + \lambda_j \eta_0.$$

Известно [4], что если $\mu \in H(\Gamma)$, то

$$\frac{d\omega(\xi_0, \eta_0)}{ds_0} = \lim_{(x, y) \to (\xi_0, \eta_0)} \left[\frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} \cos(s_0, x) + \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y} \cos(s_0, y) \right],$$

$$(x, y) \in D. \tag{14}$$

Дифференцируя ν-ое уравнение системы (12), (13) $n-1-\nu$ раз по s_0 по формуле (14) ($\nu = 0, 1, \cdots, p-1$) и учитывая, что при $j = p+1, \cdots,$ и ориентация кривой Γ_j меняется на обратную, получим систему сингулярных интегральных уравнений относительно $\mu_1(t)$, $\mu_2(t), \cdots, \mu_n(t)$:

$$i\left[\sum_{j=1}^{p} \gamma_{\nu j} \delta_j t_{j0} \mu_j(t_0) - \sum_{j=p+1}^{n} \gamma_{\nu j} \delta_j t_{j0} \mu_j(t_0)\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_\Gamma \mu_j(t) \frac{\gamma_{\nu j} (\sin\theta - \lambda_j \cos\theta)^{n-1} t_{j0}}{t_j^{n-2}(t_j - t_{j0})} ds + \sum_{j=1}^{n} \int_\Gamma \mu_j(t) L_{\nu j}(t_0, t)\, ds = \tag{15}$$

$$= g_\nu(t_0), \quad \nu = 0, 1, \cdots, q-1,$$

$$\operatorname{Re}\left\{ \zeta_\nu(t_0)\, i \left[\sum_{j=1}^{p} \gamma_{\nu j} \delta_j t_{j0} \mu_j(t_0) - \sum_{j=p+1}^{n} \gamma_{\nu j} \delta_j t_{j0} \mu_j(t_0)\right] + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_\Gamma \mu_j(t) \frac{\gamma_{\nu j} (\sin\theta - \lambda_j \cos\theta)^{n-1} \zeta_\nu(t_0) t_{j0}}{t_j^{n-2}(t_j - t_{j0})} ds +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j(t) \gamma_{\nu j} (\sin\theta - \gamma_j \cos\theta)_{2n}^{n-1}(t) t_{j0}}{t_j^{n-2}(_j - t_{j0})} ds +$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \int_\Gamma \mu_j(t) L_{\nu j}(t_0, t)\, ds \right\} g_\nu(t_0), \quad \nu = q, q+1, \cdots, p-1, \tag{16}$$

где

$$\gamma_{\nu j}(t_0) = \left(\frac{\cos\theta + \lambda_j \sin\theta}{\sin\theta - \lambda_j \cos\theta}\right)^\nu; \quad \delta_j = (\sin\theta - \lambda_j \cos\theta)^{n-2}, \quad \nu = 0, 1, \cdots, p-1,$$

$$j = 1, 2, \cdots, n,$$

$$g_\nu(t_0) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\pi(n-2)!} f_\nu^{(n-1-\nu)}(t_0), & \nu = 0, 1, \cdots, q-1, \\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{\pi(n-2)!} [f_\nu(t_0) - \operatorname{Re}(\zeta_\nu(t_0) \cdot P_{n-2}^{(\nu)}(t_0))]^{(n-1-\nu)}(s_0), & \nu = q, \cdots, p-1, \end{cases}$$

операторы с ядрами $L_{\nu j}(t_0, t)$ вполне непрерывны.

З а м е ч а н и е 1. Если функции $f(t)$ и $g(t)$ определены на Γ и $f(t), g(t) \in C^{(\nu)}(\Gamma)$, то равенство

$$f(t) = g(t), \quad t \in \Gamma$$

эквивалентно равенству

$$\frac{d^\nu f(t)}{ds^\nu} = \frac{d^\nu g(t)}{ds^\nu}, \quad t \in \Gamma$$

с дополнительным условием $f(\tilde{t}_0) = \bar{g}(\tilde{t}_0)$, где $\tilde{t}_0$— фиксированная точка на Γ.

Из замечания 1 следует, что система интегральных уравнений (12), (13) и система сингулярных интегральных уравнений (15), (16) будут эквивалентными, если равенства (12), (13) выполняются в некоторой фиксированной точке $\tilde{t}_0 \in \Gamma$.

Выделяя во всех уравнениях (15) действительные и мнимые части, получим действительную систему сингулярных интегральных уравнений. После выделения характеристических частей, с учетом того, что характеристическая часть интеграла с ядром $\mathrm{Re}\,\frac{h(t_0, t)}{t - t_0}$ складывается только из слагаемого $\frac{1}{t - t_0}\mathrm{Re}\,\frac{h(t_0, t)}{t_s}$, систему (15), (16) приведем к виду:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{\nu j}(t_0)\mu_j(t_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{B_{\nu j}(t_0)}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\mu_j(t)\,dt}{t - t_0} + \sum_{j=1}^{n}\int_{\Gamma} \mu_j(t) L_{\nu j}^{*}(t_0, t)\,dt = \mathrm{Re}\, g_\nu(t_0), \quad \nu = 0, 1, \cdots, q-1, \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{A}_{\nu j}(t_0)\mu_j(t_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{B}_{\nu j}(t_0)}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\mu_j(t)\,dt}{t - t_0} + \sum_{j=1}^{n}\int_{\Gamma} \mu_j(t) \tilde{L}_{\nu j}^{*}(t_0, t)\,dt = \mathrm{Im}\, g_\nu(t_0), \quad \nu = 0, 1, \cdots, q-1, \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_{\nu j}(t_0)\mu_j(t_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{B_{\nu j}(t_0)}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\mu_j(t)\,dt}{t - t_0} + \sum_{j=1}^{n}\int_{\Gamma} \mu_j(t) L_{\nu j}(t_0, t)\,dt = g_\nu(t_0), \quad \nu = q, q+1, \cdots, p-1, \tag{19}$$

где

$$A_{\nu j}(t_0) + B_{\nu j}(t_0) = i\gamma_{\nu j}\delta_j \cdot t_{j0}, \quad \nu = 0, 1, \cdots, q-1; \; j = 1, 2, \cdots, p,$$

$$A_{\nu j}(t_0) + B_{\nu j}(t_0) = i\bar{\gamma}_{\nu 0}\bar{\delta}_j \bar{t}_{j0}, \quad \nu = 0, 1, \cdots, q-1; \; q = p+1, \cdots, n,$$

$$\tilde{A}_{\nu j}(t_0) + \tilde{B}_{\nu j}(t_0) = \gamma_\nu \delta_j t_{j0}, \quad \nu = 0, 1, \cdots, q-1; \; j = 1, 2, \cdots, p,$$

$$\bar{A}_{\nu j}(t_0) + \bar{B}_{\nu j}(t_0) = -\bar{\gamma}_{\nu j}\cdot\delta_j\cdot\bar{t}_{j0}, \quad \nu = 0, 1, \cdots, q-1; \; j = p+1, \cdots, n,$$

$$A_{\nu j}(t_0) + B_{\nu j}(t_0) = i\gamma_{\nu j}\delta_j t_{j0}\zeta_\nu(t_0), \quad \nu = q, \cdots, p-1; \; j = 1, 2, \cdots, p,$$

$$A_{\nu j}(t_0) + B_{\nu j}(t_0) = i\bar{\gamma}_{\nu j}\bar{\delta}_j \bar{t}_{j0}\bar{\zeta}_\nu(t_0), \quad \nu = q, \cdots, p-1; \; j = p+1, \cdots, n.$$

Вычислим определитель матрицы $A(t_0)+B(t_0)$:

$$\Delta=\det(A(t_0)+B(t_0))=i^p\prod_{j=1}^{p}\delta_j t_{j0}\prod_{j=p+1}^{n}\overline{\delta}_j\overline{t}_{j0}\times$$

$$\times\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1\\
\gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1p} & \overline{\gamma}_{1p+1} & \cdots & \overline{\gamma}_{1n}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\gamma_{q-11} & \gamma_{q-12} & \cdots & \gamma_{q-1p} & \overline{\gamma}_{q-1p+1} & \cdots & \overline{\gamma}_{q-1n}\\
1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & -1\\
\gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1p} & -\overline{\gamma}_{1p+1} & \cdots & -\overline{\gamma}_{1n}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\gamma_{q-11} & \gamma_{q-12} & \cdots & \gamma_{q-1p} & -\overline{\gamma}_{q-1p+1} & \cdots & -\overline{\gamma}_{q-1n}\\
\gamma_{q1}\zeta_q & \gamma_{q2}\zeta_q & \cdots & \gamma_{qp}\zeta_q & \overline{\gamma}_{qp+1}\overline{\zeta}_q & \cdots & \overline{\gamma}_{qn}\overline{\zeta}_q\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\gamma_{p-11}\zeta_{p-1} & \gamma_{p-12}\zeta_{p-1} & \cdots & \gamma_{p-1p}\zeta_{p-1} & \overline{\gamma}_{p-1p+1}\overline{\zeta}_{p-1} & \cdots & \overline{\gamma}_{p-1n}\overline{\zeta}_{p-1}
\end{vmatrix}.$$

Вычитая из 1-го, 2-го, $\cdots$, q-го уравнения соответственно $(q+1)$-ое, $(q+2)$-ое, $\cdots$, $2q$-ое уравнение и разлагая определитель по первым q строкам, получим

$$\Delta=2^q i^p\prod_{j=1}^{p}\delta_j t_{j0}\prod_{j=p+1}^{n}\overline{\delta}_j\overline{t}_{j0}\prod_{p+1<l<j<n}(\overline{\gamma}_{1j}-\overline{\gamma}_{1l})\cdot\prod_{1<l<j<p}(\gamma_{1j}-\gamma_{1l})\prod_{j=q}^{p-1}\zeta_j(t_0).$$

Учитывая, что

$$\gamma_{1j}-\gamma_{1l}=\frac{\lambda_j-\lambda_l}{(\sin\theta-\lambda_j\cos\theta)(\sin\theta-\lambda_l\cos\theta)},$$

получим

$$\Delta=2^q\cdot i^p\cdot\prod_{j=1}^{p}\delta_j t_{j0}\cdot\prod_{j=p+1}^{n}\overline{\delta}_j\cdot\overline{t}_{j0}\cdot\prod_{p+1<l<j<n}\frac{\overline{\lambda}_j-\overline{\lambda}_l}{\overline{(\sin\theta-\lambda_j\cos\theta)}\,\overline{(\sin\theta-\lambda_l\cos\theta)}}\times$$

$$\times\prod_{1<l<j<p}\frac{\lambda_j-\lambda_l}{(\sin\theta-\lambda_j\cos\theta)(\sin\theta-\lambda_l\cos\theta)}\cdot\prod_{j=2}^{p-1}(\alpha_j(t_0)-i\beta_j(t_0)).$$

Поскольку корни характеристического уравнения (2) простые, $\delta_j\neq0$, $j=1,2,\cdots,n$, $t_{j0}\neq0$, $\zeta_v(t_0)\neq0$, то $\det(A(t_0)+B(t_0))\neq0$.

Нетрудно убедиться, что $\det(A(t_0)-B(t_0))=\det\overline{(A(t_0)+B(t_0))}$. Отсюда следует, что система сингулярных интегральных уравнений (17)—(19) нормального типа, т. е. нетерова.

Индекс $\varkappa_1$ системы сингулярных интегральных уравнений (17)—(19) выччисляется по формуле

$$\varkappa_1=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma\arg\left[\frac{\det(A(t)-B(t))}{\det(A(t)+B(t))}\right]=-\frac{1}{\pi}\Delta_\Gamma\arg\det[A(t)+ \tag{19}$$

$$+B(t)]=-2[(n-1)p+(n-1)q-q((q-1)-p(p-1)+l]=-2(2pq+l).$$

где

$$l = \sum_{j=q}^{p-1} l_j,$$

$$l_j = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg [\alpha_j(t) - i\beta_j(t)], \; j = q, q+1, \cdots, p-1.$$

Для вычисления индекса $\varkappa$ краевой задачи (1), (3), (4) заметим, что формула общего решения (11) содержит n^2 произвольных действительных постоянных. С другой стороны, равенства (12), (13) выполняются в фиксированной точке $\tilde{t}_0$, откуда получим n действительных условий. Кроме того, мы должны учитывать, что функции $g_\nu(t)$, $\nu = 0, 1, \cdots, p-1$ не произвольные, а автоматически удовлетворяют условиям

$$\int_\Gamma g_\nu(s)\, ds = 0, \; \nu = 0, 1, \cdots, p-1.$$

Нетрудно убедиться, что эти условия необходимы и достаточны. Будем иметь всего n таких действительных условий.

Имея в виду, что произвольные постоянные увеличивают, а условия уменьшают индекс краевой задачи соответствующим количеством (автоматически выполняемые условия увеличивают), получим следующую формулу для индекса краевой задачи (1), (3), (4):

$$\varkappa = \varkappa_1 + n^2 - n + n = (p-q)^2 - 2\,l.$$

Теорема 1 доказана.

В случае кратных корней характеристического уравнения (2) указанный метод доказательства не проходит. Однако на примере можно убедиться, что полученные результаты останутся в силе в частном случае (§ 3). Этот факт позволяет нам предположить, что и в общем случае результаты работы справедливы.

§ 3. Пример

Пусть задано уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial \bar{z}^2} = 0, \; z = re^{i\theta} \tag{20}$$

в круге $|z| < 1$. Характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = i$, $p = n = 2$, $q = 0$. Краевые условия имеют вид:

$$\operatorname{Re}[\alpha_0(t) - i\beta_0(t)]\, u(t) = f_0(t), \; |t| = 1, \tag{21}$$

$$\operatorname{Re}[\alpha_1(t) - i\beta_1(t)] \frac{\partial u(t)}{\partial \vec{n}} = f_1(t), \; |t| = 1, \tag{22}$$

где

$$f_0(t) \in H^2(\Gamma), \; f_1(t) \in H^1(\Gamma), \; \alpha_0(t), \; \beta_0(t) \in H^1(\Gamma), \; \alpha_1(t), \; \beta_1(t) \in H(\Gamma),$$

$$\alpha_0(t) + \beta_0(t) \neq 0, \; \alpha_1(t) + i\beta_1(t) \neq 0 \; (\Gamma — \text{окружность } |z| = 1).$$

Предположим, что

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg[\alpha_0(t) - i\beta_0(t)] = l_0 + 1; \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg[\alpha_1(t) - i\beta_1(t)] = l_1 + 1.$$

Решение краевой задачи (20)—(22) отыскиваем в классе функций

$$u(x, y) \in H^2(D + \Gamma) \quad (D \text{ — круг } |z| \leqslant 1).$$

Общее решение уравнения (20) имеет вид

$$u(x, y) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z), \tag{23}$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ произвольные аналитические в D функции, которые однозначно определяются через $u(x, y)$. Подставляя $u(x, y)$ из (23) в краевые условия (21), (22) и учитывая, что $t\bar{t} = 1$ на Γ, будем иметь:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\dfrac{\alpha_0(t) - i\beta_0(t)}{t}[t\varphi(t) + \psi(t)] = f_1(t), \\ \mathrm{Re}\dfrac{\alpha_1(t) - i\beta_1(t)}{t}[t^2\varphi'(t) + t\psi'(t) + \psi(t)] = -f_1(t). \end{cases}$$

По задаче Римана—Гильберта [4] отсюда получим:

$$\begin{cases} z\cdot\varphi(z) + \psi(z) = F_0(z), & (24) \\ & |z| \leqslant 1, \\ z^2\varphi'(z) + z\cdot\psi'(z) + \psi(z) = F_1(z), & (25) \end{cases}$$

где $F_0(z)$, $F_1(z)$ — вполне определенные аналитические в D функции (об условиях разрешимости говорим ниже).

Из (24) будем иметь:

$$\begin{aligned} \psi(z) &= F_0(z) - z\varphi(z), \\ \psi'(z) &= F_0'(z) - \varphi(z) - z\varphi'(z). \end{aligned} \tag{26}$$

Подставляя значения $\psi(z)$ и $\psi'(z)$ в (25), получим

$$z^2\varphi'(z) + zF_0'(z) - z\varphi(z) - z^2\varphi'(z) + F_0(z) - z\varphi(z) = F_1(z),$$

откуда

$$\varphi(z) = \frac{F_1(z) - F_0(z) - zF_0'(z)}{2z} = F_3(z). \tag{27}$$

Чтобы $\varphi(z)$ была аналитична, необходимо и достаточно выполнения условия $F_0(0) = F_1(0)$, которое равносильно двум действительным условиям:

$$\mathrm{Re}\, F_0(0) = \mathrm{Re}\, F_1(0), \tag{28}$$

$$\mathrm{Im}\, F_0(0) = \mathrm{Im}\, F_1(0). \tag{29}$$

Подставляя найденное значение $\varphi(z)$ из (27) в (26), получим $\psi(z)$:

$$\psi(z) = \frac{F_1(z) + (F_0(z) - zF_0'(z)}{2} = F_4(z).$$

Решение краевой задачи (20)—(22) получим по формуле (23)

$$u(x, y) = F_3(z) + \bar{z}F_4(z).$$

Рассмотрим теперь возможные случаи:

а) $l_0 \geqslant 1$, $l_1 \geqslant 1$. Однородная краевая задача (20)—(22) не имеет ненулевых решений, а для разрешимости неоднородной краевой задачи необходимо и достаточно выполнение $2l_0 - 1 + 2l_1 - 1 + 2 = 2(l_0 + l_1)$ условий (с учетом (28), (29)). Индекс $\varkappa$ будет равен:

$$\varkappa = 0 - 2(l_0 + l_1) = -2(l_0 + l_1).$$

б) $l_0 \geqslant 1$, $l_1 \leqslant 0$. В этом случае однородная задача имеет $-2l_1 + 1$ линейно независимых решений, а количество условий разрешимости неоднородной задачи $2l_0 - 1 + 2 = 2l_0 + 1$,

$$\varkappa = -2l_1 + 1 - 2l_0 - 1 = -2(l_0 + l_1).$$

в) $l_0 < 0$, $l_1 \geqslant 1$. Аналогично случаю б) получим

$$\varkappa = -2l_0 + 1 - (2l_1 + 1) = -2(l_0 + l_1).$$

г) $l_0 \leqslant 0$, $l_1 < 0$. Однородная задача имеет $-2l_0 + 1 - 2l_1 + 1 = -2(l_0 + l_1) + 2$ линейно независимых решений, всего 2 условия, $\varkappa = -2(l_0 + l_1)$.

Вычислим теперь $\varkappa$ по формуле $\varkappa = (p - q)^2 - 2l$:

$$\varkappa = 4 - 2(l_0 + 1 + l_1 + 1) = -2(l_0 + l_1).$$

Налицо полное совпадение результатов.

Дифференцируя (24) по θ будем иметь:

$$iz\varphi(z) + iz^2\varphi'(z) + iz\psi'(z) = izF_0'(z). \qquad (30)$$

Из (25) и (30) видно, что если ограничиваться только главными сингулярными частями (как при доказательстве теоремы 1), то однородная краевая задача (20)—(22) может оказаться не нетеровой. Следовательно, в случае кратких корней следует рассматривать еще слагаемые с логарифмическими особенностями.

Пользуясь случаем, автор благодарит проф. Н. Е. Товмасяна за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Кироваканский филиал ЕрПИ Поступила 3.IV 1991

Վ. Վ. ԱՍԱՏՐՅԱՆ. Բարձր կարգի ոչ ճշգրիտ էլիպտիկ հավասարման համար մի եզրային խնդրի մասին *(ամփոփում)*

Դիրիխլեի խնդիրը կոմպլեքս հաստատուն գործակիցներով

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\partial^n u(x, y)}{\partial y^{n-k}\partial x^k} = 0 \qquad (1)$$

բարձր կարգի ոչ ճշգրիտ էլիպտիկ հավասարման համար Նետերի խնդիր չէ։ Հոդվածում դըրվում է նոր եզրային խնդիր (1) հավասարման համար (Դիրիխլեի խնդրի անալոգը)։ Բնութագրիչ հավասարման պարզ արմատների դեպքում ապացուցվում է այդ խնդրի Նետերությունը։ Ստացված է նաև բանաձև ինդեքսը հաշվելու համար։

V. V. ASATRIAN. *About a boundarg-value problem for high-order inaccuracg elliptic equation* (summary)

The Dirichlet's problem for elliptic equation

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\partial^n u(x, y)}{\partial y^{n-k} \partial x^k} = 0 \qquad (1)$$

with no Neterov's constant complex coefficients.

The paper considers the new boundary-value problem for equation (1) (analogue of Diricchlet's problem). In case of simple roots of characteristic equations the neterovity of this problem is constructed, as well as the formula for index computation is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М., «Наука», 1966, 109—117.
2. *Н. Е. Товмасян.* Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами. Дифференциальные уравнения, 1966, № 1, 3—23, № 2, 163—171.
3. *Р. А. Алиханян.* Внешняя задача Дирихле для эллиптических уравнений высшего порядка. 7Б418. ДЕП., № 3, Ар—85.
4. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, М., «Наука», 1968, 47--50, 140—156, 224—232.